



总主编　李其维　赵国祥

皮亚杰文集

Collected Works of Jean Piaget

第九卷（下）

本卷主编　朱莉琪



ISBN 978-7-5649-4481-0
9 787564 944810 >
（上、下册）
定价：645.00 元



总主编 李其维 赵国祥

皮亚杰文集
Collected Works of Jean Piaget

（第九卷）
Volume Nine

可能性、必然性范畴及空间、几何(学)和概率概念的个体发生
（下）

The Categories of Possibility and Necessity, and the Conceptions of Space, Geometry and Chance
（Part II）

主　编　朱莉琪
副主编　衣新发　谢英香

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

皮亚杰文集.第九卷/李其维,赵国祥总主编;朱莉琪分卷主编.—郑州:河南大学出版社,2020.9

ISBN 978-7-5649-4481-0

Ⅰ.①皮… Ⅱ.①李… ②赵… ③朱… Ⅲ.①皮亚杰(Piaget,Jean 1896—1980)—文集 Ⅳ.①B84—53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 190622 号

责任编辑 纪庆芳 卢志宇 宋小放
责任校对 时二凤

出　版	河南大学出版社	
	地址:郑州市郑东新区商务外环中化大厦 2401 号	邮编:450046
	电话:0371—86059701(营销部)	网址:hupress.henu.edu.cn
排　版	河南瑞之光印刷股份有限公司	
印　刷	河南瑞之光印刷股份有限公司	
版　次	2020 年 12 月第 1 版	**印　次** 2020 年 12 月第 1 次印刷
开　本	787 mm×1092 mm　1/16	**印　张** 85.75
字　数	1828 千字	**定　价** 645.00 元

目　录

儿童概率概念的起源

〔瑞士〕让·皮亚杰 〔瑞士〕巴禧尔·英海尔德 著
谢英香 译

儿童概率概念的起源

法文版　*La Genèse de l' Idée de Hazard chez l' Enfant*, Presses Universitaires de France, 1951.

作　者　Jean Piaget, Bärbel Inhelder

英文版　*The Origin of the Idea of Chance in Children*, Routledge & Hegan Paul, 1975.

英译者　Lowell Leake, Jr. Paul Burrell, Harold D. Fishbein

谢英香　译自英文

内容提要

本书是皮亚杰与其主要合作者英海尔德合著的一本关于儿童思维发展的经典之作，从心理运算的视角，系统、精确分析了儿童概率概念的缘起与发展，并探讨了概率概念形成的条件及基本特点。他们指出，概率是心理运算的副产品，而心理运算可以使我们精确地研究儿童概率概念的形成与发展。在内容的安排上，实验与理论并重，既设计了不同年龄段儿童思维发展的清晰案例，又对实验结果进行了翔实的理论解读。由浅入深的论述使读者不需要评论人士的引导就可自行阅读，尤其会使认知发展研究者及概率教授者受益匪浅。

本书包括三个部分，每部分各包含三个章节。第一部分，以自然界常见的物理现象为例，探讨儿童概率概念的形成；第二部分，以随机话题和特殊话题为例，研究从儿童对概念的理解转向儿童对可能性/概率的量化；第三部分，考察儿童组合（包括组合、转置、排列）运算的发展。研究认为，概率概念形成于儿童早期阶段，经历了4—7岁、7—11岁、11—12岁三个阶段的发展，儿童在不同阶段对概念的理解存在不同程度的缺失。

谢英香

目 录

译 者 序

让·皮亚杰(Jean Piaget),生于1896年,是发展心理学领域中的学术巨匠。虽然皮亚杰于1918年获得的是自然科学(主要是生物学)的博士学位,但是其知识深度涉及哲学、宗教、社会学、逻辑学、数学。当然,也包括心理学。目前,皮亚杰的研究与著作主要聚焦于知觉与记忆实验以及发生认识论问题的完整分析。在过去的10到15年间,皮亚杰及其最杰出、最重要的合作者巴蓓尔·英海尔德(Bärbel Inhelder)的卓著贡献已经引起了美国心理学家及教育学家的高度关注。他的名字在美国家喻户晓,但是其贡献程度却鲜为人知。1963年,约翰·弗拉维尔(John Flavell)[1]指出:皮亚杰至少有25本著作及150篇文章可供学者们研究;然而,这些著述中仅有少量论文及部分著作被翻译过来。

本书《儿童概率概念的起源》(*The Origin of the Idea of Chance in Children*)与早期关于数量、逻辑、数字、时间、运动和速度、空间、几何、青少年推理的著作如出一辙。本书的参考文献中部分提及了这些著作,不过弗拉维尔的书详细罗列了皮亚杰1962年之前的著作。毋庸置疑,皮亚杰在此之后还出版了更多的著作。

1951年,《儿童概率概念的起源》于法国巴黎首次发行。然而,奇怪的是,这本书至今未被翻译成其他语言。这迟来的23年变得异常引人注目,因为该著作是皮亚杰与英海尔德的代表作。此外,早至1926年(《儿童的语言和思维》,*The Language and Thought of the Child*)及晚至1970年的(《儿童的运动和速度概念》,*The Child's Conception of Movement and Speed*)期间的其他主要著作的译本陆续出现。最后,时至今日,该著作译本的匮乏尤为奇怪,因为该著作涉及了概率和可能性的概念,而这些数学概念在我们从幼儿园到大学教育的学校数学课程中至关重要。

希望此译本可以成为对认知发展感兴趣的心理学家和数学教育家开展研究的新催化剂,并对认知发展感兴趣的高校数学教师及教授可能性的教师有所帮助。实际上,这是皮亚杰为数不多的、可供初读者不需要在评论人士的帮助下就可以自行阅读的著作之一,因为这本书给出了实验和思维发展相对清晰的案例。弗拉维尔告诫我们,"除此之外,皮亚杰的大部分法文与英文著作都很难阅读与理解。首先,这些著作中有大量新的、生僻的理论概念,而且这些概念相互交织在一起以复杂的方式构成了整个理论框架。其次,很多理论内容需要读者精通数学、逻辑及认识论。"[2]令人欣慰的是,弗拉维尔

① John H. Flavell, *The Development Psychology of Jean Piaget* (Princeton, N. J.: Van Nostrand, 1963).

② 同上,11页。

稍微缓和了上述告诫，“幸运的是，《儿童概率概念的起源》(*The Origin of the Idea of Chance in Children*)这本书比较容易阅读(据皮亚杰著作所言)，该书的结论章节详细总结了主要研究结论及皮亚杰对这些研究结论的解释。”[1]任何皮亚杰著作的大部分读者都可以在阅读皮亚杰著作的同时阅读弗拉维尔教授的著作。皮亚杰在其著作的序言部分推荐了弗拉维尔的著作，这似乎是唯一用英文对皮亚杰理论进行翔实分析的著述。

① 同上，341页。

序　　言

本书是此前关于儿童思维发展著作的增补，也是两种重要思想的结合。

在研究了儿童思维中的逻辑、数学、物理运算如何发展及如何顺化于可被演绎建构的部分经验之后，我们的下一个问题是尚处于形成过程中的思维如何同化那些不能被演绎同化的经验。例如，偶然或随机混合的经验。

我们的第二个问题是知识运算及相关现象的分析绝不能涉及儿童思维的遗传机能（也很少涉及青少年）。故而，仍需研究的是思维过程如何在组成了通常被称作问题归纳的整个自主实验探索中发挥作用。归纳是筛选用于发现什么取决于规律与法则，什么被排除在外——即概率是什么的经验中最基本或者说最重要的工作。作为知觉研究的介绍，我们认为概率概念起源的研究是必不可少的。

在此，我们从上述两个视角来呈现概率概念的部分心理学实验结果。读者将会在这些材料中发现儿童思维运算分析的补充；此外，还会发现实验归纳形成的后续可能研究的梗概。

让·皮亚杰

巴蓓尔·英海尔德

引言——可能性知觉

有一天,一位以可能性理论而闻名的数学家向我们提出了如下问题:正常人是否有基本的、经常使用的可能性知觉,或者说是整体数字知觉?实际上,几乎所有日常行为都需要概率概念以及对某种恐惧或预期事件发生可能性的自主评估。例如,我们知道在狭小的空间里比在广阔的空间里更容易发现丢失的物品。横穿街道时为了避免撞击,我们时刻都在估算汽车的速度和位置。注意到太阳周围的光环之后,如果第二天下雨了,我们会说这并不是偶然;另一方面,如果连续三个周日下雨也不会让我们总结出任何与周日下雨有关的自然规律。最后,我们意识到事实和因果事件密不可分的混合迫使我们采取可能性的态度。有时在实验室中,现象只有在理论上才能被简化为契合某种特定假设。在我们的日常生活中,所有事件都很复杂:落叶的奇特路径比直线路径更常见,这就是为什么我们毕生致力于猜测或根据经验频度和偶发事件来做预测。

不过,如果我们不否认正常有知识的成年人有可能性知觉,而且如果我们能够准确比较这种知觉及数字和空间这几类实际运算,我们也依然要在本书的开始部分提出如下两个问题:这种知觉是天生的还是后天发展的?如果是后者,那么又是如何被习得的呢?

撇开以下两种并不存在概率概念的精神病理状态,处于这两种状态下的人通常以个人主观意愿对偶发事件进行大量强迫性或疯狂式的解读;情侣和赌徒就体现了这种相类似的特点:他们钟情于某种存在于现实或想象世界的符号游戏。同时,对概率或可能性的理解似乎在以下两种完全正常的心理状态中也有所缺失,即:原始人的思维状态和小孩儿的思维状态。

我们都知道列维-布留尔(Levy-Bruhl)认为概率概念的缺失是原始人思维的基本特点。因为原始人把所有事件都看作是隐蔽及可见原因的结果,而且他们还缺少排除最奇怪、最意外关联的合理或实验性准则。由此,前科学思维也就不可能具备像我们这样的可能性知觉。现代概率概念与决定论和奇迹论这两类因果关系大相径庭。一方面,现代概率概念不同于纯粹的机械决定论,后者的时空关系在理想状态下是可逆的,因为可能性意味着不可逆现象的介入。另一方面,通过干预因果事件,可能性直接排除了奇迹的概念。概率论严格地认为混合有其自己的规律,而奇迹与这些规律相悖。在研究原始人思维时的另一个问题就是:原始人思维能在多大程度上感知到机械因果的可能

性？不过，这还是没有问到奇迹论的问题。因为对原始人而言，一切都是奇迹。有两个原因可以解释原始人为什么不知道概率的概念，以及他们肯定比我们更不知道概率的概念。

然而，在我们分析这些概念的起源时，只使用原始人思维却是非常困难的。列维-布留尔的著作已经精辟展现出了原始人所有概念意识形态上的甚至是神化性的特点。对我们而言，这些原始概念的整个技术层面及个体日常区分的应用依然是个谜团。在我们对概率概念的研究中，原始人思维极其重要。我们非常清楚原始人如何将死亡、疾病、事故、不幸归因于神秘力量的干预而非概率。但是，我们可能喜欢更多这样的信息：阿兰达人（Arunta）和博罗罗人（Bororo）如何发现错放的工具，或者在瞄准目标时，被控制箭飞行的运动规律或其目标物周围偶然排列的东西束缚住时，他们会做出什么反应。

在这点上，我们对儿童的观察是相关的。当然，儿童的思维总是依赖于周围的环境。因此，每个人在成长过程中都会经历家庭和学校强加给他的一系列集体表征。但是，在心理遗传学的研究中，这种情况远没有成为某些特殊问题的障碍。例如，尽管对可能性和概率的直觉是我们社会常识的一个组成部分，但即使是知识分子家庭中长大的小孩都会在一定年龄之前对这种观念持抵触态度。这就表明：首先，心理活动并不完全依赖于整体环境；其次，心理活动将使我们能够准确分析概率概念是如何发展的。

我们不仅发现事情以这种方式发生，而且还发现儿童心理进化中合理过程的形成表明了概率及初等概率概念的起源、特点和条件。

显然，儿童起初并没有概率的概念，因为在领会因果事件干预的可能性或移动物体的组合可能性之前，他必须先建构位置和位移这样的推论体系。通常，因果概念和规律概念的发展认为一种态度恰好相悖于另一种承认可能性和偶然性的态度。因此，概率概念和可能性知觉毫无疑问地构成了次要的、派生的现实，而这样的现实仅仅取决于规律及其原因的探求。正如我们在别处所表明的，这在我们研究儿童的自主问题，尤其是著名的、成年人难以回答的“为什么”问题之时是显而易见的。“为什么”通常是在原因存在的情况下问事情的原因，不过更多的是在原因并不存在的情况下还问事情的原因。也就是这种情况：现象是偶然的，但是儿童看到了神秘原因。类似如下假问题：为什么日内瓦湖（Lake Geneva，瑞士地名）不经过所有的路就到达伯尔尼（Berne，瑞士首都）？为什么会有大、小萨利夫（Salève）？为什么我们的花园中没有喷泉？为什么棍子比你高？为什么你那么高，耳朵却那么小？等等。对我们而言，这些问题都是假问题，因为需要解释的事实都可以归因于生物和地理的概率干预、概率机缘和相似性。但是，认为万事皆有因的儿童问及了原因恰好不明显情况下的原因。他还不明白这正是原因并不存在的情况。

此外，如果儿童思维的研究让我们意识到概率概念和可能性知觉并不是与生俱来

的，那么心理发展中这些概念的心理发生就说明当代科学思维中的基本概念是后天形成的。儿童心智发展中的某一方面是建立不可逆行为(机动的和可感应的)与可逆、相互关联的合理运算、行为之间的进程。个体心智进化中需要我们分析的核心问题是逻辑和数学运算的发生及特点问题，只要这些运算源于经验且可被可逆过程建构。从儿童不可逆的前逻辑到思维的原始模式，再到逻辑-算术推理的开始，通过12年左右的课程学习，个体就可以逐步形成人类思维的这种发展机制。个体思维过程发展的基本方面取决于个体逐渐意识到运算的可逆性。

个体很快就可以注意到：这种情形适用于概率和可能性概念。从物理角度来看，概率是不可逆混合的基本特点，而在另一个极端就是以固有可逆性为特点的机械因果关系。那么，这是否就是概率概念的发现？即，对不可逆的理解发生于对可逆运算的理解之后，因为我们用概率来表示不可简化成可逆运算的那部分现象。这正是可以使我们领会其对立面的唯一运算吗？那么，这就意味着思维依然不可逆，仅能朝向一个方向发展，且完全受制于事件的时间顺序。这种思维不能用概率概念来准确表述，因为缺少了来自于偶然事件的可以区分可逆思维运算的心理组织。

总之，我们必须将概率想象成一种与逻辑可以在其中发挥作用的范畴相辅相成的范畴。因此，直到可逆运算被理解且对其进行比较之后，概率才能被理解。在这种情况下，可能性就是心理运算的副产品了。也就是，概率同化进组合运算。因为我们不可能相当简单地推算出每次干扰的结果，而只能将其视为可被思维整体同化的组合。经过这种复杂运算，我们将可以将特定案例简化为其所有可能性的组合。

这就是假设：我们的研究认为概率和可能性概念的发展大部分完成于儿童早期，也就是从四五岁到十一二岁。该研究的可用性并不在于对数据的理论分析，而是我们有必要使事实本身按照其出现的顺序具有一定的可用性。那么，事实将会告诉我们要像研究它们的对立面那样去研究运算、概率概念和可能发生的概率同化进组合机制的相关发展。

本书的第一部分探讨了概率概念的物理形成，也就是描述偶发事件特征、概率及归纳关系的不可逆混合、多样性分布(均匀分布或中心性分布)概念。

第二部分分别研究了一组不同年龄的随机实验对象及一组特殊实验对象。至此，我们就从理解概念转向了研究可能性量化的开始。

最后，第三部分包括组合运算——组合、排列、排列组合的发展分析。作为结论，组合运算发展及前述事实可使我们判断概率、可能性和思维运算机制之间的关系。

第一部分
自然界中的概率

第一章 随机混合和不可逆的概念

概率概念很可能源于递增、不可逆组合现象的概念。库诺特(Cournot)的著名解释将自然概率视为不相关的因果事件的相互作用。但是,这个复杂的概念需要理解相互作用和不相关的意思,否则就无法被没有知识的思维领会,除非是那种因涉及了大量要素而排除意向性解释的情况。如果儿童被一阵风吹动的门撞到了,这个儿童就很难相信风和门都是无意伤害他的。他可能看到了将其推到门旁边的多种原因之间的相互作用,以及什么引起了门的移动,但是他不会认为这之间是没有关联的。这就是不会让儿童将这件事情看作意外的事实。一方面,儿童不会意识到概率定义了日常(社会、天气等)事件,因为他没有注意到现象之间的相互作用(例如,夜霜和果木开花之间的关系)。简言之,无法建构概率概念的理由不是儿童没有意识到不相关原因之间的相互作用,就是没有意识到相互作用之间的不相关性。另一方面,大量元素的组合似乎形成了有利于感知因果事件的情形。在这种情形中,事件之间既相互作用又不相关,因为不需要刻意想象细节就可以很容易地建立起事件序列。

问题是判断儿童在面对材料物的明显组合之时,是否会将其视作物体的递增、不可逆组合?或者,如果不考虑明显的无序,儿童是否仍会将不同物体想象成以不可见的关系联系起来?换言之,随机混合的感知是天生的,还是概率概念有其发展过程?如果是这样,那么其发展过程是什么?这正是我们想通过实验来阐明的。

第一节 实验与结果

向儿童出示一个长方形的盒子,这个盒子放置于一根横轴之上,这根横轴将控制盒子的活动。在静止状态下,盒子向较长的一侧倾斜,沿此侧边线放置8个红色球和8个白色球,每组球用隔板分隔开(图1)。盒子每次活动时,球就会滚向另一侧,然后当盒子恢复原位的时候,球就会返回到原来的那一侧,但是排列方式可能会有所改变。盒子的连续活动不能过于剧烈,两色球就会以这种方式逐渐混合。例如,开始的时候,会有2

个或3个红色球混合到白色球中，反之亦然。然后，两色球的混合程度就会逐渐变大。

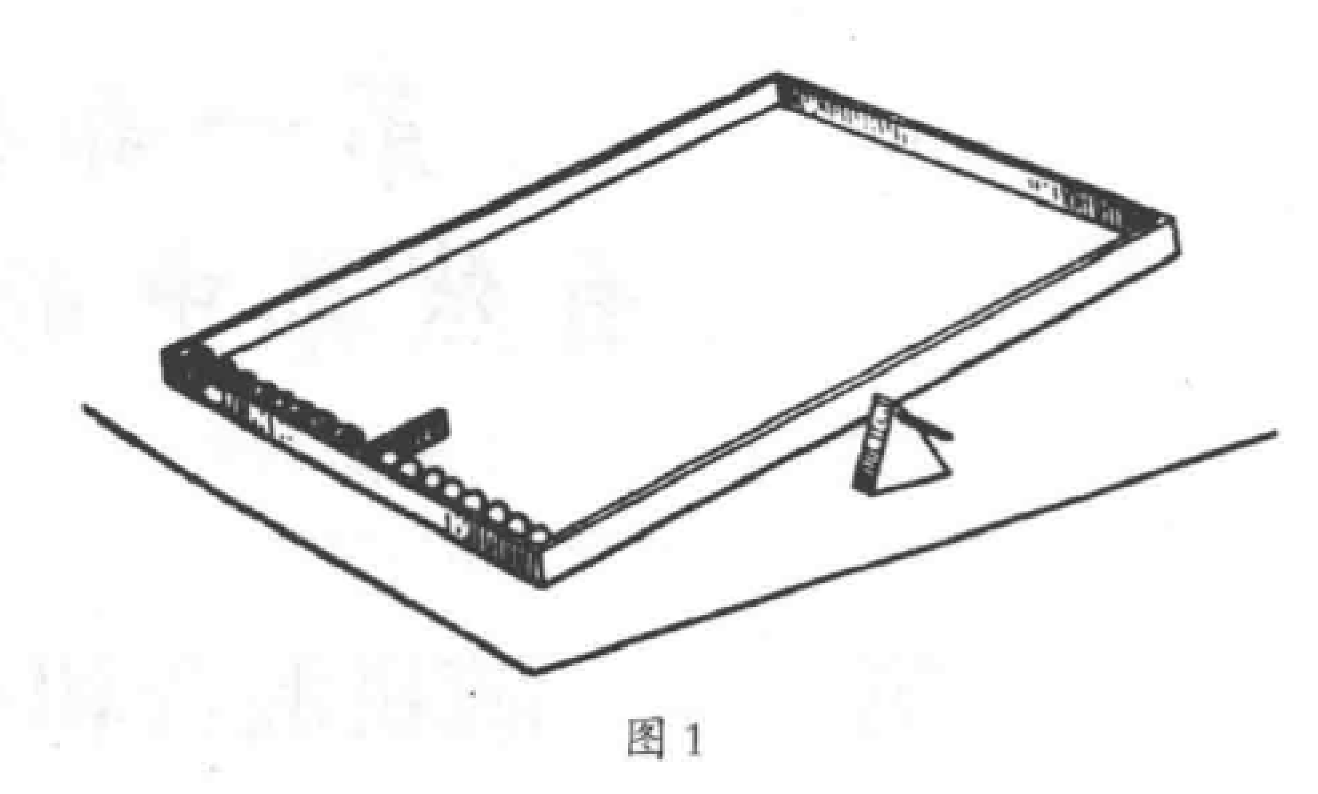


图 1

在第一次倾斜盒子前(在球就位时，告诉儿童或给儿童演示盒子如何活动)，向儿童提问：当球回到初始位置时，小球的排列方式会是什么样的？是不是红色球在一边，白色球在另一边？或者球是否会混合在一起？混合比例大概是多少？接着，我们就倾斜盒子，并让儿童注意到2个或3个球已经在不同的位置上了。然后，让儿童预测盒子第二次活动后的结果，以此类推。经过几次尝试，要求儿童预测盒子多次活动后的结果。我们尤其要注意，儿童是否会预测到某种连续随机混合或者红色球以常见的交叉方式混合到白色球中，反之亦然。最后，将所有球复原至初始顺序(也即是，最后重置)。

将球的排列位置画下来有助于下述问题的解决：儿童可以将盒子第一次倾斜后的预测结果画下来。然后，在第一次实验后，通过绘制连续实验结果的方式做出预测。我们尤其会让儿童绘制出其所认为小球最可能的排列方式。绘制出来的小球的混合位置与被要求绘制的小球的运动轨迹之间并不总是有关系的。但是，这种排列缺失的研究非常有助于理解实验对象的思维过程。

值得注意的是，不同的问题还可以相当合理地用来研究实验对象的感知排列运算方式。在第八章中，我们将会以用于研究运算发展的三个实验来再次探讨这个问题。在此，我们关注的问题是，用倾斜盒子的球和筹码的排列实验(第八章)来同时研究相同年龄段的儿童。混合相关概念的发展与排列运算的发展之间的关系对于理解儿童的反应具有启发意义。

我们在提问时观察到的儿童在球混合瞬间的反应可以被划分为三个不同的阶段。第一阶段(7岁之前)，儿童认为混合是元素的整体排列，但是既没有看到个别位置的排列，也没有预料到运动轨迹之间的相互作用。整体排列可能形成了一种无序状态，但对儿童而言，这并不是最终结果，他经常能预测出球最终会恢复至初始次序。在严格意义上，这并不是真正的混合或概率。第二阶段(中间阶段，7到11岁)会逐渐出现位置、运动轨迹的个别化并逐渐建构排列的感知格式，但没有完整的归纳。第三阶段(11或12岁后)，儿童把组合视为因运动轨迹上的意外碰撞而引发的排列体系。

第二节　第一阶段(4到7岁)：无法理解混合的随机性

第一阶段反应的特点是孩子所注意到的事实与他所寻求的解释之间存在着非常显

著的冲突，而这种冲突又与随机混合的概念无关。换言之，实验对象被迫接受因混合而发生位置变化的事实，但是他拒绝将其视为偶然混合，并决定去寻找与概率相悖的均匀性。这样，尽管实验对象预测出了第一次排列，但他预测出球会回到原来位置或者可能是位置的规则变化而非随意的排列组合。例如，儿童认为每个球仅遵循唯一的运动轨迹，尤其是红色球会替代白色球，反之亦然（图2）。实验对象认为盒子的多次活动不会增加混合的程度，甚至经常预测出球会回到各自的初始位置。不是小球的运动轨迹图而是我们向儿童给出的排列概念让他们知道了：即使早前已经发生了混合的事实，但小球还是会回到起点。

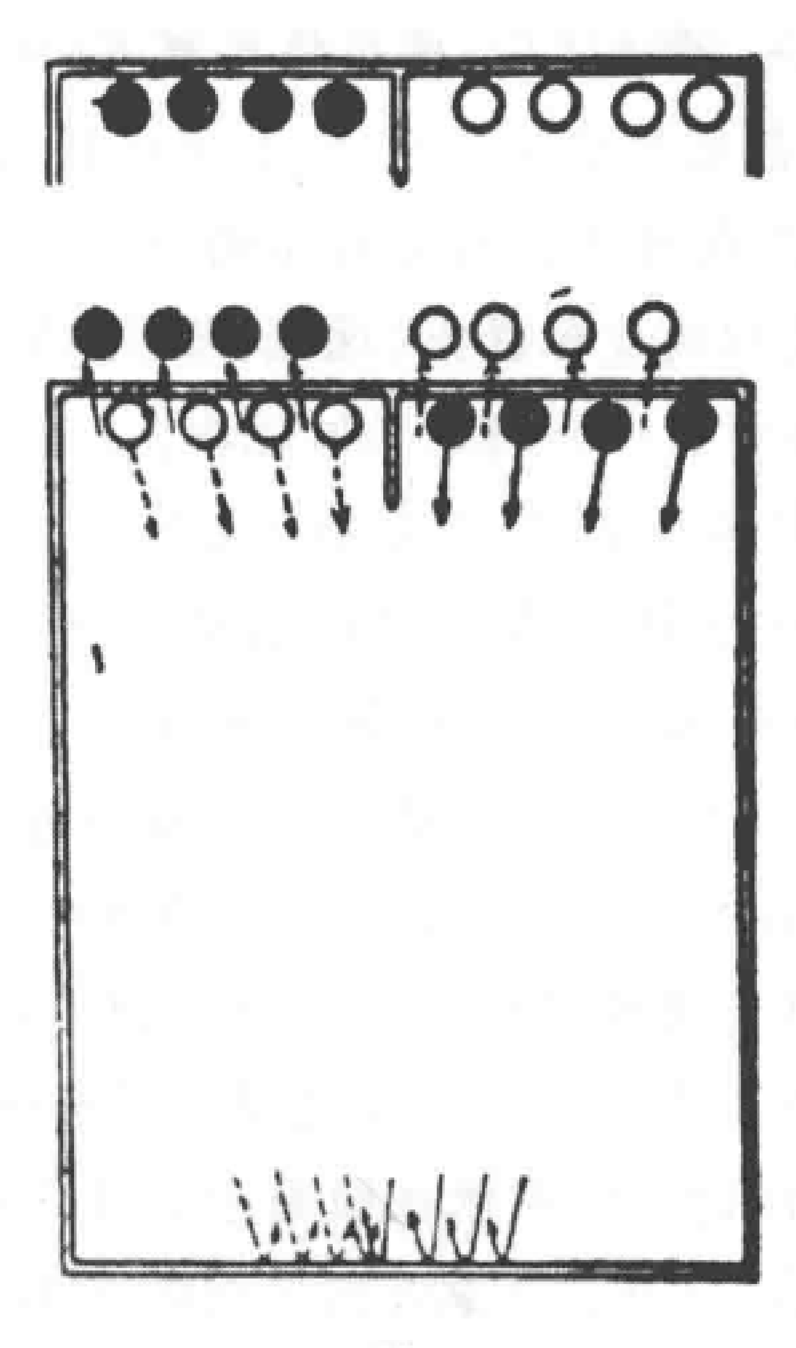


图2

以下是几个案例。

伊莱（4;4） 开始的时候预测出球将会回到原位。"*它们将会到达那里*（距离原来位置几厘米）。（然后）*它们将会回到原点*（完全覆盖原位）。——看（盒子倾斜了，一个白色球到了红色球的区域）。——*看，就像我说的那样*。——再看。——*一个白色球到了那里*（红色球那边），*但是所有的红色球都在那里*。——如果再次倾斜盒子呢？——*白色球在这里，红色球在那里*（所有的球完全交换位置）。——再看看（再次倾斜，混合程度更大了）。——*啊，现在都混合了*。——如果我继续倾斜盒子，混合程度会更大还是更小？——*不*。*不要那样做*（他把球放回了原来的位置，就好像混合已经干扰了他）。——现在把小球混合的样子画出来。——（他画的图显示出6个白色球在一边，3个白色球和3个红色球在另一边）。"

费尔（5;3） "如果我倾斜盒子，结果会怎样？——*球会都混合在一起*。——怎

样混合？——*白色球到那里，红色球到那里*(红色球、白色球互换位置)。(他画的图显示出6个红色球在右边，6个白色球在左边)。——如果我倾斜了盒子，球会到哪里？——*那里*(回到相同的位置)。——你是说红色球到那里，白色球到这里？——*不是的，球会回到它们原来的位置*。——观察(实验)。——*小球混合了。交换了位置，红色球到了这里，白色球到了那里*(实际上，这种情况仅仅发生了两次而已)。——如果再次倾斜呢？——*还会再次混合。会到那里，然后到那里*。——画张图告诉我这是如何发生的(他再次画了6个白色球在左边，6个红色球在右边)。——白色球会到哪儿？——(他画了一条表示白色球在右边另一侧的线。)——红色球呢？——*穿过这儿，然后停在那里(反向运动)*。"费尔再次画了相同的图：现在，所有的红色球移动到了左边，白色球移到了右边，两种颜色的球完全交换了位置。起初，画出来的路线图是对称的，但是画了一些歪歪扭扭的线条之后，费尔将球放在了他发现的空位置上，这就出现了小球的运动轨迹之间的相互碰撞，但是这张图并不想展示出小球间的任何碰撞。

维(5;6)　"如果我倾斜盒子，球将会如何排列？——*就像现在这样*。——看一下(我们倾斜了盒子：一个红色球到了白色球区域，一个白色球到了红色球区域)。——*小球不能回到原位*。——如果继续呢？——*会更混合*。——为什么？——*因为每种颜色球当中的两个球会滚到另一边*。——如果我再次倾斜盒子呢？——*每种颜色球再各有1个滚到另一边(3个红色球到白色球区域，3个白色球到红色球区域)*。——再一次倾斜呢？——*每种颜色球再各有1个滚到另一边，小球会混合得更厉害*(完全交叉互换位置)，*之后就开始回到起始位置*(以相反的方向穿越：红色球回到原来的位置，白色球也回到原来的位置)。——观察(我们再次倾斜了盒子，但是这次仅有一个红色球混合到了白色球那边，1个白色球混合到了红色球那边)。——如果我们继续呢？——*保持原样*(维坚持是他看到的样子)。——如果我们一下午都这样做，会怎样？——*小球都回到它们应该在的位置*。"我们再次要求维画出最大程度的混合：所有的红色球都在白色球的初始位置，反之亦然。

孟(5;8)　从一开始就准确预测出所有球既不会"*在原来的位置*"，也不会完全混合。"*球会滚动*。——观察(实验：一个红色球滚到了白色球区域，反之亦然)。——*球不在原位了。一个红色球在这里，一个白色球在那里*。——如果我们再次倾斜盒子，我们会知道发生什么吗？——*不能，没有人能确定，因为我们不是球*。——对的。不过如果我们再做一次，哪种颜色的球最有可能到另一边？白色球中的那个红色球，还是白色球中的一个白色球？——(犹豫)*红色球，因为它得回到原位*。——你想试试吗？——(他做了这个实验，另一个红色球混合到白色球那里。)——现在你怎么说？——*球知道往哪儿滚，因为是球自己滚*。"

舒(5;6)　起初同样很仔细，同样认为球会回到原来的位置。他画了很多来来回回的运动轨迹："为什么？每个球都会回到原来的位置吗？——*小球知道去往哪*

里,因为必须要这样做。"

卡(5;8) "球会滚到另一边,然后再滚回来。——怎样?——所有的红色球在一边,所有的白色球在另一边。——两色球没有可能混合起来吗?——或许不可能完全混合;两个红色球到这儿,两个白色球到那儿。"(我们做了实验:混合开始了)"如果我们继续呢?——会回到原来的位置,就像之前那样。——观察(再次倾斜盒子:混合程度增加了)。——如果我们继续呢?——继续混合。——最后呢?——所有的红色球在这儿,所有的白色球在那儿(完全交叉互换位置)。——然后呢?——像这样(回到初始位置)。球会回到它们原来的位置。"

泰(5;8) 观看了小球开始混合之后说:"当我们继续倾斜盒子的时候,小球的混合程度会更小。"

依夫(6;2) "红色球会回到那里,白色球回到那里(各自回到原来的位置)。——球会回到原来的位置还是混合起来?——回到原来的位置。——观察(实验:每种颜色球中的1个球到了另一边)。——啊!不,一个在这里,一个在那里。——如果我们继续倾斜盒子,小球的混合程度会更大还是更小?——更大,我认为……不,保持原样。——观察(我们倾斜盒子)。——混合得更多了。——如果我们再继续呢?——更混合。——(实验:3个红色球在白色球那边,反之亦然)更混合?——不,不可能再混合了,因为已经非常混合了。——再次倾斜盒子呢?——各自回到原来的位置(之前的样子)。"

洛尔(6;3) "保持原样。(实验。)只有几个红色球和白色球在一边,另一边也是这样。——如果我继续倾斜盒子呢?——所有红色球在这里,所有白色球在那里(交叉互换位置)。——然后球会分开吗?——是的,红色球在这里,白色球在那里。——(实验。)是这样吗?——不是。——下次呢?——球会回到原来的位置。"运动轨迹图展示出了完全的对称交叉互换。

这些反应表明,虽然个体不同,但我们慎重给出的大量案例都有不可否认的一致性。

首先是最初的预测,我们注意到大部分的实验对象在实验前只能简单预测出所有的球会回到各自原来的位置。4到5岁的某些实验对象的确会预测出混合,但是很勉强,而且他们觉得无论如何,球都"*应该在各自原来的位置*"(如孟所言)。最后,不管儿童能不能预测出小球的混合或者只能在一定程度上预测出小球的混合,但是在这两种情形下,他都知道当小球到达另一边时,某种颜色的球及其初始位置之间的关系或相同颜色球之间的关系。

在两色球的混合中,也即是实验对象在盒子首次倾斜后及每次倾斜后的预测中,值得注意的是儿童并没有预测到混合程度会逐渐增加。反之,他认为:(1)球的初始分布状态会被保持(或再现);(2)球会恢复到原始排列;或(3)甚至将球的混合最小化至规律的、有序过程,也即是红白两种颜色的球交叉互换,或者每次都会再替换一个球,以此

类推。当实验对象依夫说“*保持原样*”，尤其是“*不可能再混合了，因为已经非常混合了*”时，他反思了第一次预测时的态度。实验对象泰是第二类，混合开始后，他预测出：“*当我们继续倾斜盒子的时候，小球的混合程度会更小*。”第三类反应出现得最频繁，对于伊莱、费尔(“*白色球到那里，红色球到这里*”)，甚至是以相同话语做出相同预测的洛尔，他们都非常惊讶地看到球并没有按照颜色而分开，以至于他喊着“*再也不会分开了！是的，永远都不会分开了！*”再看维，他说在“*球各自回到原来的位置*”之前，每次倾斜盒子的时候，都会再有一个球被有规律地替换，也即是在所有球都回到原来的位置之前，有规律地交叉替换会反复出现。

然后，我们看到儿童不是否认了球的持续混合，就是认为球的持续混合太规律了，这仅仅是儿童避免概率概念的另一种方式。混合不是偶然的，就是瞬间的混乱——所有球趋于相互替代(参见孟、舒的泛灵论)，或者甚至是包含规律性地交叉替换，最后回到初始状态的反向交叉互换的过渡阶段。没有什么比这最后的信念更奇怪了，那么频繁、经常，那么明确：继续混合将“*恢复原样*”，亦如卡和其他实验对象所言。实际上，在这个年龄阶段——4岁到7岁，儿童仍然没有运算思维，因为不能想象可逆运算。例如，他认为图形改变形状之后就不再有与此前相同数量的元素，因为还不能理解单向变化是可逆的。尽管这个年龄的儿童承认元素可以在完全混合之后回到其初始位置，就好像分离是混合的逆向运算。但是，我们该如何解释这种显而易见的矛盾？

实际上，儿童不能理解随机混合的不可逆性与不能理解运算可逆性的原因是相同的：在这两种情况下，儿童都是在没有完全考虑到所有可能变化的情形下想当然地做出了预测判断。例如，在运算不可逆情况下，当6个筹码起初被紧密摆放，然后又被隔开时，儿童就会认为筹码的数量增加了，筹码摆放形状的改变形成了筹码的不同布局，包括筹码摆放的最初状态。但是，儿童认为每个单独的排列与形成排列的变化无关。也即是，他只是将新的排列视为此前排列的替代。因此，分隔开的筹码不再等同于紧密摆放的筹码，而是代表了一个新的数量更多的筹码组合；分隔开的筹码替代了原来的那个摆放紧密的筹码组合。相同的情形也出现在随机混合中，儿童也不能理解可能发生的变化。但是，当涉及连续状态的层级结构时，就出现了相反的结果，因为这并不是破坏了初始状态的派生状态，而实际上依然是下一个状态出现之前的初始状态。实际上，在儿童眼中，混合状态并没有形成类似于初始次序的真实状态。次序是特有的，混合或无序只是瞬间变化，如亚里士多德(Aristotle)所言是“违背自然”；儿童不认为球的连续位置是相对变化的同质结果。儿童给出的解释原因恰恰是他不认为这些变化是初始次序、多种混合状态的共同渊源。也即是，就像是包括排列的实际运算。如果这样想象这些变化，他就会明白：实际上，次序或排列的每次变化都形成了没有特有状态的可逆运算；因此，球的不同分布都是相对的，因为球的分布形成了所有同样可能的不同次序。而且，他也会明白如果这只是所有可能排列中仅有的一次意外排列，那么混合就是不可逆的；而且如果不排除其他过程，这种随机过程就会产生最可能的排列。那么，我们就

可以说这并不矛盾，因为儿童不能恰当地理解排列，他并不认为混合是不可逆的，而这也出于同样的原因（亦如我们在他处所见到的[1]）：儿童没有意识到简单的排列运算或次序本身本来是可逆的。实际上，如果他能领会次序运算，他就会预料到由8个白色球和8个红色球形成的大量的有序排列；继而，他也就会领会到混合是不可逆的，因为这不是特有次序，而是要取决于可能性情况。但是，因为儿童是根据层级状态而不是可能的排列（即可能性）来推理，他认为混合是某些元素因某种外部力量或需要而引发的意外排列而造成的，"*回到各自原来的位置*"（孟）或"*就像它们应该的那样*"（维）。因此，这种准泛灵论知觉与运算可逆无关。

简言之，这种被这个年龄段的儿童归因为随机混合的显而易见的可逆性与运算可逆性相悖。实验对象只有自己用排列可逆的方式理解了这个过程，他们最终才能领会混合不可逆的可能原因。

在这点上，没有什么比研究表征球的最大化混合状态或导致最大化混合状态的球的运动轨迹的图更有用了。注意：首先，在这个年龄段，这两种图没有必要一致，因为儿童通常不能清晰可视化球以什么样的路径从其初始有序状态到达最大化的混合状态。这本身就是有意义的，而且表明了形变的非运算性特点，也即是儿童不能理解排列的概念。其次，在这个年龄段，路径图只给出了两种可能模式，球不是以直线脱离其相对位置并以相同方式返回（有时即使在某种混合发生前的瞬间承认了这种混合可能性的实验对象身上也能观察到这种模式），就是左边所有的球到了右边，反之亦然（例如，费尔）。在后面这种情况中，儿童画出了对称且相对规律的路径，就好像没有什么东西阻挡球的运动；球之间既没有相互碰撞，也没有碰到盒壁。这两类图不仅明确地证实了儿童组合概念的缺失，而且也证实了儿童既不能理解可能排列，也不能理解随机性的概念。对于表征最大化混合的图而言，也同样揭示出，最大化混合总是只表现出了不同于初始次序的井然有序分布。例如，6个白色球在一边，3个白色球挨着3个红色球在另一边（伊莱）；或者是两种颜色的球完全交叉互换位置（费尔）等。

或许有人会说后面的这些图只表明了这个年龄段的儿童没有运算表征及想象力上的灵活性，也不能排除实验对象理解他们自己在实验中注意到的物理运动。但是，如果将这些图与这个年龄段儿童的所有反应进行对比，我们就会发现：所有图恰好表明儿童思维内部灵活性的缺失与儿童不能理解随机混合物理过程中的内在灵活性相伴。

第三节　第二阶段（7到11岁）：组合概念的开始[2]

大约七岁的时候，概率知觉与最初的具体运算、关联和可逆的建立同时出现。正确

---

① Jean Piaget and Bärbel Inhelder, *The Child's Conception of Space* (New York: Norton, 1967), chap. Ⅲ.

② 数学中的排列和组合。——译者注

率不断增加的持续混合的预测证实了这点。不过，初级次序运算（建立序列ABC的次序……，然后将其反转成CBA）远不足以构成所谓的排列的完整格式（第八章将会探讨）。因此，缺少这样的格式，儿童预测出的逐渐混合的细节就不能被充分分析。尤其是，绘图不能总是给出球运动路径的个别化表征。还有就是依然不是整体的交叉互换位置（尤其是在开始阶段的子阶段2A中），就是碰撞，且没有路径和被认为是最佳混合可能性的终点位置之间的明确对应性。

这是第一组实验对象（子阶段2A）的部分案例，这组实验对象在预测了一次混合之后，有时候以球交叉互换位置或全部返回至起始点而结束了球的混合实验。

查(6;6)　我们首先给了他6个球(3个红色球在右边，3个白色球在左边)：“*这些球会混合起来，因为不能保持原样。在球到对面的过程中，球会滚来滚去。*——你认为球会以什么方式混合起来？——*我不准确知道。*——(我们做了实验：1个红色球到了左边，1个白色球到了右边。)——*混合了，我说过的。*——如果我们再做一次呢？——*接着混合。*——混合程度会更大吗？——*不知道。*——(实验以左边2个红色球相互挨着，右边2个白色球没有相互挨着结束。)——*噢，是的。*——还能更混合吗？——*不能了，已经是最大化的混合了。*——如果我们再做一次呢？——*还会变化，因为球不可能停留在原来的位置。*——球知道它们要去往何处吗？——*噢，不知道。*——你知道吗？——*也不知道。*——我知道吗？——*你比我年长，或许你会知道。*——如果我们放入更多的球，会更混合吗？——*是的，更混合，因为盒子不那么空了。*——好，这里有6个白色球，6个红色球。把它们排列成混合后最可能出现的样子。——*可能每边都是一样的。*——(他每边摆放了3个红色球、3个白色球，相同颜色的球紧挨着。)——现在，如果我们倾斜盒子几次，是否会更混合？——*或许，也可能不会更混合。*——如果我们倾斜盒子很多次，球是不是就分开了？——*不是，这种情况可能会出现一次，但是不会出现很多次。如果我们倾斜盒子很多次，这种概率就会更小。*”最可能的混合图表明：在盒子的两侧，2个红色球最终替代了2个白色球，等。但是，查没有理解运动轨迹是如何让这种结果出现的。

弗朗(7;8)　“*球会怎样回来？*——*这要看情况了。有些球会回到原来的位置，有些不会。*——那会怎样？——*会混合起来。或许1个红色球会取代白色球的位置，或者甚至是2个。*——(实验)发生什么了？——*球不在原来的位置了。*——如果我们继续呢？——*或许球会回到原来的位置，也可能混合起来。*——最可能是什么？——*混合起来。不太可能回到原来的位置。*——为什么不太可能？——*因为当球到另一边时，就腾出空间了，而球不容易直直地滚动。*——第三次倾斜盒子呢？——*更混合。*——第四次倾斜呢？——*非此即彼，会更混合。*——第五次倾斜呢？——*或许更多，也可能更少，更或者相同。后来就不会混合了。*——如果继

续呢？——*几乎都回到原来的位置*。"引发最大程度混合的路径图：所有的红色球到了白色球那边，反之亦然。

杜姆(7;11)　以预测开始。"*所有的红色球到另一边，所有的白色球到这边*。——下次运动之后呢？——*或许会回到原来的位置*。"但是第一次实验之后，他预测了继续混合。然后，我们让他画出了最大程度的混合。他画的是每边1个红色球取代了1个白色球，等。但是，在导致这种替代类型的路径图中，他画出了所有球的完全交叉互换位置："这会产生那个(替代类型)吗？——*不能*。"然后，他想出了两种模型间的折中方案。

阿尔(8;2)　预测的是"*稍稍混合*"。"以什么样的方式混合？——*1个红色球在右边，1个白色球在左边*。——为什么？——*因为每边都发生了相同的事情*。——(我们做了实验，他预测的结果发生了)在我们实验之前，你就确定了？——*不确定*。——那我能确定吗？——*也不能确定*。——我们可以提前知道吗？——*不能。因为下次会以另一种方式混合*。——再做一次呢？——*更混合。球可以滚到任何它想去的地方*。——混合程度更小吗？——*是的*。——混合程度更大还是更小？哪个最可能？——*混合程度更大*。——为什么？——*因为之前已经混合了。我不确定，但是我是这样认为的*。——我们继续长时间混合呢？——*最后会回到原来的位置*。——*为什么？*——*球会以任何方式混合。然后会一起回到原来的位置*。——为什么……如果我们把50个白色球和50个红色球混合一段时间，结果会怎样？结束的时候是不是球都分开了？——*是的*。——100个白色球和100个红色球呢？也会分开吗？——*是的*。——为什么？——*因为如果这个球可以回到原来的位置，那么其他的球也可以*。——如果我们有50个红色球、50个白色球，或者每种颜色的8个球，哪种情况的结果会最快出来？——*数量多的*。"最大化混合可能图展示出了精确的颜色替换。

布鲁(9;3)　"球会怎样回来？——*混合起来*。——以什么方式？——*1个红色球在白色球中间，1个白色球在红色球中间*。——确定吗？——*不确定。因为是概率。我们永远不知道会是怎样的*。——混合还是不混合的概率更大？——*混合*。——(实验：2个红色球在白色球中，3个白色球在红色球中)现在混合程度更大还是更小？——*稍微大一些*。——为什么？——*已经混合了。到那里(盒子的另一边)已经混合得多一些了*。——把最大化的混合状态画下来(他随意地混合了不同颜色的球)。——这是最可能的混合吗？——*不是*(他精确地画出了颜色的更迭)。——现在，如果我再做一次呢？——(我们再次移动了混合程度增加的盒子)——*混合程度变小了，因为有些红色球可能会到那里(融入白色球中)，有些白色球会到那里(融入红色球中)*。——为什么？——*它们可能必须去那里，因为球之间的空间不多了*(由此，交叉互换位置被视为由持续混合产生的轻度混合)。——如果继续倾斜盒子的时间长一些呢？——*球会回来，因为球会逐渐回到原来的位*

置。——怎样才能不混合？——*因为有些球到那里了，那里的球就会多一些*(表明红色球和白色球在呈现出来的交叉互换位置之后各自回到了原来的位置)。”

阿特(9;10)　像之前的实验对象那样认为会继续混合，“*因为已经有些混合了，还可以更混合*。——如果我继续倾斜盒子呢？——*更混合*。——如果我们一直倾斜盒子直到傍晚呢？——*更混合，完全混合起来*。——现在，把产生最大化混合的可能路径画给我(他画了完全对称的交叉运动轨迹)。——这就是你所说的最大化的可能混合吗？——*是的，噢，不是的*。——把最大化的可能混合画给我(他画了新的交叉运动轨迹)。——但是，这是一样的。——*不，其他的，球会更混合*。——画张图表示球会在哪儿遵循那些路径(他画出了近似的替代类型)。——现在，画张图告诉我球会沿哪条路径到达那里(他再次画了交叉的运动轨迹)。——如果球沿着那条路径，是否最终会出现你画的(替代类型)？——*是的*。——真的吗？——*噢，不。红色球会进到白色球的空间里，白色球在红色球先前的位置上*。——好的，再次开始。你要画出球会沿着哪条路径到达你图中标明的位置(他再次画了交叉的运动轨迹)。——你确定这会形成你画出来的设计吗？——*不确定*。”

第二组年龄稍微大一些的儿童(子阶段2B)已经抛弃了整体返回的想法，也不画几乎唯一的交叉运动轨迹，而是尝试表示球如何相互撞击。但是，他们还不能表示出运动轨迹和球所处最终位置之间的精确对应性。

瑞克(8;5)　预测出了继续混合。“如果我把盒子倾斜10次或20次，哪种情况下球会更混合？——*倾斜20次，因为会有很多球腾出空间，然后到另一边*。”不过，他发现画运动轨迹很困难：“*噢，这不简单。我必须好好想想*。”尽管他这样做了，开始的时候画出了运动轨迹的碰撞，但是他对此并不满意。他接着画了球的位置，并以颜色的非规律性替代之前的交叉互换位置。他认为全部球返回至其初始位置是有可能的，但是仅仅是一种意外：“*当然，不过我们可能必须倾斜盒子很多次，因为不这样就很难出现那种情况*。”

玛(9;11)　“*稍微混合*。——(实验。)——是的，之后会更多吗？——*都混合了*。——以什么样的方式混合？——*3个红色球混合到白色球中，5个白色球混合到红色球中*。——如果我继续倾斜盒子呢？——*或许会更混合*。——为什么？——*没有空间了，球只能相互碰撞，然后到其他地方去*。——第四次倾斜呢？——*更混合*。——为什么？——*没有空间了，球只能相互碰撞，然后到另一个地方去*。——第五次倾斜呢？——*或许会完全混合，所有的红色球到了那里，所有的白色球在这里*(交叉互换位置)。——如果我们长时间继续倾斜盒子呢？——*球可能会回到原来的位置*。——需要倾斜多少次盒子呢？——*我不知道，或许50次吧*。——最可能是什么？——*所有球的位置都变了，你不能说它们都在原来的位

置上。*最可能就是它们不会回到原来的位置。*"现在,图表示出了颜色的无规律更迭,运动轨迹表示出了红色球和白色球的混合:"*我应该已经做了些什么了。球不会以这样的方式混合。我不能让球回到我想的那样,白色球回到它们原来的位置,红色球也回到了它们原来的位置。*——好,现在把球画得都混合起来。——*1个白色球替代了红色球……(以类似完全的交叉互换位置结束)。*——像那样吗?——*不,在另一幅图中,我们让一些白色球到了红色球当中,一些红色球到了白色球当中,一些白色球到了盒子的其他部位。*"最后的图是正确的,但是不能被视为仅仅是在两次错误方法之后形成的。

这是根据两个子阶段2A和2B进行分类的第二组实验对象的主要反应。与第一阶段相比,这些实验对象的主要特点是相信真实的持续混合,而不仅仅是明显的递减混合。甚至,从子阶段2B的年龄开始,运动轨迹图就展现出了路径的个别化、碰撞,而不再仅仅是无碰撞的、同色球的整体替代。换言之,从子阶段2A就开始了随机性的概念以及子阶段2B中概念的持续细化。因此,阶段2标志着概率概念形成于第一次基本的混合形式中。在子阶段2A中,儿童依然钟情于完全交叉互换位置的想法,甚至经常是所有球都回归起始位置的想法。这些态度是第一阶段的延续,在没有表现出个别化状态的运动轨迹的图中依然可见。但是,儿童不再将球的全部交叉互换或返回到原来的位置视为不包括继续混合或补偿、指向继续混合。从现在开始,儿童尽可能地给出了这些解释,或者把这些解释当作混合的最后结果。这是子阶段2A开始之时最可能的结果,后续阶段会越来越少。在子阶段2B中,如果是异常波动,小球回归初始位置就被认为是很简单的了。

首先,我们必须强调对混合本身的理解,就像查、弗朗、杜姆、阿尔及其他实验对象所表述的那样。在这点上,坚称混合的可能分布是多样性的阿尔("*仍然可以以完全不同的方式混合*")和强调明确预测的不可能性的布鲁("*因为是概率,我们永远不知道会是怎样的。*")(很像阿尔)给出了两次至关重要的表述。这非常不同于阶段1中的实验对象,对于阶段1中的实验对象而言,有序与无序(后者形成了前者的瞬间更迭)是不存在的。阶段2A中的儿童认可随机性是现实的积极部分,因为他们能够预测出球运动中的大量可能性分布,而且认为所有的可能性就是或者等同于不具任何特殊意义的初始状态。因此,预测变化细节的不可能性就只能归因于概率(注意,这个词出现在8到9岁,而这个概念在阶段1中还未被理解)。但是,对这些实验对象而言,如果随机性排除了球分布中每个变化的预测,那么预测确实需要判断与混合的递增性相关的所有可能性。阿尔明确阐述了继续混合的原理:"*因为已经稍稍混合了……过不久就会更加混合。*"甚至"*总是更混合*"。在子阶段2B中,这就更加显而易见了。

现在,子阶段2A中的儿童可以很好地预测出球继续随机混合的事实了,他甚至会总结出球的继续混合会以完全交叉互换位置及最后所有球都回归初始次序而结束。情

形差异清晰地表明这已经不是我们在阶段1中所看到的相同信念了，细微差异已经表现出来了：在阶段1中，交叉互换位置和返回原来的位置展示出了趋于与意外混合相反的次序；在子阶段2A中，是相同的原因控制了混合，并最终导致了球完全交叉互换位置，然后回到原来的位置。查、弗朗、阿尔(*“球以所有类型的方式混合，然后都回到原来的位置”*)清晰阐述了这点，尤其是布鲁：*“球会慢慢地一点一点地分开来……因为穿过那里*(与初始位置反向)，*那里就会总是多一些*(过来然后又过去，就相当于跟原来一样)。”

在此，我们看到了子阶段2A所取得进步的局限性。在这个阶段，混合被认为是一种积极事实，不再是像阶段1那样的一种违背自然的状态，而是自主、自然恢复次序中的瞬间中断。不过，儿童还只是接受了这点，但并没有理解。要理解这点，儿童就必须将其同化为不仅是确保初级次序可逆性的(将ABC变为CBA等)具体运算，而且是排列的有效格式，就像我们将会在第八章(11到12岁)看到的那样。此外，实验对象可能必须要领会排列包含的无向性特点，也即是：运动及产生相互作用的过程中发生相遇和碰撞导致混合的偶然性。现在，由于没有意识到这些情况，实验对象仍然将混合视作由球从盒子的这边运动到那边的简单过程引发。混合程度越大，混合到白色球中的红色球就越多，反之亦然。显然，混合趋向完全交叉互换，不明显的是完全交叉互换的合理下一步就是返回至始发点，也即是：反向的新交叉互换，并由此取消了第一次交叉互换。儿童认为球返回到原位，仅仅是因为球偶然碰撞后恢复至初始状态，我们据此拒绝接受阶段1中运算可逆的看法。因为儿童所说的返回仅仅是偶然混合之后恢复至原始状态，子阶段2A中的实验对象所提及的球完全返回至原位就是我们所说的可逆性的优秀案例。因为这实际上是两次交叉互换，也即是导致相同运算的直接运算的逆转。不过，这是个很简单的运算，也正是其错误所在之处。其实，儿童根据整体的简单分布进行推理，为了清晰判断，他可能必须要借助于各元素自身间的多次排列。

这种错误的原因相对明显，与使实验对象在被问及这种运算(参见第八章)时没有意识到排列体系的缘由相同，也即是：源于根据同时发生的几个排列来自主做出推断的困难。在混合案例中，这种困难以其最简单、最幼稚的形式出现：儿童想象每个球的位置，就好像其他球在运动中仍然保持静止一样。更准确地说，他开始思考两种球中的一种球(红色球或白色球)的瞬间运动，但是他没有记住：当一种颜色的球运动时，另一种颜色的球也已经离开了原来的位置，以及球在运动过程中还会相互碰撞。这就是为什么没有个别化的运动(我们此前注意到的这个阶段特点的缺失)或单个元素间的排列。所有的红色球逐渐运动到白色球中，就好像没什么阻碍一样；相应地，所有的白色球逐渐运动到了红色球中，就好像后者之前已经在其位置上了似的。对于所有球而言，就像它们一直在等着到另一个位置上似的。因此，运动轨迹并不是独立或相互作用的，只是球以类别(红色或白色)运动，即使是持续运动(一个红色球，然后另一个红色球……)。

最后，我们应该注意：当子阶段2A中的某些实验对象根据球的最后位置而非运动

路径来做出判断之时，他们早晚会发现最随机混合不同于简单的交叉互换。他们认为这是小球的颜色出现了一定程度的有规律或不规律的相互替代。但是，当他们试图解释这是如何发生的时候，就退回到此前的假设上了。

这就将我们带到了子阶段2B，这是子阶段2A的不断延续。此阶段中的新东西是儿童开始详细领会排列：球*"开始逐渐混合"*，玛说，*"两种球都运动起来，都要到另一个地方去。"*从此，实验对象拒绝认为交叉互换是不可避免的，尤其拒绝球返回至初始位置，尽管他们认为返回是有可能的，但是可能性不大(*"这是很难发生的"*——瑞克)。预测中显著进步的标志尤其出现在最可能混合图中。总之，该图表现出了颜色的无规律更迭。但是，有趣的是(精确表明上一阶段延续性的)子阶段2B中的儿童并没有成功绘制出球的运动轨迹碰撞图及位置图。有时候，第一子阶段领先于第二子阶段，通常是相反的：玛更是表征这些困难的清晰案例。

球的混合位置图和路径图之间的不一致性证实了我们以最精确方式所提及的困难，即阶段2的实验对象在构想几个不同、同时排列体系方面存在的困难。实际上，路径混合包含了不止一个混合结束的静态知觉，还隐含着偶然排列，也即是：同时再现几个不同运动路径(每个球都沿着自己的路径运动)和关联性(碰撞使其相互作用)。现在，儿童很清楚碰撞的事实及其对混合的作用，但是还不能将它们整合起来。他知道有排列，而且把最后的位置画成了排列的结果，但是仍然画出了运动轨迹，就好像每个球根据整组球的规则运动而运动(图3)。

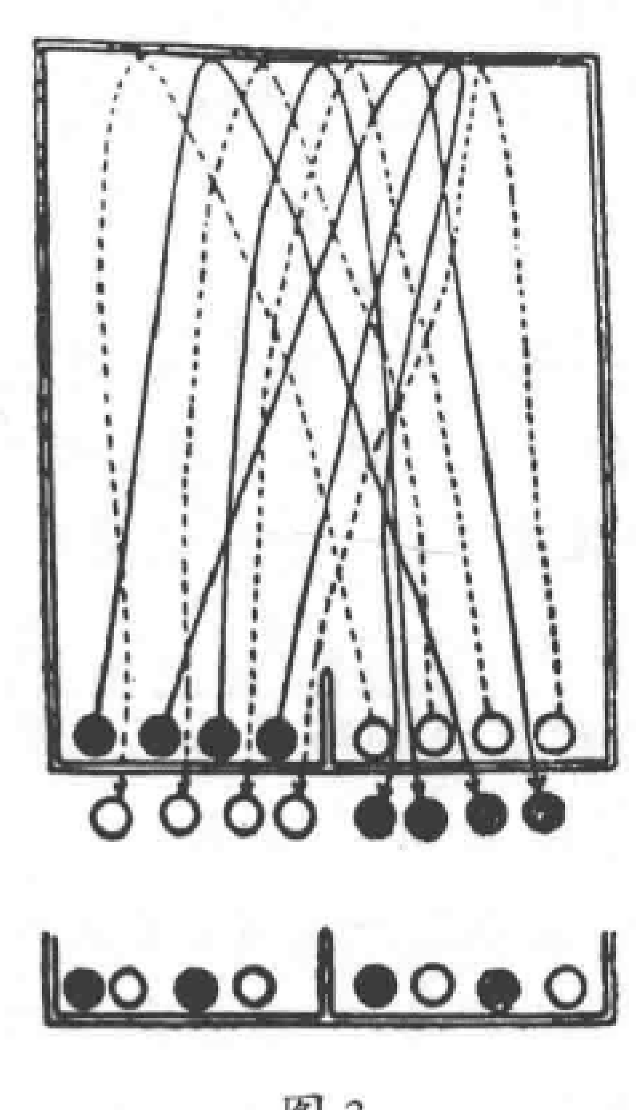


图3

这种持续至10到11岁的困难形成了具体运算和形式运算相互对立的首要方面。我们这本书经常关注这种对立。要理解左边的球并不会在右边的球运动之前就到达右边，反之亦然(也即是，要理解两种运动的相互依赖性)。这意味着儿童必须要思考既不同又相互依赖的两个体系之间的相关性。毫无疑问，这是形式思考的合理性。这里有

个明显的小事实，这个事实在一定程度上与我们在下文将要看到的内容紧密相关。

但是，这个事实没什么好奇怪的，即阶段2中的儿童在非常理解小集合中数字的作用之时还不能明白大数字法则。实际上，我们将会看到大数字法则也需要运用形式思考。我们的实验对象查认为增加盒子中的球“*会更混合，因为盒子的空间变小了。*”但是，如果我们多倾斜盒子几次，结果就是“*或许更混合，或者更不混合*”。盒子仅仅运动几次之后，球有可能返回至初始位置，但是“*如果我们多次倾斜盒子，发生概率就会更小。*”阿尔以同样的方式猜测出，分离对于50个球、100个球和几个球而言是相同的，“*因为如果球回到这里，相同的事就可以与其他事一起发生了*”。50个球比8个球更有可能快速分开，因为“*球更多一些*”。可是，在小数字情况下，儿童会很好地理解混合程度会随着盒子的运动次数而增加：根据瑞克的观点，20次后的混合比10次后的混合更好，因为“*更多的球让出了地方，然后到了另一边*”。因此，我们就有了小的大数字法则。不过，这并不能被推广至真正的大数字，因为缺少了形式组合。

第四节　第三阶段(11到12岁)：排列与运动轨迹的相互作用

因此，只有在11或12岁的时候，当形式运算首次出现时，儿童才能理解随机混合过程。因为在这个年龄，儿童才能把观察到的事实同化进基于排列机制的运算格式。首先，让我们看几个案例。

斯通(11;1)　“*会稍微混合。*——如果我多倾斜几次呢？——*更混合。*——接着倾斜呢？——*仍然更混合。*——如果长时间倾斜盒子呢？——*也还是更混合。如果你有足够的耐心，就会恢复原状。*——恢复原状的概率很高吗？——*不，没有的。*——1次，还是1次也没有？——*1次。*——需要倾斜多少次？——*1000次。*”最大化混合图展现出了颜色的更迭和路径的完全交叉。

罗斯(12;0)　“*我确定球会混合起来。*——如果继续倾斜呢？——*更混合。*——球能回到原来的位置吗？——*噢，不能回到原来的位置。*——红色球在这里，白色球在那里？——*噢，不是的，球会相互碰撞的。*——如果一直继续倾斜盒子直到傍晚呢？——*更混合。*”图：运动轨迹相互碰撞，运动轨迹与位置更迭两者之间是对应的。

珍(13;6)　相同的反应。“如果我们多次倾斜盒子，你认为球会回到原来的位置吗？——*噢，不，我确定不会的，而且永远不会发生这种情况。*——如果倾斜1000次呢？——*或许吧。1000次里可能会有1次出现吧。*——10次呢？——*不可*

能的。如果只倾斜10次，球就不可能回到原来的位置。——你确定，还是你只是这样想的？——不确定，但这是几乎不可能的。”

瓦尔(13;10)　*相同的初始反应。“不同颜色的球会分开吗？——不，我不这样认为。——如果多次倾斜盒子呢？——不会。——倾斜50次呢？——还是不会。——如果每种颜色的球只有4个，那么球会不会分开？——会的，这有可能发生。——如果是每种颜色有5个球呢？——可能要用一段时间才能分开。——每种颜色6个球呢？——我不认为会这样。——如果我倾斜盒子2000次呢？——或许吧，不过很难。——如果每种颜色有8个球呢？——球已经太多了。有可能有些球会到另一边去。——如果倾斜盒子1000次呢？——很难会出现这种情况的。”*

图：Z字形运动轨迹，但是有与最后更迭位置相对应的碰撞和相互作用。

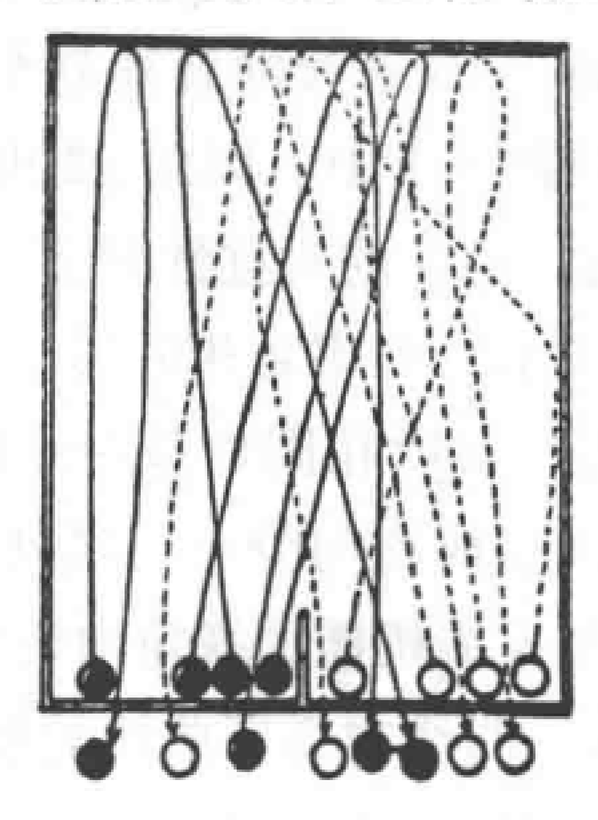


图4

我们在阶段2看到了所取得的进步。从此之后，实验对象就会理解被他同化进各种排列体系的球的碰撞，他的图现在已经展现出了路径和随机混合最后位置之间的精确对应(图4)。重要的是，他明白了大数字法则：如果我们增加倾斜盒子的次数(或减少球的数量)，一切都是有可能的，但是返回至出发点是几乎不可能的。[①]我们在一定程度上排除了罕见案例，保持常见近似值比例，混合就成了不可逆的了。

阶段3中的部分发现形成了理解问题，也即是思维机制落后于排列运算的发现及大数字法则。考虑到这种现象出现的年龄，我们立刻就看到了：这就是形式运算的问题。但是，为什么会以这样的方式出现呢？形式运算的行为模式是什么？在后续章节中，我们将会进一步了解这些问题。

---

① 我们知道对10个红色球和10个白色球而言，可能平均在184 756次运动中才有1次球回到等同于初始位置状态的机会，也即是，颜色的分离(每个颜色组内的内部次序)。实验中使用20个球，所有球恢复原位的可能性是1/184 756。参见盖伊(Guye, E.)的《物理-化学演变》(*Physico-Chemical Evolution*)(New York: Duton, 1925)41页(是10个白色谷粒和10个黑色谷粒混合成粉灰的问题，我们当前的实验思路就源于这个问题)。

第二章　中心性分布(常规曲线)和均匀分布①

随机混合产生的问题就是分布形式的问题,因为混合中元素的最后位置,引发到达这些位置的轨迹必然呈现出整体的某种分布形式。例如,从漏斗上的小洞漏出来或者用手撒在路上的沙粒会形成以“小山丘”为中心的分布(顶点类似于漏斗的开口处),或者是随路面的变化而变化的均匀分布。如果概率概念的形成取决于随机混合知觉,正如我们刚刚在第一章中所看到的:形成混合的意外分布迟早都会产生于与这种分布的整体形式相关的可能性的学科问题思维中。因此,要理解中心性分布的机制就是一个要抓住从漏斗中漏出的沙粒的可能路径的对称性问题。所有的沙粒都会有规律地堆积起来,因为每个沙粒掉落到前后左右的概率是相同的。同样,当实验对象意识到每平方米或分米的表面区域以相同的概率接收相同数量的沙粒的时候,他们就会把路面上沙粒的分布或平瓦表面上的雨滴理解成均匀分布。这就是中心性分布和均匀分布的问题。在此,我们将从实验对象心智发展机能的视角来研究这两个问题。

中心性分布相当于被称为常规曲线或高斯曲线的数学钟形图。为了使初学者明白这种曲线的重要性,我们经常使用教具,这种教具是由带有梅花形排列钉子的木质斜面做成的(5个钉子。其中,1个在斜面的中间,其他4个分布在4个角上)。一定数量的球沿着平面滚落,落到漏斗里。这个漏斗的开口处刚好对应着斜面较高部分的中心位置。球是随机分布的,最后都滚到了斜面底部的窄缝里。大部分球掉落到了中间的缺口处,仅有少量的球到了端点位置。这几列球形成了钟形分布。每列球沿着顶部滚落的轨迹形成了规则程度不同的经验性高斯曲线。

我们使用了类似的但简化的装置来研究实验对象对中心性分布的理解。这种方法的优势就在于可以给出对称性的分析,这对问题的解决而言非常必要,而且只使用两个维度来替代三个维度也更常见(沙堆等)。这种方法的缺陷就是斜面的复杂因素会对球造成影响。相对于处于盒子低端部分的中间位置上的漏斗和盒子低端部分的中间位置,斜面是最陡峭的。但是,这个只有在后期才能被理解的物理因素,其答案的基本要点,与本书中其他章节所描述的反应的规律性,在解释概率概念方面的地位并不相同。②

对于均匀分布,我们对一种非常简单的机制很满意,这种简单机制可以限制雨滴掉落到方形板面上:不太容易滚动的小玻璃珠,从格架上掉落到分隔成方形的纸张上。我

① With the collaboration of Myriam Van Remoortel。

② 相比而言,不是很重要。——译者注

们会问儿童随掉落的玻璃球数量变化而发生的均匀分布的概率。

如果随机混合知觉正如我们在第一章所探讨的那样，是逐步发展的，那么本章要研究的这两个问题的重要性就是：实验对象是否能够更好地将整体分布理解成随着由普通的原始中心发散形成的对称位移而变化，还是随着均匀分布而变化？对这两个问题的分析能够促进我们沿着大数字作用的方向来推进概率概念形成的研究。

第一节　中心性分布：实验与结果

我们使用了5个没有盖子的盒子，这些盒子要一次性地展示给所有实验对象。前4个盒子在斜面顶端部分的中间位置有类似漏斗的开口，而第五个盒子的开口在盒子的右侧（图5）。

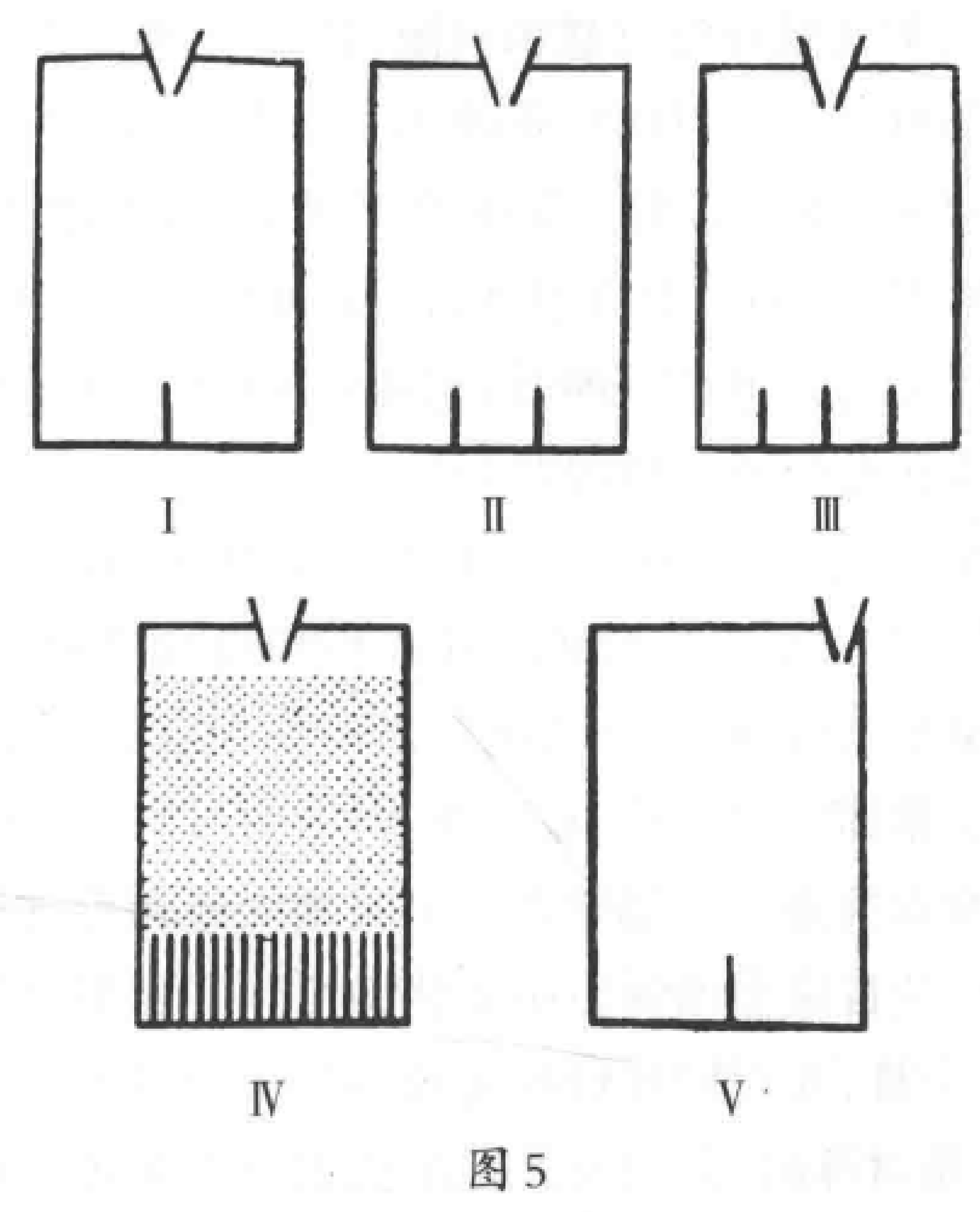


图5

儿童首先看到的是盒子Ⅰ，这个盒子的底端有将其分成相同大小两部分的隔板。我们将一个球放到漏斗中，然后是第二个，以此类推，每次放球时都问儿童这个球会到哪个位置，为什么会这样。一旦知道了这些预测及其动机，我们就说将会让这些球滚动起来（大概有60个相同大小的小圆金属球），让儿童详细解释小球的最终分布。然后，就跟儿童一起做了这个实验，并要求他解释结果。

接着，我们使用了盒子Ⅱ（大小相同的3个狭槽，其中1个在中间，正对着漏斗口），然后是盒子Ⅲ（4个相同大小的狭槽），重复相同的说明。然后，我们向他出示了一个较低部分有18个狭槽的、带有钉子（正如前面所解释的）的大盒子。这个盒子的编号为Ⅳ。我们用每个盒子来研究实验对象如何运用此前的观察。另外，在儿童解释完每次

实验之后,我们就会仔细问,如果我们重复实验,是否会获得对称的、峰值分布相同的排列。

当儿童理解了存在最大中心性频度(顶峰)的概念和侧缝对称性之后,这些不同问题就很充分了。但是,当这是一个与他一起分析这两类效应的问题的时候,某些额外的问题就能产生结果了。我们给了他盒子Ⅴ(与盒子Ⅰ一样有两个分隔区,只是漏斗口位于第二分隔区上方的右部),我们让他预测并解释因盒子的不对称性而导致的新分布。最后,我们在儿童不知情的情况下向左或向右倾斜从Ⅰ到Ⅳ中的一个盒子。这就形成了倾斜的曲线,然后我们让实验对象对此做出解释。

这些问题的反应遵循了相当于第一章所描述的三个主要阶段,值得一提的是:这个仪器可以使我们研究实验对象如何从盒子Ⅰ到Ⅳ归纳出或迁移他们对可能性的判断。

第一个阶段(到7岁左右)的特点是整体分布的缺失及从盒子Ⅰ到Ⅲ,或Ⅰ、Ⅲ和Ⅳ归纳的缺失。盒子Ⅰ通常引出了有利于这个或那个狭槽的简单猜测,或补偿判断(例如,"每个球都会回来"),但儿童并没有意识到随着球数量的增加,球的分布会逐步趋于均衡。对于盒子Ⅱ,实验对象(通过补偿)预测出了三个狭槽相等的分布,或一个狭槽中的所有球(呈中心性或横向)堆积起来。对于盒子Ⅲ,儿童赌球会在其中一个中心狭槽堆积起来或球呈现出不规律分布。对于盒子Ⅳ,他通常希望是不规律甚至是不连续的分布。因此,既没有整体排列、(盒子Ⅰ的)均匀排列或(从盒子Ⅱ到盒子Ⅳ的)对称性排列,也没有所谓的从一种状态到另一种状态的归纳。

相反,第二阶段(中间状态,从7到11岁)的特点是实验对象开始理解他们归纳出来的整体分布。这尤其体现在实验对象预测出中心性频度和横向频度不等的事实中。但是,儿童依然没有充分量化这种分布,因为他们还不能理解大数字的作用。因为这个原因,即使实验对象明白了整体的对称性,也还是不能明白以中心性对称分布的狭槽的对等性。对于盒子Ⅰ,实验对象通常希望左右两个狭槽大致相等,但不是类似于小球数量上的均等。对于盒子Ⅱ,他肯定会预测出中间狭槽接到了最多的球,而且两边狭槽中小球的数量不同。对于盒子Ⅲ,儿童同样精确地预测出了中间的两个狭槽是优先位置,但是这两个狭槽之间并不是对等的,且与另外两个狭槽也不对等。对于盒子Ⅳ,实验对象不能预测出规律的对称性分布,但是我们开始看到早期实验在整体排列上的迁移。

最后,第三阶段(11到12岁)的特点是整体分布的量化,也即是预测到位置对称的狭槽会接到数量相同的小球。从盒子Ⅰ到Ⅲ,这点是非常明显的;盒子Ⅳ实验对象开始逐渐发现各个狭槽接到的球在数量上呈现出钟形曲线分布。但是,最显著的进步却是实验对象理解了规律分布中大数字的作用,且这种进步与前述量化有关。

第二节　第一阶段:整体分布的缺失

儿童在这个阶段的反应是能够在不协调整体的情况下预测出每个球的独立路径并想象出整组小球遵循的路径,就好像整组小球仅仅是一个或几个独立元素(这种反应与第一章阶段1中所界定的儿童不能个别化小球的运动轨迹之间并不冲突,因为这次出现的问题首先在于每个球是单独的)。

曼(4;10)　盒子Ⅰ:“球会到哪儿?——*可能是那里,或那里*(他指向了两个狭槽)。——(实验:R①)下一个呢?——*那里或那里*。——(实验:L)下一个呢?——*那里或那里*。——(实验:R)所有的球呢?——*不知道*。——有没有可能是这边或那边多?或者是相同的?——*可能是相同的*。*那里*(R)*会多一些*。——(实验:每边都是相同的)为什么每边都是相同的?——*我不知道*。”盒子Ⅱ:“球会到哪儿?——*那里或那里,或那里*。——下一个呢?”(相同的回答。)“整个盒子都装满吗?——*所有的小球都在那里*(M)。——你确定吗?——*或那里*(L),*或那里*(R)。——观察实验。(实验:左右两边狭槽接到的小球数量相同,中间狭槽比两边狭槽接到的球多一些。)为什么会这样?为什么中间的会多一些?——*因为……*”盒子Ⅲ:“*那里,或那里,或那里*。”曼不能在不同位置中做出选择,也不能够归纳出他从一个盒子到另一个盒子时所注意到的事实。

艾森(5;1)　盒子Ⅰ。单个小球:“*那里或那里*。”所有小球:“*其中一边会多一些*。——哪边?——*我们还不能知道,因为我们还没有把球放下来*。——会是怎样的?两边小球一样多还是不一样多?——*其中一边会多一些*。——可能吗?——*是的,因为有时候小球会像那样滚下来*(R)。——为什么?——*因为球很多*。——(我们滚下了半数的小球)你看,两边的数量是相同的。你惊讶了吗?——*没有,因为我们没有滚下所有的小球*。——如果我们把所有的小球都滚下来呢?——*右边会稍微多一些*。——(实验)你看,结果是一样的。为什么呢?——*因为我错了,球很多*。——观察这个盒子(盒子Ⅴ)。你看到了什么?——*开口在一边*。——球会到哪儿?——*这里*(*到右边,狭槽刚好在漏斗下方*)。——好的。现在,对于盒子Ⅰ,为什么每边狭槽中的小球的数量是相同的呢?——*不知道*。”

盒子Ⅱ:“如果我们把所有的小球都滚下去,会怎样呢?——*所有的小球都会到这里*(M),*因为这是中间*。——左边或右边的狭槽中会有小球吗?——*一个也没有*。——为什么?——*因为所有的小球都到中间了*。——(实验)对了吗?——

① 缩写:R——右边的狭槽;L——左边的狭槽;M——仅中间一个狭槽;MR——中间偏右的狭槽;ML——中间偏左的狭槽。

没有,两边狭槽中小球的数量是相同的。——为什么?——*因为小球会相互碰撞。*”

盒子Ⅲ:“*大部分小球都在这里*(MR),*少量的在那里*(ML),*更少的在那里*(L),*最少的在那里*(R)。”因此,艾森在没有归纳出他所注意到的盒子Ⅱ呈现出对称形式的情况下给出了不规律的数据。然而,出现了儿童认为靠近漏斗口的狭槽能接到最多的小球,而左右两边的狭槽能接到相同数量小球的迁移。“这里为什么会多一些(MR)?——*因为球会像这样滚下来*(他演示了一条从漏斗口到MR的路径)。”

盒子Ⅳ:他预测出漏斗下方的那个狭槽会接到数量最多的小球,而且其他狭槽接到的小球在数量上呈现出不规律的分布。

费尔(5;4) 盒子Ⅰ:“如果我滚落所有小球,它们会滚到哪儿?——*那里,还有那里。*——两边狭槽中小球的数量相同吗?——*我不这样认为,那里*(L)*不多,那里*(R)*很多。*——为什么右边多?——*如果小球滚下来,就会停在那里*(两个狭槽隔板的顶部),*然后滚落到那里*(R)*。一个会停下来,然后滚到那里*(L)。——(我们做了实验)——*啊!两边是一样的。*——你刚才是怎么说的?——*右边多一些。*——为什么两边一样了?——*因为它们都到了那里,还有那里。*——如果我们再开始做一次实验呢?——*我一点儿也不知道了。小球在我们说结果之前就滚落下来了。*”

盒子Ⅱ:“*很多会到那里*(M),*还有很多会到那里*(L),*还有的到那里*(R)。——三个狭槽中小球的数量一样吗?——(因此,他从盒子Ⅰ观察到的相等结果中做出了迁移。)——(我们做了实验)对吗?——*不对,这里*(M)*多一些,那里*(L)*少一些,还有那里*(R)。——为什么?——*因为洞口就在那里,然后小球就滚到那里了,其他小球会撞到盒壁,然后滚到那里*(L),*还有那里*(R)。——为什么那里(L)和那里(R)的小球的数量是相同的?——*不知道。*”

有18个狭槽的盒子Ⅳ:“*很多小球会到中间,还有的到这里*(L),*还有那里*(R)(于是,他保持了从盒子Ⅱ获取的狭槽内小球数量相同的初始预测)。——所有狭槽内小球的数量都相同吗?——*不是的,我不这样认为。这里、这里、这里都不多*(他指向了偶数号狭槽)。——为什么?——*钉子会把小球送到那里,还有那里*(他指向了奇数号狭槽)。——钉子不会把小球送到这里,还有这里(偶数号狭槽)吗?——*不会的。*——为什么?……”

盒子Ⅲ:“*这里*(MR)*很多,这里*(R)*不多,这里*(MR)*是满的,那里*(L)*没有。*——(我们用盒子Ⅳ做了实验)——你看,两边小球的数量是相同的(规则的钟形曲线)。现在,如果我用这个盒子(盒子Ⅲ)做相同的实验,结果会怎样呢?——*每个狭槽中小球的数量都不多。*——这里(盒子Ⅳ)是小球数量最多的位置吗?——*中间位置是最多的。*——那么,那里(盒子Ⅲ)是小球数量最多的

吗？——不是。——盒子Ⅳ也会是这样的吗？——我不知道了。"(我们再次拿出了盒子Ⅱ，然后给他展示)小球会去哪儿？——到中间去。——那么换成盒子Ⅲ呢？——大部分在这里(ML)，因为这个小洞刚好对着漏斗口，这里(L)不多，这里(R)更少，那里(MR)多一些。可能那里(ML)少一些，那里(MR)多一些，因为洞刚好从这里穿过。"

莫尔(5;6)　盒子Ⅰ(用单个小球测试之后)："现在，所有的小球都去哪儿了？——那里，或那里，更多的在这里(R)。——(实验)——啊！不。两边是一样的。"

盒子Ⅱ："中间多一些。——为什么？——因为……——两边呢？——少一些。——两边一样吗？——不，这里(R)多一些。——(实验)——不，居然是相同的(R和L)！"

盒子Ⅲ："这里(MR)多一些。那里(L)、那里(ML)、那里(R)少一些。"

盒子Ⅳ：随意地回答。

冈(6;3)　盒子Ⅰ："第一个球会到哪儿？——那里或那里。——(实验，R)下一个呢？——这里(L)，因为那里(R)已经有1个了。——(实验，R)下一个呢？——还在右边，因为刚才我错了，而且如果我错了，这就意味着小球总会跑到那里(R)的。——(实验，L)下一个呢？——到左边，因为那里(R)已经有2个了，不能再到右边了。——(实验，L)下一个呢？——到右边，这样那里就有3个了，之后，那里也有3个了。——"(实验，L)如果我把所有小球都滚下去呢？——我不知道，到右边，因为……不，我不知道。到处都是。——其中的一边多一些？——是的，右边多；不，两边是相同的。因为，相同的小球滚下来了。——如果我做10次呢？——不一样，是的。"

盒子Ⅱ："如果我滚下一个球，这个球会到哪儿？——到中间去。——再滚1个呢？——到右边。——再滚1个呢？——到左边。——如果我把所有小球都滚下去呢？——到处都是。——每个狭槽中小球的数量相同吗？——是的。小球会到处滚，而且会像这样滚：中间的多，左边的少，右边的更少。——(实验)像你说的那样吗？——是的，中间多。——为什么？——不知道。"

盒子Ⅲ："这里(ML)最多，不是那里(MR)。——更多还是相同？——相同，因为是中间。——其他的呢？——右边比左边多一些。——如果我们再次全部开始一次，结果是相同还是不同？——相同，因为我们用的还是同样的盒子。——(实验)——啊！不。"

盒子Ⅳ(18个狭槽)："小球会到哪儿？——到处都是。——哪里小球的数量会最多呢？——这里(8,9,10)。——哪里最少？——那里(15,16)。"当我们让小球随着盒子轻轻倾斜到右边落下时，呈现出了非常清楚的不对称，冈丝毫没有看到这有什么不正常。相反，对于盒子V，他看到小球必须落到"右边多一些，因为正好在洞口下方"。

这就是从4岁到7岁这个阶段的特点。从考虑到所有小球组成的图案及考虑到接下来的每个实验的行为这个视角来看这些特点是最有趣的。

相反,从考虑单个运动轨迹的预测视角,我们只能注意到一些将会在后续章节(尤其是第三章)才能更多了解到对结果的态度。实验对象的推理是由预测结果相反的两个解释决定的:重复或补偿。实际上,在几个案例中,儿童已经从小球落到其中一个狭槽的现象中总结出了后面的小球也趋于滚落到那里。但是,在其他案例中,他的结论是小球会到另一边以达到平衡状态。例如,在冈已经看到一个球滚落到盒子Ⅰ中的右边后,他认为后面的小球会滚到左边,*"因为那里已经有1个了"*。但是,因为第二个小球也滚到了右边,冈喊着他错了,而且还说,*"这就意味着小球总会跑到那里"*。因此,我们在这个案例中就有了一个补偿预测和一个重复预测。我们将在第三章中尝试分析这种反应的动机。

但是,在让所有小球一起滚落的案例中,这个阶段的反应就是非常明显的了,而且确凿地表现出儿童依然无法在已经注意到整体分布的情况下做出预测及归纳。我们必须记住有2个狭槽的盒子Ⅰ只有一种可能,L=R(也就是,一半小球滚落到R狭槽,另一半滚落到L狭槽)。有3个狭槽的盒子Ⅱ可能是:M>L且M>R且L=R。最后,有4个狭槽的盒子Ⅲ可能是:ML=MR,L=R,ML(或MR)>L和R。因此,只有盒子Ⅰ是均匀分布的,而盒子Ⅱ和Ⅲ(及Ⅳ)都是以中间最大频度为中心的钟形曲线。现在,盒子Ⅰ或Ⅱ到Ⅳ是否有这样的问题:观察到反应的普遍特征是否就是这个阶段儿童还不能预测出整体的规则分布?在盒子Ⅰ狭槽中小球数量相同的案例中,儿童通常预测出的是2个狭槽中小球的数量不等;在盒子Ⅱ到Ⅳ狭槽中小球数量不等的案例中,儿童预测出的不是相等就是无目的的、非对称不等(撇开每个观察实验对后续预测影响的时刻)。

实际上,在盒子Ⅰ的案例中,我们提及的每个实验对象(排除犹豫的冈)都认为左右两边狭槽小球分布不等,而且试图猜测哪边占优势,而没有考虑其对称性。对于盒子Ⅱ,实验对象不是说所有的小球都会滚落到中间的狭槽(例如,艾森,或自我修正之前的曼),就是说3个狭槽中的小球数量是相同的(费尔),甚至说3个狭槽中小球的数量不等,而没有考虑到两边狭槽的对称性。同样的,儿童对盒子Ⅲ的预测是:所有的小球都滚落到了其中1个狭槽中(曼),中间2个狭槽中的1个狭槽中小球数量最多,边上2个狭槽中小球的数量也不对称(艾森和莫尔),(费尔)做出了相同的反应,但认为有1个狭槽是空的。最后,(跳过了后续阶段的)冈认为中间2个狭槽小球的数量是相等的,而边上2个狭槽小球的数量是不等的。盒子Ⅳ引出的反应是哪个会呈现出所有类型的分布,但不规则且不对称,甚至是不连续的;然而,儿童的反应趋向于预测出中间那个狭槽中的小球数量最多。

在这些预测上,我们要问到的第一个问题是小球数量最大的问题。毫无疑问,从初始阶段开始,儿童就考虑到了漏斗口的位置。开口在右边的盒子Ⅴ几乎产生了总是相对正确的答案。对于有2个以上狭槽、中间有漏斗的盒子Ⅱ到Ⅳ,最多的预测是中间区

域狭槽中的小球数量最多。不过,这是很自然的情况,因为没有理解到坡度的作用(这个阶段的儿童是永远不会提及这个的),实验对象毫无疑问地看到了从漏斗到中间狭槽的路径是最短的(相对于到边上狭槽的路径)。例如,对于盒子Ⅲ,艾森在选择了盒子Ⅱ的M狭槽之后说,小球“*会像这样滚动*”(演示了从漏斗到MR狭槽的直线路径),“*因为这个狭槽刚好就在中间。*”

那么,我们是否可以说中间狭槽小球数量最多的预测形成了正确的可能性感知,而且以这种方式否定了我们此前有关这个初始阶段缺少概率概念的假设?最短路径假设的预测与(某些组合的最大频度而非某些其他频度意义上的)概率概念或组合可能性无关,而是一个被最普通经验支持的简单因果问题。概率和可能性问题的开始表明:儿童必须明白当小球“*因为彼此相互碰撞*”而不能走最短路径时会去往哪里,正如艾森再次所说的,因为“*两边都有一些小球了*”。小球更可能到左边还是右边?或者到两边的概率是相同的?这就是真正的组合概率和偶然分布问题,我们认为这个问题可以简化成对称性的问题。

在研究实验对象给出第二个问题的答案时,我们发现了一个非常明显的事实。如果这个阶段的儿童理解了它,即从漏斗到外部狭槽的倾斜轨迹相反的直接路径,那么对称因素没有出现在儿童做预测的过程中就会非常引人注目了。儿童不仅没有预测出盒子Ⅰ的两个狭槽之间是对等的,而且也没有预测出盒子Ⅱ外面左右狭槽两边之间是对等的(除非当他预测出所有狭槽接收到了相同数量的小球时)。盒子Ⅲ的情形甚至更奇怪:即使儿童预测到了大部分球滚落到了中间的狭槽,但也不会预测出中间2个狭槽之间、边上2个狭槽之间是对等的。最后,盒子Ⅳ的预测没有表现出对称性方面的预测。对称性的广泛缺失告诉我们:这个阶段的实验对象在想象整体分布方面存在困难。我们立即就能明白这个原因:要理解小球的分布体系,就有必要意识到当小球从漏斗中沿着中间狭槽方向的直线滚落时,每个小球因遇到障碍不能落到中间狭槽而滚到这边或那边的概率是相同的。现在,在我们观察艾森,尤其是费尔在给出滚落到一侧(或当小球撞击到中间狭槽的隔壁之时)的小球运动轨迹的反应时,我们注意到:实验对象甚至都没有想到会出现不同的可能组合。他们没有理解小球滚落到左右两边的可能性相同,而是选择了小球只能滚落到其中的一边。简言之,正像我们在第一章中所看到的混合那样,因为儿童缺少组合结构的概念,在这个阶段也就无法理解概率。因此,儿童也就不会怀疑对称分布的可能。

但是,除此之外,观察产生的第三个问题就是从一个实验到另一个实验的归纳。实际上,不管实验对象的预测是什么,这都是向儿童给出了通过实验来控制预测的办法,而这种办法通常都立即向儿童呈现出了中间区域的对称或中心性分布。因此,儿童已经有了通过理解错误的原因来修正预测的方法,或至少是考虑用他所看到的事实来作为后期预测参照的方法。一个有趣的事实就是:在这个阶段,儿童还不能基于对称分布而自主归纳,这就充分证明即使儿童注意到了对称,但他们还是不能理解。不过,这并

不意味着还没有归纳,或者是否有迁移或替换。但是,当我们观察迁移或替换时,儿童并没有关注这样的对称,这就是我们需要强调的事实。

曼,也就是最初引用的案例,我们从他身上还丝毫看不出归纳:在看到盒子Ⅱ中3个狭槽中小球的分布之后,他还是相信小球会滚落到盒子Ⅲ中的一个狭槽之中。艾森,盒子Ⅰ的实验不会影响其对盒子Ⅱ的预测;另一方面,从盒子Ⅱ到盒子Ⅲ,儿童已经开始意识到中间狭槽的作用,以及所有狭槽中都会有小球,但是没有与对称相关的迁移。费尔观察到盒子Ⅰ的对等性可能有助于其对盒子Ⅱ对等性的预测。从盒子Ⅱ到盒子Ⅳ,然后从盒子Ⅳ到盒子Ⅲ,再从盒子Ⅲ到盒子Ⅳ,我们注意到儿童已经意识到中心狭槽的作用了;但是,依然与对称性无关(尽管如此,我们还是让他在盒子Ⅳ上做了标识)。莫尔也没有做出归纳。冈对盒子Ⅰ的2个狭槽做出了正确的预测,但是他也没有推断出盒子Ⅱ的对称性,盒子Ⅲ中间2个狭槽对称性的(与下阶段重叠)预测也没能引导其预测出边上2个狭槽也是对称的。

总之,实验对象既不能预测出对称性,也不能在后续实验中归纳出或注意到对称性。从关注概率或可能性观点的视角出发,我们再次获得了一组非常有价值的结果。在第一章所描述的实验中,我们看到阶段Ⅰ的实验对象仍不能个别化小球在混合过程中的路径,也不能将这种混合理解为一种整体的调整过程,也就是两组混合元素的对称性运动。现在,我们已经确定:因为实验对象恰好不能理解不同组合决定了混合中球的个别化路径,他们因此也就不能理解实验中对称组合的整体分布。这两个结果乍看起来相互矛盾,但是两者在现实中却是有关联的,因为这两者都取决于这个阶段相同特点的心智障碍:将可能的运动轨迹与因小球的相互碰撞导致的交叉互换及相互作用组合在一起的格式的缺失。因此,组合过程中个别小球的运动轨迹图及整体分布图都是必要的,实验对象无法理解小球之间的相互依赖性表明,阶段1中,他们还没有任何可能性知觉。

但是,从归纳及迁移的理论解释这个视角而言,事实还是有价值的。这些事实试图阐释,只理解一个观点不足以做出真正的归纳。在这点上,儿童观察到的从漏斗到中间狭槽的最短路径的作用对其后续预测的影响无疑构成了真正的归纳。对于偶然观察的趋势,儿童会借此预期所有的狭槽都能接收到一些球,而实验过程中这种趋势也确实出现了,但儿童或许还依然不能形成归纳。这可以称为(非反射的)实际迁移或(有预期的)感知替换,但是所有的中间步骤及归纳当然都是可能的。更显著的是观察到的对称并不能引出实际迁移或感知替换。儿童不仅因为不能建构组合体系而归纳出对称性,而且还甚至因为没有注意到对称性经常与既定分布相关而做出简单的同化期待。

第三节　第二阶段：整体分布建构的开始与从一个实验到另一个实验的归纳

第二阶段从大约7岁延续至10岁（开始的几个案例是关于6岁的实验对象的），特点是儿童在个别化的运动轨迹出现时就已经注意到了随机混合（第一章）。对于混合元素的整组分布而言，结果就是儿童开始理解结构，也即是均匀分布结构或中心性分布结构，后者是围绕所有运动轨迹形成以中心点为基点的对称性分布。以下是几个案例。

罗斯（6;3）　盒子Ⅰ：预测了L和R相互交替接到小球之后，他认为如果一次滚落所有小球，那么大部分的小球会滚落到右侧狭槽，“*因为那里已经有2个了*。——（实验。）——*两边一样*。——你知道为什么吗？——*不知道*。”

盒子Ⅱ：“*那里，那里，还有那里*。——大部分小球在哪儿？——*所有地方的小球都是一样的。不，大部分小球在那里*（M），*因为那里是中间*。——边上呢？——*两边是相同的。不，左边多一些*。——（实验）两边为什么是相同的？——*我不知道*。”这是开始，然后就出现了位置颠倒的对称性替换。

盒子Ⅲ：“*大部分小球在那里，还有那里*（ML和MR），*因为这些狭槽在中间。那里*（L），*还有那里*（R）*少一些*。——这里（R），还是这里（L）多一些？——*两边一样*。——这里（ML）还有这里（MR）呢？——*也是一样的*。”由此，我们获得了对称性的归纳。

盒子Ⅳ：中间狭槽接到了数量最多的小球，整体呈对称分布。

佩（7;5）　盒子Ⅰ：第一个小球：“*这里或那里，这里*（R）。——“（实验，R）下一个呢？——*这里*（L），*不，那里*（R）。——（实验，L）下一个呢？——*那里*（L），*下一个在那里*（R）。*我知道就是这样的*。——所有的呢？——*这里，还有那里。到处都是一样的。好吧，我不知道。或许是一边比另一边多一些*。——（实验）你看到了什么？——*都是一样的，因为小球刚好是到处滚的*。”

盒子Ⅱ：“第一个小球会滚到哪里？——*那里*（M），*因为那里是中间*。——所有的呢？——*小球会到处滚，但是中间会多一些*。——这里（R）还是那里（L）多一些？——*都一样*。（实验）——*哦，左边少一些*。——为什么中间多？——*因为洞在那里*。——如果我再做一次，左边还是右边的小球会多一些？——*不是这样的，应该是两边一样的*。”由此，预测与前述实验相反（有合理原因），而与其观察到的盒子Ⅰ的实验结果相同。

盒子Ⅲ：单个的小球会滚到ML或MR，而不是L或R。“所有的小球呢？——*到*

处都是。这里,还有那里(ML和MR)最多,那里(L和R)少一些。——(实验)——是的,就是这样的。”

盒子Ⅳ:大部分小球的预测是正确的,但是仍然没有规律。我们以轻轻向右倾斜盒子开始:“哦,或许我们移动了。”

玛(8;0)　盒子Ⅰ:第一个球:“相同的,那里,还有那里。不,到左边的可能性大一些。——(实验,L)下一个呢?——那里(R),因为那里(L)已经有一个了。——“(实验,R)第三个呢?——那里(L)。“(实验,L)所有小球呢?——两边的数量是相同的,因为这条路,还有那条路上都有些小球。”因此,这就出现了对每个实验结果的归纳。

盒子Ⅱ:“两边多一些,中间少一些。——为什么?——因为小球数量不够多(实际上,这是对先前结果的错误归纳)。——如果我们让所有小球都滚下去呢?——3个狭槽中小球的数量就是相同的了。——(我们放下了20个小球)——哦,不。中间狭槽的小球多一些,因为这条路比较近,会走得快一些。——如果把所有小球都滚下去呢?——这里(M)多一些,那里(L和R)少一些。——右边还是左边多一些?——左边可能少一些,但是最后左右两边可能是一样的,因为往两边滚的速度是相同的。”

盒子Ⅲ:“小球会滚到4个狭槽中。这里(ML)还有这里(MR)多一些。——其中的一边多?——相同,因为到这两边的速度是相同的。——为什么?——因为那两个屋子(狭槽ML和MR)刚好在一起。——那里(L和R)呢?——少一些,因为不是那么近,但是两边小球的数量是相同的。”

盒子Ⅳ:大部分小球的预测是正确的。接下来,我们就在不让玛看到的情况下倾斜了盒子:他发现结果确实如此,“因为大部分小球都到了这里。——如果再做一次,结果还是这样还是像之前那样?——像之前那样。”

吉斯(9;1)　盒子Ⅰ:单个小球:“不知道。——所有的呢?——其中的一边多一些,只是不知道是哪边。——给我看看是多少。”他演示了两边狭槽中小球数量之间存在稍微的不同。

盒子Ⅱ:单个小球:“这里(M)可能会多一些,因为正对着(漏斗口)。——全部小球同时滚下去呢?——3个狭槽里都有,这里(M)可能多一些。——另外2个呢?……我们可以知道吗?——不可以。”

盒子Ⅲ:ML与MR相同,L和R相同,中间狭槽小球数量最多。

盒子Ⅳ:“中间的多一些,边上的少一些。但是有钉子就不同了。小球会滚得到处都是。”

卡郎(9;6)　盒子Ⅰ:他预测出了单个小球会交替滚落到狭槽中,以及整体的对称分布。实验表现出微小的差异:“如果我们用500个小球做10次,差异会变大还是变小?——变大,因为我们滚落的小球总是多一些,右边可能就会多落一些

了。”

盒子Ⅱ:中间的多,L和R相同。

盒子Ⅲ:*“什么都有可能。我们不可能知道。”*但是,*“这里(ML),还有(MR)可能会多一些。*——其他(R和L)的呢?——*基本相同。”*

盒子Ⅳ:*“中间可能多一些,因为陡峭一些(!)。”*但是钉子*“会使小球滚落得不同”*。没有钉子:大致是正确分布,但是仍然不规律。

吕埃(10;3) 盒子Ⅰ:*“一边可能比另一边多一些。*——原因呢?——*因为有些小球会相互碰撞,总有个小球会被碰到另一边的。”*因此,这就出现了有微小偶然差异的组合对称。

盒子Ⅱ:*“一边一两个,其余的都在中间。”*——(实验)——*“是的,我看到有些小球在滚动中相互碰撞了,然后碰撞就使小球滚到边上了。”*

盒子Ⅲ:精确的曲线。“如果再做一次呢?——*一样的结果。”*

盒子Ⅳ:*“小球会滚落到所有狭槽中,因为钉子会把小球送到各处。*——如果没有钉子呢?——*边上狭槽中的小球比中间狭槽的少一些。*——(盒子倾斜实验)是吗?——*不是的。因为板子倾斜了,小球滚到这边了。*——你知道概率是多少吗?——*当你做这个实验时,你认为小球无论如何都不会滚到你希望的位置吗?这就是概率。”*

两个基本特征将这些实验对象与阶段1的实验对象区别开来,而且表明首次出现了概率概念的感知:一方面,儿童预测出了整体的某种对称性分布,这可以被视为是不同组合的结果或相互作用的轨迹的混合;另一方面,当儿童明确知道了这种对称性分布时,就非常明显地出现了对某些观察到的事实的归纳。

首先,我们来研究第二个特征。例如,我们看到罗斯在观察到盒子Ⅰ和Ⅱ的对称分布之后(实验前没有让儿童预测结果),预测出了盒子Ⅲ的4个狭槽完全对称,以及盒子Ⅳ的8个狭槽基本对称。佩用盒子Ⅰ观察到的对称归纳出了盒子Ⅲ的对称。当盒子Ⅱ的第一个实验证明他错了时,他甚至希望纠正对称,然后盒子Ⅲ也是如此,盒子Ⅳ部分相同。玛立刻归纳了从盒子Ⅱ看到的事实,然后将其应用到盒子Ⅲ和Ⅳ。吕埃做出了类似的归纳。

我们无法解释与阶段1观察到的反应相悖的反应,除非是理解实验机制:即使年龄小一些的儿童注意到了对称,他们也不能归纳,因为还没有领会这其中的原因。但是,阶段2的实验对象能够做出归纳,因为他们可以理解其中的原因。实验对象的话语中逐渐开始清晰地出现理解。这是建立在随机混合感知逐渐发展的基础之上的,我们可以在与第一章相同阶段的实验中看到这点。如果小球呈现出对称分布,这是因为小球下落过程中的混合和碰撞使其以相同的可能到这边或那边。为了解释对称,实验对象佩非常满意地说*“小球会到处滚,但是中间会多一些”*。玛更精确一些,*“两边数量相同,*

因为有些小球滚到这里,还有一些滚到那里了”。然后,当他观察到小球堆到了中间狭槽时,*“那是因为它们滚到那里更快,路更近。”*他以补充*“小球非常快地到处滚动”*来证明外侧狭槽对称。而且*“边上的狭槽稍微远一些,但是到两个方向的距离是相同的”*。卡郎表示了相同的原因,中间*“陡峭一些”*,这就意味着到左右两边相同的坡度产生了对称分布。最后,吕埃给出了先前实验对象话语中隐含的要点:在落下过程中,*“有些小球相互碰撞,碰撞之后就会有一部分小球到了那里,另一部分到了那里”*。然后,*“我看到有些小球在下落过程中相互碰撞了。这就使它们到了边上了”*。简言之,就是对称,因为到左右两侧狭槽的倾斜度相同,混在一起并相互碰撞的小球就有相同的概率到这边或那边的狭槽。

因为逐渐明白了混合的对称分布,这些实验对象(佩、玛等)通常能够自己成功预测出分布的对称性,甚至是在观察实验之前。在这点上,我们在实验对象不知情的情况下向左或右倾斜盒子,实验对象的反应很有趣。当阶段1中的儿童看到所有的小球都滚到一边时,他们认为这是很自然的,因为对他们来说,这不能归因于概率(例如,第二节中的冈)。另一方面,阶段2中的实验对象不是立刻解释为不同于随机分布的外部诱因(参见佩和吕埃),就是(像玛)由概率引发的波动,但是又说下次不会发生了。

总之,这个阶段的主要特征无疑就是:开始为将分布整体理解为由随机混合引发的,结束为一定程度上感知到对称性及中间的狭槽会因倾斜度而接到数量最多的小球。但是,不同于阶段3中的实验对象,阶段2中的实验对象只是通过连续的近似值来开始理解对称,没有做出特定仪器之外的演绎归纳。在这点上,我们很容易就能发现儿童不能理解大数字的作用。关于这点,在第一章的相同阶段中,我们已经有所怀疑了。例如,卡郎认为如果我们滚落500个小球10次,一个实验中观察到的稍微不对称将会增加,而不是消失。另一方面,一个奇怪的反应频现,而且讲述了相同的故事:儿童认为用到的钉子及盒子Ⅳ有可能会*“使小球歪斜”*,并将其送到*“各处”*,这样形成了边上及中心狭槽的相同分布(参见吉斯、卡郎和吕埃),而不是只增加在没有钉子的盒子中观察到的分布。在这个案例及大数字小球的案例中,实验对象很难推断出如下事实:无数混合的结果将会导致补偿及最大可能的随机混合。实验对象认为每个钉子都将会使小球更多地进入边上狭槽的方位,而没有看到这样也会使小球进入其他方位。因此,他还不明白钉子仅仅是增加了混合及碰撞的概率,及整体的补偿效应,补偿效应会强化而不是破坏以中心为基点的分布。此外,在大数字法则范畴内,能够很好地理解小数字实验中的补偿作用及其对对称的影响,儿童在理解普遍现象上存在系统困难,因为在他们眼中,大数字实验在增加倾斜小球的数量而不是补偿上存在风险。在钉子案例和广义的大数字法则案例中,这个阶段的局限就是实验对象还不能归纳出具体实验情境之外的组合和排列运算(我们已经在前面的章节中见证了)。

第四节 第三阶段：立即量化整体的对称性分布

通常，在大约11或12岁的时候，我们就能发现儿童可以立即做出正确的反应。当然，我们也发现了一些小于这个平均年龄的早熟实验对象。这里有几个案例，以介于阶段2和3的反应开始。

拉格(9;7) *"每个小球都停在边上的狭槽中。——(实验)——多出来的一个会滚到右边。——*如果我反复做10次，差别会变大还是变小？——*变小。*——如果把100个球丢10次，球会怎样落下来？——*498个在一边，502个在另一边。*——为什么当我们丢下这么多小球的时候会出现这么小的差别？——*因为只有几个会滚到一边，而不是另一边。*——如果我只丢下500个球呢？——*因为小球有时候能……因为小球很轻*(因此，基本没有回应每边狭槽中的小球)。"

盒子Ⅱ：他预测出当小球数量不多时，大部分的小球会滚落到中间的狭槽中，但是如果小球很多*"就会滚到所有的狭槽中"*，且是均匀分布。实验之后：*"小球同时滚到了这边(R)，还有那边(L)，多数小球滚到了中间的狭槽中*(手势指出了将小球歪斜到中间狭槽的碰撞)。"

盒子Ⅲ：*"如果你丢下很多小球，大部分的小球会滚到那两个(中间的)狭槽里，而不是那些(边上的)狭槽里。*——为什么？——*当很多小球落下的时候，它们会相互碰撞，通常滚到中间狭槽里的小球会多一些。这就使小球相互碰撞了，之后滚到边上的就会多一些了，然后就停在那里(L)，还有那里了(R)。"*

盒子Ⅳ：他首先预测出了精确的曲线，然后，*"我犯了个错误，因为有钉子，钉子改变了小球的方向"*。但是，实验之后，他意识到钉子*"将会使小球成Z形曲线落下"*。因此，我们得到了阶段3中的儿童对盒子Ⅰ和Ⅲ的反应以及阶段2中儿童对盒子Ⅱ和Ⅳ的反应。

伯格(10;9) 盒子Ⅰ：*"那里有几个，那里也有几个。甚至可能是其中的一边多一些，但这不是必然的。"*

盒子Ⅱ和Ⅲ：正确的回答。

盒子Ⅳ：钟形曲线，*"因为钉子歪曲了小球的运动路线。*——哪里？——*可能会把小球带回到中心位置，但是这要取决于钉子的位置，可能会使小球到这里，还有那里*(也就是，接近中心或边缘)。"

安特(11;2) 盒子Ⅰ：*"两边狭槽中小球的数量大致相同。*——如果我丢下1000个小球呢？——*一边比另一边多20个。*——200个呢？——*还是一边比另一边多20个。*——丢下50个球呢？——*基本相同，一边比另一边多8个。*——好

的。如果小球很多,结果是更规律了还是更不规律了? ——*当小球数量较少时,是更不规律了。它们会更快地落下,更容易到一边。"*

盒子Ⅱ:*"中间多,两边相同。"*

盒子Ⅲ:*"这里(ML和MR)多。*——边上呢? ——*不多。*——其中的一边多一些吗? ——*不是的,基本相同。*——为什么? ——*为了多一些,我们就必须使其中一个狭槽更大一些。"*

盒子Ⅳ:*"小球在所有的狭槽中,但是边上的少一些。*——哪个狭槽中的小球多一些? ——*这里(中间)少一些,因为钉子……是的,不管怎样,那里都会有些,因为小球会碰到钉子,然后到那里(*手势表示出了小球的弹跳*)。"*我们倾斜了盒子,他立即注意到了。

卡姆(11;2)　盒子Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ:正确的回答。

盒子Ⅳ:*"小球会撞到钉子,然后散开。*——到处相同吗? ——*不是的(*他没有犹豫就用手指画出了漂亮的钟形曲线*)。*——为什么? ——*因为钉子使小球在一起(*将小球带到中心的手势*)。*——如果没有钉子呢? ——*小球会到中间。"*

塔尔(12;3)　盒子Ⅰ:*"两边相同,或许不是严格相同,但是基本相同。*——为什么? ——*我不知道,是概率。"*

盒子Ⅱ:*"到处都是,中间多一些,两边基本相同。"*

盒子Ⅲ:*"这里(ML),还有这里(MR)多一些,两边基本相同。*——为什么? ——*因为小球倾向于直线滚落。小球很重,盒子是倾斜的。*——这里(ML)和那里(L)的倾斜度相同吗? ——*那里(L)的倾斜度小一些,因为路线更长一些。*——如果左边有个狭槽的路线更远呢? ——*倾斜度更小了。*——为什么这里和那里(L和R)小球的数量相同? ——*因为相同的距离和倾斜度。*——为什么中间多? ——*因为小球很重,这就使小球以直线运动了。"*

盒子Ⅳ:*"所有狭槽中小球的数量基本相同,因为钉子把小球送到边上了。当小球撞到钉子的时候,方向就变了。不,小球会以Z形曲线滚动,将会是这样(*形成钟形曲线*)。*——如果拿走钉子呢? ——*基本相同,但是有点不同(*表明钟形曲线小于分散曲线*)。*——如果得到的曲线是这样的(刚好不对称)呢? ——*那就表示从右边落下的多一些,那可能是概率。*——如果重复几次呢? ——*我不知道。*——*盒子会倾斜,一边钉子会多一些。"*

这就是第三阶段的主要反应。第一阶段的实验对象表现出他们还不能预测出整体分布,因为他们还不能看到碰撞和偏离之间的补偿,阶段2的实验对象表现出他们开始理解这些,但是只是针对小数字的元素。在此之后,我们看到阶段3的儿童可以准确预测出结果。他们也能解释盒子Ⅰ、Ⅱ和Ⅲ中小球的分布,还能通过归纳盒子Ⅳ中小球的最可能分布的正确预测来获得这些事实。这种心智发展伴随着儿童不断增长的能够想

象出由小球之间的或小球和盒子或钉子的碰撞引发的路径交叉的能力。他们也更成熟地解释了斜坡的作用以及由小球的重量导致的滚落路径。

这个阶段也一如既往地、非常有趣地展现出了引发大数字法则的推导过程的发展。从拉格(尽管年龄很小),尤其是安特的陈述中,我们已经听到了偶然差异随小球数量增加而减少的观点。但是,这种陈述仅仅与值得研究的两个预测相关。第一个是理解比例:50个中的8个比200中的20个大的差异,200中的20个比1000中的20个大。因此,安特在考虑相对差异而不是绝对差异时,就很像那些否认大数字法则的实验对象(阶段2)。但是,最重要的是,儿童用多少有些正确的组合格式解释了大数字发展的逐渐补偿。例如,当小球数量较少时,安特说:"*小球会快速落下,更容易到一边。*"这就说明混合不够大,碰撞和补偿弹跳就会少一些。在这个视角上,令人关注的是注意到儿童在阶段3而不是2中准确解释了盒子Ⅳ中钉子的作用,而且明白这意味着只是两个方位上组合数量的增加。现在,组合和排列的运算格式在钉子的作用中清晰可见,这就解释了大数字案例中可能归纳出来的补偿作用。

第五节　方砖上雨滴的均匀分布

分析了第二节到第四节中的中心分布案例之后,我们现在研究一个均匀分布的案例。在这点上,小阵雨开始时滴落下来的雨滴形成的分布形式再寻常不过了。取一块由若干大小相同的方砖构成的平面,起初落下来的雨滴还是单滴的,而且可以数出来,只有部分方砖接到了雨滴,而其他的方砖还是干的。这就形成了类似于概率的物理景象。但是,随着雨滴的滴落,某一块方砖瞬间及长时间保持干燥的概率就会逐渐减少。尽管如此,雨滴规律分布的可能性却是不断增加的。这种分布是均匀的,而不是洒水器(或者是从漏斗中滚落下来的球)形成的钟形曲线分布,而且这是任何年龄段的儿童经常观察到的事实。正如我们所看到的那样,如果在预测钟形曲线分布中的大数字效应及在后续实验中领会这种分布必然会随着补偿规律性而增加的问题上,不到11岁或12岁的儿童确实存在系统困难,那么在所有实验对象都熟悉的这种现象中,他们是否不是凭知觉去理解大数字法则？这正是我们要分析的。

实验如下:用一张很大的被分隔成若干大小为一英寸的方块白纸来模拟铺有瓷砖的区域,方形的小玻璃珠透过抖动的筛子滴落下来,模拟雨滴或冰雹。然后,我们让儿童预测哪里会连续滴落小玻璃珠？是否所有的地方都会逐渐滴落小玻璃珠？随着小玻璃珠数量的增加,不同区域小玻璃珠的分布将会受到怎样的影响？

研究获得的结果非常清楚。任何年龄的儿童都清楚地知道:随着雨滴落下,到处都会有雨滴,但到处对年龄小的儿童而言并不意味着渐趋规律的随机分布。起初,雨滴呈无偶然规律或者是无规律的随意分布。只有阶段2和3中的儿童才能随着对大数字法

则的理解来综合推理均匀性和概率。因此,大数字效应的知觉性识别并非始于对过程的理解。甚至对像这个简单的案例而言,这种理解也需要附加组合格式。

以下是几个阶段1的案例。

秋(6;2)　*"到处都很多。会落到所有区域上。*——如果只有4个小玻璃珠呢?——(他把4个小玻璃珠紧挨着放在一起。)——会这样落下来?4个在一起吗?其他地方没有吗?看。——(4个小玻璃珠的实验。)——*在更多的区域,不会在一起。*——如果继续,是更规律还是更不规律?……是不是有些区域没有?——*哦,不。实际上,到处都是的。*——会怎样落下来?——(儿童很规律地放置了小玻璃珠,就好像每一块区域里都落了一个小玻璃珠。)——如果很多呢?——*会更湿。*——如果非常多,是不是所有的区域都会相同?——*不同的。或许*(他指向了一块区域)*就一点没有。*——如果继续呢?——*到处都是。"*

乔克(6;11)　*"每块区域都会有一些。*——为什么?——*如果很多,就会到处都有了。如果很少,就只有某些区域有了。*——好的。这是雨滴,有3滴会落下。——(他把2滴放在一个区域里,另1滴放在临近区域。)——现在,15滴会以原来的方式落下。——(他在每块区域里都放了1滴。)——你认为会这样滴落?——*是的。*——我们需要多少雨滴才能确保每块区域里都有一些?——(他数了数总共有多少区域。)——*20滴。*——你确定如果落下20滴,每块区域里就会都有一些了?——*是的。*——(20个小玻璃珠实验。)是你想的那样吗?——*不是的。"*

丹(7;4)　自己立即用10个小玻璃珠做了实验,然后预测到小玻璃珠将会落到*"还没有的地方,因为这样所有区域就会都湿了"*。我们在每个区域中摆放了数量差异比较大的小玻璃珠。"会这样落下来吗?——*或许吧。但那是非常不对的。应该到处都相同的。*"然后,我们拿出了每张上面都有10块小区域的两张纸,第一张纸上有8个小玻璃珠,第二张纸上的小玻璃珠更多一些,但是其中的一些集中在几块区域上,还有的区域是空的。"哪个更准确?——*差异最大的那个。*——区域之间差异最大的那个?……你知道'差异'是什么意思吗?——*意思就是更多。*——看这两块区域(一块有2个小玻璃珠,另一块只有1个小玻璃珠),还有那两块区域(一块有10个小玻璃珠,另一块有11个小玻璃珠)。哪对的差异大?——*这块*(10个/11个),*因为这个*(1个/2个)*仅有一个的差异*(1个小玻璃珠的差异)。"

我们看到第一个阶段的儿童能凭知觉判断出雨滴的规律分布(例如秋)。但是,有三个迹象非常清楚地告诉我们:这种理解仅对整体是正确的,而不包括任何对细节的分析。当再现单个雨滴的滴落问题时,儿童就会规律地分布小球,就好像云会把第一滴雨滴落在第一块区域,然后第二滴雨滴落在第二块区域,以此类推(参见秋,尤其是乔克相信20滴雨一定会滴落在每块区域里)。反之,儿童可能会把所有雨滴放在一块区域里

或者是两块相邻的区域，就好像云在滴落雨滴时有固定位置，而不是把整体分散开。最后，显然，这个阶段的儿童除了小数字的概念之外，还没有可能性的概念：例如，丹认为10:11比1:2的差异更大，等。

下面有几个阶段2的回答，其特征就是理解渐进规律性。当然，要排除大数字的渐进规律性。

汉(7;8) 就像阶段1中发生的那样，开始时把4个雨滴放在一块区域里。"如果雨下得大呢？——*会落得到处都是*。——如果区域的数量不多，雨滴会落在哪里？——(他把雨滴分散开了)*会在那里，还有那里*。——如果雨滴更多一些，是不是会更规律？——*会更规律一些。所有区域中都会有雨滴*。——你认为什么是更规律的？一块区域中1滴，另一块区域中2滴，还是一块区域中10滴，另一块区域中11滴？——*10滴和11滴更规律，对于10滴和11滴而言，仅仅是1滴的差异，而且不大。但是对于1滴和2滴而言，就不同了*。"

吉斯(8;10) 开始时在每块区域里都摆放了1滴雨，然后又分散开了。"有没有可能这里有100滴，那里3滴？——*不可能*。——那里可能有120滴吗？——*是的*。——是不是有另一种更可能的方式？——*是的，100滴，而且100滴更准确。一个地方有100滴，另一个地方只有20滴不可能经常发生*。——1滴和2滴，或10滴和11滴，哪个更规律？——*相同的，因为都仅仅只有1滴的差异*。"

卡尔(9;6) 说开始下雨的时候，雨滴不可能集中落在一个地方。"*不会的，会落得到处都是*。——是否有可能这里有20滴，那里有20滴，那里1滴没有？——*是的，有可能会发生*。——这块区域100滴，那块一点儿没有呢？——*不，不可能的*。——1滴在这里，2滴在那里？——*是的，可能的*。——50滴在那里，100滴在这里呢？——*不可能，因为雨滴会同时滴落得到处都是*。——90滴在这里，100滴在那里呢？——*不，不可能的*。——如果这块区域落了100滴，那么下一块区域会有多少？——*这里是100滴，那里是99滴*。——为什么？——*因为开始的时候那里已经有一两滴了*(因此，他保留了1滴的差异)。"

吉拉(10;2) 稍微优秀一些，而且与阶段3有重叠。"如果先落下6滴，会怎样？——(他把3滴分散在3个方向上，另外3滴在第四个方向上。)——规律还是不规律的？——*不规律的*。——如果落下很多呢？——*到处都有一些*。——第一次落下之后，第二次会落在哪里？——*会落在还没有雨滴的干燥的地方，因为最后到处都是湿的，肯定会有一些落在干的地方。就会更规律了*。——雨滴多还是少的时候更规律？——哪种方式更规律，1滴落在一块区域里，2滴落在另一块区域里，还是100滴落在这里，101滴落在另一块区域里？——*雨滴多一些的地方总是更规律一些*。——一两滴还是10、11滴？——*每个都只有1滴的差异，是相同的差异，但是当差异更大一些的时候，似乎就更规律了*。"

阶段2的反应明显表明：儿童逐渐理解了阶段1中的均匀分布过程，而且还同时理解了这是由概率引起的。实际上，我们发现实验对象不再以人为规律来摆放雨滴：例如，开始时在每块区域都摆放了1滴(就像阶段1中经常发生的那样)的吉斯立即模拟概率摆放了雨滴。因此，对这些实验对象而言，均匀分布的概率就是连续补偿的结果，而且综合推理了规律和偶然，不同于我们在年龄小的儿童身上看到的。在这点上，非常值得注意的就是儿童不接受区域之间的差异：“*一个地方有100滴，另一个地方只有20滴不可能经常发生。*”吉斯说。卡尔发现不可能一块区域有100滴，而另一块区域一点儿也没有，也不可能一块区域有50滴，而另一块有100滴，甚至不可能是一块区域有90滴，另一块区域有100滴。但是，他接受了40、20及0之间的差异，然后是1与2之间、100与99之间1的差异。因此，这是否就是这个阶段的儿童已经发现了大数字法则，因为他更可能将补偿看作是元素数量的增加？在某种意义上，答案是肯定的，但只是在纯粹的知觉、经验的意义上。为了以运算形式领会这个过程，也就是将其同化进组合格式，这是儿童理解个中原因的唯一方式——他仍然需要差异比例的概念。在这点上，我们刚刚观察到的反应就非常有启发性，而且与我们此前在空间和几何范畴[1]中注意到的比例非常一致。一方面，7到12岁的儿童还没有将比例的量化概念等同于两个比例，因为他认为差异是绝对的，而不是相对的。因此，吉斯声称1比2或者10比11是“*相同的，因为都仅仅只有1滴的差异*”。卡尔说两个临近区域将会分别有99滴、100滴，“*因为开始的时候，一块区域里已经有1滴了，而另一块里已经有2滴了*”。此外，另一方面，同一个实验对象，已经有了比例的量化感知(基于一致性或逻辑乘法体系的固有相似性)。因此，汉非常清楚地说“10比11(比1比2)更规律，因为10比11仅仅多了1，差异不是很大，但是1比2就不同了”。吉拉补充说(也是关于1比2、10比11)：“每个都只有1的不同，是相同的差异，但是差异更大的时候就更规律了。”简言之，儿童仅仅因为知觉规律就怀疑大数字中的固有持续补偿，但是逐渐减少的差异还没有以量化比例的术语表达出来。

反之，阶段3，儿童把渐进的均匀分布归结为比例差异的减少，而不是绝对差异。

皮埃(12;5)　有时仍表现出年龄更小的实验对象的反应。在呈现两对方砖时，一对分别是1滴、2滴，另一对分别是10滴、11滴，他宣称“*这里更规律*(10比11)，*因为一两滴落在那里，我们在这里就有20滴了，因为已经有10滴了*(因此，10比20等同于1比2)。——如果雨一直下，是更规律还是更不规律？——*相同的，这里*(10比11)*总是多一些，会有100滴、110滴，因为数字要乘以10*。——等会儿。我们讨论的是雨滴，不是算术。——*会是100，还有101。更规律*。哦，不，*总是1的不同*。——如果是1000与1001呢？——哦，不，*这不同了，差异变小了。差异会随数*

① Jean Piaget and Bärbel Inhelder, *The Child's Conception of Space* (New York: Norton,1967), chap. XII.

字的增加而减小。”

比斯(12;2) *“会落得到处都是，这块区域或那块区域都有。——如果一次滴落100滴呢？——会规律地落下，因为雨从一定高度滴落。——例如，雨从云端滴落下来，100滴在这里，50滴在那里？——不是的，每块区域都是相同数量的。——区域之间的差异会随着雨滴数量的增加而变大还是变小？——一直减小。——如果50滴在这里，51滴在那里，还有100滴在这里，101滴在那里，哪种更规则？——这里(100比101)，因为百分之一比五十分之一小。”*

这些实验对象以新方式理解持续补偿机制，持续补偿机制保证了规律分布是大数字的作用。区域之间的差异“*一直变小*”，或正如比斯所补充的，“*百分之一比五十分之一的差异小*”。这就是差异的比例性概念，此概念最后使儿童领会了大数字固有的组合补偿思维。

总之，非常简单的均匀分布案例的结果比我们的想法更接近于中心性分布阶段的结果：阶段1的两个案例呈现出了人为的规律性或随意分布(但没有被理解为偶然的)。阶段2的案例呈现出了规律性的感知(对称的或均匀的)，但没有理解大数字的作用，因为第一个案例中缺少组合格式，第二个案例中缺少比例差异。最后，阶段3的案例，儿童从组合及比例作用这两个视角理解了大数字法则。

第三章　偶然均匀分布常数关系的发现①

我们对随机混合概念、中心性分布及均匀分布分析所做的研究并不足以分析概率概念嵌入日常物理体验环境中的方式。我们仍然需要进一步研究:在因均匀方式分布或不明原因导致的两极化分布的情境中,儿童的思维如何成功将概率事件从非偶然事件中区分出来。实际上,通常恰恰是现在这种所谓的不确定性和非不确定性(或仅仅是非常轻微的非不确定性)的组合导致了实验室情境或日常生活情境中可能性知觉的介入。

我们甚至在研究钟形曲线(第二章的第二到第四节)时就已经看到了这样的确定性和不确定性的混合案例。在小球从漏斗滚落的案例中,直线路径给出了简单的因果关系,相互作用的运动轨迹形成了偶然混合的观点。但是,这个案例中的混合很简单,因为围绕不确定性分布就是中心性分布因果关系的理解早于对分布的理解。现在,我们必须要研究的问题就是:从其他方向开始研究随机分布,并探究实验过程中实验对象必须要发现的他们所不知的因果关系及其存在。这个实验假设归纳和概率判断会在理解概率概念的不同发展阶段提供信息。

因此,我们以均匀分布开始,也就是从非中心性分布开始,这是因果关系的结果。我们给实验对象展示了一个可以围绕中心轴旋转的指示器:圆盘被划分为若干个相同的部分,旋转的指示器最后将会停在这个圆盘的某个部分。如果没有外力干预(微风、磁场等),指针所停的位置最终被视为是圆盘截面的作用。因为儿童非常熟悉这种现象(风向标、陀螺,在游戏台上旋转刀子看刀子会指向哪里),我们以这种方式分析新的均匀性分布(第二章第五节中的雨滴案例非常适合彻底探讨可能性问题)的发展。但是,一旦实验对象注意到停留位置的随机分布,我们就会引入一个意外固定元素。假设他实际上看到了指针停留位置的不确定性分布,那么这个意外的固定元素将推翻儿童的可能性预测。我们可以使用磁铁,磁铁将会使旋转器骤然停在指定位置。那么,实验对象会如何反应?他是否认为偶然停留的相同位置可以反复重复?这可能可以表明他还没有理解概率的本质。或者他是否会通过均匀分布、中心性分布的取代来猜想出限制停留的原因?

① In collaboration with Marianne Denis-Prinzhorn.

第一节 实验与结果

需要用到以下材料：如图所示的画上了黑色线条的铝质圆盘。圆盘下面及与所画线条平行的是一根铁棒，这跟铁棒可以被磁铁吸引。圆盘位于中心轴的指针上。将圆盘放置在以不同色块分隔的纸覆盖的方板上，就好像一块蛋糕被从中间切开了。当然，这些色块的角度都是相同的，这样指针停留在任何区域的概率就是相同的了。这块板上总共有16个区域（简化的实验是8个），对立色部分的大小是相同的，指针可以停的板上总共是8种不同的颜色（另一块板上是4种不同的颜色）。（当然，板子必须完全水平放置，图6）

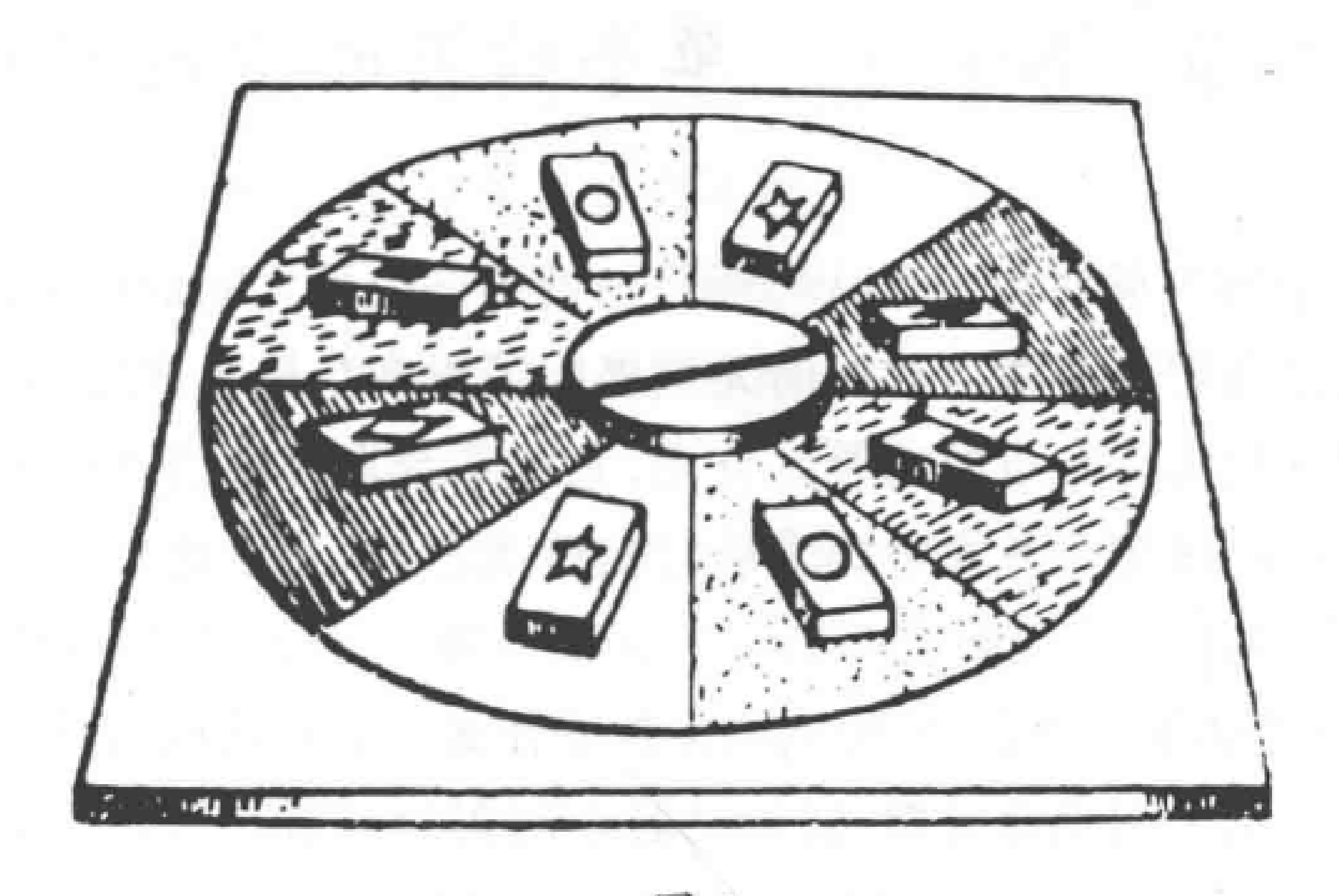


图6

此外，在提问的第二个环节，我们将8个相同的火柴盒放在与圆盘8个区域相对应纸张的边缘。有的火柴盒里装有藏在蜡里的铅（重量为*A*），有的火柴盒装的是藏在蜡里的稍微轻一点的金属（重量为*B*），还有的火柴盒装的是藏在蜡里的金属粉末（重量为*C*），最后的火柴盒装的就只是蜡（重量为*D*）。在重量为*B*的火柴盒中，两个火柴盒里装有藏在蜡里的磁铁。这两个火柴盒无法从其他6个相同重量的火柴盒中区分出来，除非磁铁吸引铁棒，并将旋转器固定在指定颜色位置。

首先与儿童开始的对话，是关于指针所停位置的可预测性及分布。儿童和实验员操作了仪器，我们仔细观察他的反应并提问，尤其是关于大数字的问题：如果增加了实验次数，停留位置的可能分布是怎样的？在我们获得他对此问题的反应之后，接下来我们放入了火柴盒，包括装有磁铁的火柴盒。当儿童寻找到了一个新解释时，他通常认为是火柴盒的重量使指针停在了黑色线条的位置上；然后，我们让儿童重新摆放火柴盒（记住装有铅的火柴盒比装有磁铁的火柴盒重），以此观察儿童是否会保持初始归纳。

我们观察到的反应可以分为三个常见阶段。从不确定性分布观点的视角来看，当

旋转器没有被吸引时，阶段1中的儿童(到7岁)认为，他可以在每个独立案例或先前案例的结果中预测出铁棒所停的位置，但是没有注意到通常会随着实验次数的增加而增加的整体分布。在阶段2(7岁到11岁)中，实验对象拒绝预测铁棒所停的位置，认为如果只是旋转一次，铁棒会停在任何位置，但是几次连续实验使其预期出现规则分布。但是，对这些实验对象而言，多次实验并未增加这种规律性，反而随着实验次数的增加破坏了这种规律性。最后，在阶段3中，均匀性分布与大数字相关。

当铁棒被磁铁吸引时，阶段1中的儿童认为自己什么也没看到，有时候是在事后做出判断，但是没有做出相关解释，尤其是与当他面对简单概率时所说的话没有明显差异时。在阶段2中，出现了渐进归纳与归纳的发端，儿童开始理解随机分布及因果规律之间的差异。最后，阶段3中出现了实验后控制原因的寻找与发现，以及清晰的可能性知觉。

第二节　阶段1A：单个结果的虚假预测

通常，阶段1中的实验对象不承认可能停留的不同位置之间的同等性。因此，他们试图猜测铁棒会停在哪个位置。我们向儿童提问了很多与概率概念形成有关的问题。一般是关于思想与现实结合点的问题。首先，儿童是否真的相信可以预测出铁棒会停在哪个位置？排除问题超出儿童心智发展时的游戏态度，儿童的态度似乎有了细微的变化：他非常清楚他不可能预测出铁棒会停在哪个颜色区域，但是他相信预测的合理性，而且试图猜测出结果。那么，他猜测的依据是什么？第一阶段的反应确实非常有意思。儿童在两种答案之间迅速摇摆，这两种答案因实验中所获得的结果而对其有不同程度的吸引，铁棒不是回到已经停过的位置，反而停在从未停过的颜色区域。因为对于第一种预测(第一次实验之前)，或者是选择之前没有停过的颜色区域而言，这是不同动机在发挥作用：选择喜欢的颜色、颜色的次序(例如，蓝色出现在红色之后)、圆盘旋转的力量、游戏者控制旋转器到期望颜色的能力等(注意圆盘很容易转动，而且会转很多圈，因此，不可能控制圆盘会停在哪儿)。但是，我们并不关注儿童给出的原因——这只是非常有趣的思维机制而已。在这点上，我们看到儿童的态度在两极之间徘徊，这两极的关系正是我们试图理解的：存在于将任何事情整合在一起的某种现象(是否在实验之前或因实验而将其整合在一起)，以及将关系解释为活动本身结果中所包含的某种自我中心主义。

以下是关于这些反应的一些案例。

金(3;10)　“*我们知道铁棒会停在哪里吗？——红色位置。——确定吗？——确定。——(实验：绿色)现在呢？——黄色位置。——为什么？——因为黄色很漂亮。——(实验：蓝色。)——哦，不，是蓝色位置。——现在呢？——红色位*

置。——(实验:红色)下次呢? ——还是红色位置。——为什么? ……"相同的回答,没有动机。我们放入了磁铁:"铁棒累了。"

努(4;11) "我们能知道铁棒会停在哪里吗? ——不能,因为如果我们说铁棒会停在蓝色位置,而铁棒也会经过蓝色位置,但我们不可能知道结果。——你有其他想法吗? ——我认为铁棒会停在蓝色位置。——(实验:绿色)如果再做一次呢? ——蓝色位置。——蓝色还是黄色? ——蓝色,因为铁棒会经过黄色位置。——(实验:绿色)为什么不是这样? ——停在蓝色和黄色位置。——最有可能的是哪个? ——蓝色,因为铁棒会经过黄色位置,最后会走得非常慢。"

查普(5;4) "我们能知道铁棒会停在哪里吗? ——是的,停在红色位置。——确定吗? ——是的。——非常确定? ——是的。——(实验:蓝色)下次呢? ——这次肯定停在红色位置。——为什么? ——因为我已经看到停在那里了(在他的头脑中)。——(实验:绿色)在红色位置停过吗? ——没有,停在绿色位置,因为紧挨着红色。——下次呢? ——停在蓝色位置,因为对我来说这是一样的(因此,他主观地认为蓝色、绿色是相同类型的颜色)。——(实验:绿色)铁棒是不是可以停在任何位置? ——是的。——如果再做一次,最有可能停在绿色位置还是其他颜色位置? ——其他颜色,因为铁棒不可能停在相同颜色的位置上。铁棒已经在相同颜色上停过很多次了。"

孟(5;3) "你能告诉我箭头会停在哪儿吗? ——那里(绿色)。——你确定吗? ——不确定。——(实验:玫瑰色)再做一次呢? ——会停在另一种颜色位置。——哪种? ——蓝色。——确定吗? ——是的。"旋转箭头,孟接着说,"我相信会停在另一种颜色的位置(铁棒停在棕色位置上)。是的,我知道的。——现在呢? ——黄色位置。——(实验:黄色。)——我知道的。——你怎么知道的? ——我不知道我怎么知道的。——现在呢? ——另一种颜色的位置。——是否有可能两次停在相同颜色的位置上? ——不可能。——(实验:绿色)之前停过那里吗? ——是的。——这种情况会经常发生吗? ——不会。铁棒会停在之前没有停过的位置。"我们继续实验,孟坚信铁棒每次都会停在新位置上,根本没有考虑上述实验结果,她还认为成年人会知道铁棒会停在哪个位置。

费斯(5;8) 在自己做完第一次实验之后,反而认为铁棒会停在相同颜色的位置上,"与第一次一样。——为什么? ——因为铁棒非常快地经过了相同颜色的位置"。他接着以旋转中的错误解释了错误的预测。"会停在绿色位置。——(实验:蓝色)——因为我们不能足够快地旋转铁棒。"

贝尔(5;9) 除了旋转速度,他还考虑到了颜色的次序:"你认为我们能提前知道铁棒会停在哪儿吗? ——不能。——(实验:白色)现在呢? ——会停在另一种颜色位置上(他指向了后面的颜色)。有点难(铁棒停在绿色位置上)。——如果再做一次呢? ——停在黑色位置,因为稍微远一点。——如果以相同的力量转动铁

棒呢？——*会停在相同颜色的位置上。*——你认为可以用相同的力量旋转铁棒吗？——*不能。*——那我呢？”

艾德(6;9)　“我们能知道铁棒会停在哪儿吗？——*蓝色位置。*——如果我说是红色，你说是蓝色，谁会赢？——*我。因为铁棒将总停在蓝色位置。你可以根据铁棒的旋转速度来看到结果。你会看到铁棒会停在那里。*——确定？——*是的。*——(实验：棕色)你对了吗？——*有点难。我自己来旋转铁棒，然后铁棒就会停在玫瑰色位置了。*——你自己做的时候，是否更清楚结果？——*我觉得是这样的。*——(实验：橙色)下次呢？——*黑色位置。*——确定？——*是的。*——(实验：玫瑰色)——*现在必须停在白色位置了。*——(实验：橙色)结果是否就像你说的那样？——*不是。*——(继续实验：棕色，然后是白色)这次是停在相同颜色的位置上还是不同颜色的位置？——*之前没停过的颜色的位置。不对，会再次停在白色位置。*——现在，观察，铁棒是否已经在所有位置上都停过了？——*没有，还没在绿色位置停过。*——为什么？——*因为我们没有准确旋转铁棒。后面继续旋转铁棒时，至少会有一次停在绿色位置上。*——是否会出现铁棒永远都不会停在绿色位置的情况？——*有时候可能会出现这种情况。铁棒不想这样。*——(实验：黄色)现在呢？——*停在绿色位置。*——你确定？——*不确定。*——其他人可以确定吗？——*有时候，当你非常肯定的时候。*——我？——*我认为是这样的。*——怎样做？——*你可以让铁棒停下来。*”

瓦格(7;2)　相同的反应：“*停在白色位置。*——为什么？——*我们可以从速度上判断出来铁棒会停在哪儿。*”

这些不同反应的共同点就是可以预测到铁棒可能会停在哪个位置上，至少在理论上是这样的。一方面，忽略圆盘的多次旋转，儿童能想到可以通过控制速度(费斯和贝尔)，甚至是停止旋转(艾德)来使铁棒停在某个位置上。但是，另一方面，儿童会将某种自然行为归结为圆盘的运动，或者说铁棒“*累了*”(金)，或铁棒“*不想停在*”指定颜色的位置(艾德)。因此，对这个阶段的实验对象来说，理论预测的可能性好像在现实上不可能。他们认为理论上是这样的，因为你可以根据圆盘的正确旋转来计算，就好像铁棒在停下来之前的20或30次旋转并不取决于偶然的波动。但是，实际上，由于游戏者的控制错误或者实验仪器的局限，这是不可预测的。因此，概率就被任意不可见原因的解释替代了。

但是，依然还有一些可能性的猜测。因此，努在宣称“*你不可能知道*”之后，紧接着就断言铁棒将会连续6次停在“*蓝色位置*”，而根本不考虑每次实验的结果都不相同。那么，预测中包含的动机是什么？

最主要的反应就是子阶段1A(金和努)的特征，这两个实验对象根本没有合理的动机就猜测颜色，而且在实验没有证实预测时就改变了预测结果，甚至在实验结束时还在重复(努：“*铁棒会停在蓝色位置上*”)，毫无疑问，蓝色是他喜欢的颜色。查普从心理的

角度清楚地展示出了这种预测的机制，*“这次肯定是红色，因为我已经看到铁棒停在那里了”*（这根本就不是对所观察到的情境的感知）。

但是，从实验对象的初始反应开始，我们观察到了一个结果与下一个结果之间的一种特别关系：儿童可以预测出一种颜色，而且这种颜色还是铁棒之前停留过的位置的颜色。因此，当金看到铁棒到达红色位置时，她预测出铁棒下次将会停在红色位置。但是，这种重复不能被视为整体分布次序的开始，而仅仅是一种引出了单个预测的现象性迹象。

相反，对于阶段1B中最后反应的特征，我们注意到儿童试图去领会连续结果之间的关系。首先，我们必须要引证三种仍然处于早期阶段的关系。第一种关系是试图根据颜色之间的相似性来预测铁棒会停在什么颜色的位置上。我们在查普身上发现了这种颜色之间的关系，他将蓝色与绿色关联在一起（*“因为对我来说，这总是相同的”*）。第二种关系是认为铁棒所停留位置的颜色次序就是纸张上颜色的次序。例如，贝尔预测出*“铁棒会停在黑色位置，因为这个位置稍微远一些”*。不过，如果控制旋转的方式，铁棒显然是可以停在这个位置上的。第三种关系是铁棒的停留位置取决于旋转速度。费斯、艾德和瓦格陈述了停留位置和实验操作者行为之间的因果关系：（猜出下一次的结果）*“有点难度”*，艾德说：*“我自己旋转铁棒，铁棒就会停在玫瑰色位置了。”*

显然，这三种主要类型的关系依然是概率妥协的结果，即使寻求运动轨迹整体序列的解释也迟早会让实验对象接触到统计规律的踪迹。将铁棒的停留趋势归因为涉及颜色或其连续序列之间的相似性就是否认了停留位置的随机分布。另一方面，认为旋转圆盘过程中铁棒可以停在某一指定颜色的位置上就忽视了多种因素的相互作用，这些因素可以在旋转中发挥作用，甚至替代由简单因果假设引发的不确定性分布。

然而，有关结果的最后一种关系形成了一种在后续阶段愈发重要的观点。实际上，儿童非常迅速地意识到了预测出来的颜色并不是铁棒所停留位置的颜色。例如，查普说铁棒会停在*“另一种颜色上*（之前还没有停过的颜色），*因为铁棒不可能总是停在相同颜色位置上”*。我们在孟、艾德及其他很多被试身上发现了同样的观点。现在，这种补偿观点显然可能会引发类似于均匀分布中发现的频度感知（如我们开始在第二章中所看到的）。但是，现阶段需要考虑的是：这种补偿性的观点并不比此前已关注到的关系（相似性、次序，或非常简单的重复）发展得更深入。也就是说，这种观点的逻辑结构比均匀分布感知更为基本与复杂，因为其涉及多种因素。

首先，补偿性的观点可能受到经验的影响。因为，实际上，很难看到铁棒多次停在同一颜色的位置上。但是，经验并不能充分解释实验对象的态度：他几乎没有关注这些事实就得出了清晰的结论。毫无疑问，儿童自身产生的补偿性因素起到了一定的影响作用。介于对称性感知，将会导致充分推理原则的智慧格式（此种颜色并不比彼种颜色更受欢迎的事实阐释了这点）和公平的道德观念两者之间的补偿性观点毫无疑问受到了自然互惠原则的启迪，自然互惠原则会影响儿童的第一次个人行为。

其次,整体而言,这个阶段的反应表明,这不是有效的单个预测思维(1A),只是关联连续结果能力的发端,而非整体分布的观点(1B)。在这两种情况中,预测动机均为现象性的(关注到的重复或变化会影响到下次预测)和个体中心性的(自信于自己的选择、主观相似性,尤其是坚信旋转是可控的),而且给予了所有共存元素不同的重量。这些不同反应因儿童不能理解现象中的多种影响作用而都有明显的概率妥协。实验对象还没有赌博态度,但是试图根据假设来做出预测,这种假设在某种形式上是连续实验之间的隐藏关联,实验对象正是基于这种隐藏关联来阐释单个结果的。

第三节　阶段1B:对磁铁的反应

概率理解的最佳标准就是,发现均匀分布和那些不包括围绕某确切点为中心的随机分布与有永久影响的均匀分布两者之间的差异。因此,有必要仔细分析阶段1中的实验对象对磁铁固定下的铁棒做出了如何反应:他们是否会注意到与此前发生的现象相悖的现象?或者他们是否会认为两者之间有关系,说这是直至现在才发现的任意分布中的一种特例(不被视为偶然)?但是,这个阶段(阶段1A)中年龄较小的实验对象并没有表现出同样的惊讶:新观察组被当作第一组观察。相反,在下一阶段(1B)中,儿童不仅表现出了惊讶,而且还呈现出了与解释数量同样多的特例。

金(3;10)　看见铁棒停在火柴盒前面,说“*铁棒累了*”。接下来,他试图推动铁棒,并看到铁棒回来了。但是,对他来说,他看到的情形与上述未加解释的停留一样自然。

努(4;11)　“*铁棒停在了火柴盒上*。——为什么?——*铁棒停在黄色位置上了*。——(实际上,火柴盒的顶部确实是黄色的,努将其与纸片上的颜色关联起来了)现在,你认为铁棒会停在哪儿?——*总是停在火柴盒前面*。——你知道为什么吗?——*知道,如果改变火柴盒的位置,如果换成红色的,铁棒就会停在红色那里了*。——试试看(他进行了实验)。——*是的*。——为什么?——*概率*。”值得注意的是,我们不曾想到,他会使用这个术语来解释什么是非常规律的。

查普(5;4)　“*铁棒停在火柴盒上了*。——如果再做一次实验,铁棒会停在相同位置还是其他位置?——*可能是其他位置*。——(实验)现在呢?——*就这样,停在火柴盒上*。——有什么原因吗?还是就是概率?——*概率*。——如果铁棒连续10次停在火柴盒前面,那么这是概率还是另有其他原因?——*概率*。——(我们至少做了4次实验)如果将火柴盒紧挨着红色,铁棒会停在哪儿?——*会停在红色的位置*。——(实验:他没有惊讶就接受了结果)有原因吗?——*那些火柴盒就是要控制住指针的*。——为什么?——*概率*。”

孟(5;3) 装有磁铁的火柴盒放在黄色位置上:“还是停在黄色上。——下次呢?——绿色,因为还没有在绿色上停过。——(实验:黄色。)——还是黄色!——现在呢?——绿色。绿色是最后一个没有接触到的颜色。如果铁棒没有停在绿色上,我就放弃了。——(实验。)——怎么回事?居然还是黄色!——下次呢?——绿色,最差也是到绿色,铁棒(他强调了铁棒)。——(实验:黄色)现在,如果我们让火柴盒紧挨着绿色,铁棒会不会停在绿色上?——是的。——(实验)再做一次呢?——还是绿色。——(实验。)——是的,我就知道的。——如果交换火柴盒,铁棒会停在哪儿?(让空火柴盒紧挨着绿色)——还是绿色。——(实验:黄色)现在呢(空火柴盒还在绿色位置)?——绿色。”

费斯(5;8) 我们已经知道他用有意调整旋转速度来解释停留位置,而且一点也不惊讶于铁棒反复停在装有磁铁的火柴盒前面。“是的,都是一样的,因为铁棒被以相同的速度扔出去了。——但是之前,铁棒为什么没停在相同的位置?——因为你旋转得不够快(参见第二节中费斯访谈的开始部分)。——停在火柴盒前面是有原因的还是就是概率?——有原因的。——是因为火柴盒还是因为铁棒?——因为铁棒。——(我们拿走了火柴盒,铁棒停在了其他位置。)——不,是因为火柴盒。——(我们把盒子放回来,铁棒再次停在火柴盒前面。)——这是因为我们旋转铁棒的速度是相同的。”

贝尔(5;9) 磁铁在黑色位置:“你注意到有什么特殊的吗?——铁棒停在黑色位置。——现在,铁棒会停在哪儿?——红色位置。——(实验:黑色位置)你看到铁棒停的方式了吗?——没有。——(重复实验。)——铁棒颤抖着回到原位,就像这样(也即是火柴盒震动)。——铁棒还会像之前那样吗?——是的。——(我们拿走了盒子)——不是了。——观察。——(我们把盒子放在黄色位置上)——现在铁棒不会停在黑色位置。——(实验。)——铁棒还是这样(颤抖)。是的,停在黄色位置。——这些火柴盒是做什么用的?——抓住转动的东西。——怎么抓住?——不知道。我可以让自己像那个东西那样。——(下次实验)为什么火柴盒能抓住铁棒?——因为铁棒的运动不是直的,不是很直。——(他相信在火柴盒前面有运动轨迹的偏离,我们再次做了实验)——我不知道为什么每次正好停在火柴盒的位置。——让我们用其他火柴盒试试(没有磁铁:我们做了实验,铁棒没有停在火柴盒前面)。——火柴盒是满的吗?我想看看火柴盒里有什么(看到了蜡)。哦,就是这个啊。但是,这个轻一些。——所以呢?——没有起作用。——如果拿走这些重的火柴盒(与装有磁铁的火柴盒一样重,只是没有磁铁)铁棒会停在哪儿?——停在火柴盒那里。——观察(实验)。——不,铁棒没停在那里。——如果我拿走这些(与装有磁铁的火柴盒一样重)呢?——是的,铁棒会停在那里(实验)。——为什么与其他火柴盒的结果不同?——因为这些火柴盒轻。——可是,重量是相同的。——(他比较了重量)是的。——为什么铁棒不能与这些火柴盒产

生效果？——*因为重量相同。*”

艾德(6;9)　我们一放好火柴盒，他就预测到了什么。“铁棒会去哪儿？——*火柴盒那里。*——(实验：他显然被迷惑了。)——*是火柴盒让铁棒停下来了，让它很重。*——现在呢(我们把火柴盒放在另一种颜色上)？——*是的，会再次到那儿，因为火柴盒让铁棒很重，然后让它停下来。*——(实验。)——*是的。*——(轻火柴盒：铁棒没有停在它们前面。)——*哦，我转得不够快。不，因为火柴盒太轻了，不能让铁棒停下来。*——(接下来，我们放了重一些的火柴盒，没有磁铁)现在铁棒会去哪儿？——*到最重的火柴盒那里。*——(铁棒并没有停。)——*哦，不，停在中等重量的火柴盒那里了*(现在，我们放了重火柴盒、中等重量装有磁铁的火柴盒、轻重量的火柴盒)。——现在铁棒会去哪儿？——*到重火柴盒那里，不，到轻火柴盒那里。*”

克劳(6;11)　装有磁铁的火柴盒放在白色位置上。“*这是因为有什么东西让铁棒停下来了。*——在哪儿？——*在机器里(旋转器)。*——如果没有火柴盒，还怎么起作用？——(实验。)——*是火柴盒触到了机器*(他再次做了实验)。——*是火柴盒转动了铁棒，(铁棒的)这个点让它停下来了。*——你是怎么看到的？——*是盒子让铁棒转起来的。*——但是是你让铁棒转动的。——*是的，但是火柴盒让铁棒停下来了，是白色木头(沿着火柴盒的边)让铁棒停下来的。*——(我们打开了火柴盒。)——*哦，是蜡，很重。*——如果用那些轻盒子呢？——*会是相同的。这些火柴盒稍微重一些。*——(实验。)——*哦，不，不是那次。我们必须在周围放很多火柴盒。铁棒会到重火柴盒的位置，然后停下来。*——(用装有磁铁的火柴盒做实验。)——*是的，因为重火柴盒让铁棒停下来，让它颤抖着回到原位等等*(震动)。——*最重的火柴盒会让铁棒停下来。*——(实验)为什么不是？——*因为最重的火柴盒把铁棒送回到了稍微重一些的火柴盒那里了。*——是什么把铁棒送回去的？——*盒子重，能让东西动起来，使铁棒倾斜一些。*——(我们拿走了没有磁铁的重火柴盒。)——*那次没有让铁棒回到原位，是因为我转得不够努力。当我努力转铁棒时，铁棒就会到那里，那里*(他再次做了实验)。*哦。我不知道为什么。每次我转它，它开始到了那里，那里*(他指着连续的颜色)，*然后当我使劲转，铁棒就朝着火柴盒去了。*”

这些结果与第二节在相同被试身上所观察到的结果的对比在两点上非常有价值。一方面，使我们能够判断实验对象在面对随机分布及常数关系态度上的差异(或任何差异的缺失)。另一方面，为我们提供了确定实验对象用来建立变量表和归纳规律的推理过程的绝好机会。

从第一个观点来说，在阶段1中，我们观察到了态度的发展，实验对象在面对常数关系及不确定关系时的态度是相同的。在子阶段1A中，儿童丝毫不惊讶铁棒会停在火柴盒前面，也没有用与在随机分布中铁棒停在任何位置时所用的相同方式来推理出这种特殊现象。因此，金说的铁棒停下来无非就是因为“*它累了*”，而不是因为“*火柴盒使*

其停在黄色位置"，就好像某种特定颜色可以使铁棒停下来。努非常清楚地预测出如果我们将火柴盒放在红色位置上，那么这种现象是可以重复的，但是这是因为火柴盒吸引了铁棒，就好像是某种特定颜色那样（例如蓝色，第二节中，对他的访谈中的开始部分）。处于子阶段1B过渡时期的查普意识到铁棒停在火柴盒前面，但是他认为铁棒下次会停在不同位置上。即使这种情况连续重复了10次，这也是规律，也即是特例，而非任意原因。例如，*"这些火柴盒让铁棒回来一点点。这是概率*（努以与规律相同的意思使用了这个术语，而且明显没有原因）。"孟显然处于子阶段1B时期，而且预测出：在随机分布中，铁棒在每次实验时都会停在不同颜色的位置上。他在注意到火柴盒将铁棒吸引至黄色位置后，依然坚持相同的预测体系：铁棒下次必须到*"绿色位置，因为还没在绿色位置上停过"*。他丝毫没有考虑火柴盒的排列就这样说。费斯在首次解释时以同样的方式将停在火柴盒前面与旋转速度关联在一起：铁棒停下来*"是因为火柴盒，是因为我们的旋转速度相同"*。瓦格虽然仅有7岁，但也以相同的方式做出了回答。

总之，当铁棒总是停在某一特定火柴盒之前时，没有一个实验对象将其称为一种不同于偶然停在任意一种颜色上的新现象。这是因为实验对象没有概率的概念，而且还被迫要给出其并不认为是偶然的每次所停位置的原因。作为结果，他们非常自然地发现铁棒停在火柴盒前面。这种他们还不能理解的有规律停留对他们来说似乎与先前的停留有着相同的次序，而先前的停留非常不规律，但他们却给这种停留分配了隐藏的规律性。努和查普所谓的概率恰好就是这种规律性，虽然他们觉得可疑但却不能解释，追问儿童"为什么"是为了寻找原因，而成年人却不能清楚地回答这些原因！[①]

只有在大约6岁到7岁，在子阶段1B第二部分中的贝尔、艾德和克劳身上，我们才看到出现了惊讶的态度，以及感觉到直至现在才观察到的随机分布及从此代替随机分布的常数关系两者之间的异质性。但是，我们是否就能因此得出这样的结论：这些实验对象比以他们在第二节中更好的反应掌握了概率概念，并可以从简单因果规律中区分出不确定性分布？实际上，即使这些儿童在某种程度上优于此前的那些儿童，他们在访谈的开始部分（第二节）中还是不能理解偶然停留点的均匀分布，因为他们总是寻找隐藏了概率的规律性原因（颜色次序或旋转速度等）。即使他们看到了常数关系的存在之后，还是不能没有冲突、归纳性地建立概率的概念（他们明显还不能解释这种情形，因为磁铁是看不到的）。现在，更细致地观察这一切，我们就会发现以上两种失败皆源于相同的原因。

在此，我们需要提及该讨论的开始部分所提及的第二种观点：实验对象用于建构分布或变量表，通过归纳来理解常数关系的一般推理过程。要领会概率的概念，个体必须会归纳，因为像简单因果关系这样的不确定性分布需要经验才能建立，而且只有知道了他们将会发现的这些关系才能建立。随机分布则相反。因此，我们的实验对象没有理

① See Jean Piaget, *The Language and Thought of the Child*, 3d ed.(New York: Humanities Press, 1959), chap. Ⅵ.

由不能发现圆盘随机旋转时停留点的均匀分布，并在只有特定火柴盒转动铁棒时归纳出常数关系。但是，要综合不确定性分布中的几个连续实验及连续观察到的由磁铁引发的常数关系，实验对象需要具备所有推理所必需的逻辑运算手段。而这正是我们的实验对象所缺少的。换言之，我们在此以一种新方式发现了第一章中所观察到的现象：要领会概率的不可逆性，个体必须能够综合可逆运算。正是因为缺少这种运算，这使得贝尔、艾德、克劳及其他实验对象不能领会偶然变化的整体分布，并归纳出因果关系。在上述案例中，他们都不能推理事实，也不能抽象整组关系。

正是这个原因，贝尔认为这是铁棒停下来的运动轨迹的偏离，而且惊讶于重量的差异。在这个意义上，他根据轻一点的火柴盒不能影响铁棒，而重的火柴盒能使铁棒停下来做出了相当合理的假设。然后，我们给了他与装有磁铁同样重的火柴盒，并问他为什么这些火柴盒不能影响铁棒。他回答这是“*因为它们的重量相同*”，而没有注意到这是相互矛盾的。对他来说，这意味着特例并不会影响规律。艾德以同样的方式解释了因火柴盒的重量而引发的铁棒停止，总结出只有中间重量的火柴盒是有作用的。那么，我们是否必须将其归因于适宜重量必要性的假设(已经有些伤脑筋了)？并非如此。此后，他立即做出了预测，就好像又回到了随机分布，说铁棒会停“*在最重……不，最轻的火柴盒上*”。但是，克劳打破了所有记录，他没有做出连贯的归纳：火柴盒使铁棒停下来，是“*因为火柴盒沿侧的白色木头*”，然后才是因为火柴盒的重量，但是最重的火柴盒“*使铁棒回到最轻火柴盒的位置*”。此后，当我们拿走了磁铁时，剩下的火柴盒不起作用了，则是因为我们不够“*努力旋转*”。简言之，对于很多情形，很多因素被牵涉其中，既没有被排除，也没有被归纳。

我们可以理解这个阶段的反应的统一性：这是因为儿童不知道如何将连续观察合理地联系起来，这就使得儿童不能归纳出原因及发现偶然性停留点的均匀分布。可能我们不应该期望4岁到7岁的儿童发现磁铁是铁棒停下来的原因，即使他们可以进行逻辑思考。但是，他们应该(而且达到下阶段的某一程度)拒绝火柴盒重量发挥有效作用的假设，因为这个假设与观察到的事实相互矛盾。而且，他们也应该意识到仅有两个特定的火柴盒使铁棒停下来了。现在，有趣的是：因为缺少必要的逻辑运算，阶段1中的实验对象不能排除错误假设，或不是因果次序就是随机混合范畴内的假想解释。换言之，因为概率与次序相反，还不具备发现真正因果次序所必需的运算的实验对象也不能意识到偶然性的存在。对他们而言，任何事不仅接近虽有待考证但却并未建立的次序，而且还接近虽不确定但却简单多变的任意性。

第四节　阶段2A：连续偶然结果的逐步建立

阶段2中的实验对象以质疑单个实验的可预测性开始，然后越来越清楚地从铁棒的

连续停留点中看到了整体分布的观点。

丹(6;8) "我们能知道铁棒会停在哪儿吗?——*不知道*。——(实验:玫瑰色位置)现在呢?——*我们必须等到铁棒旋转结束,然后才能看到*。——铁棒还会停在玫瑰色位置吗?——*不能*。——那是哪儿?——*不知道*。——我们可以提前知道吗?——*不能*。——(实验:橙色位置)如果我让你猜,你猜会停在哪儿?——*不知道*。——会停在之前停过的颜色上吗?——*不会*。——永远都不会?——*有可能会*。——经常?——*不是*。——现在呢?——*不知道。如果再次停在红色或橙色位置会很有趣*。——哪个最有可能,那两种颜色中的一种,还是另外一种颜色?——*之前没有停过的颜色*。——(实验:绿色位置)现在呢?——*棕色,还是白色位置?*——(实验:棕色位置。)——*不是很正确,这就只是个猜猜看的游戏*。——这次呢?——*所有颜色都有可能*。——成年人会知道吗?——*不知道,只有上帝才知道*。——有多少种颜色之前没有停过?——*一种,白色*。——可不可能永远都不停在白色位置上?——*不可能*。"

佩(7;10) "我们能知道铁棒会停在哪儿吗?——*不能*。——永远都不能?——*永远都不能*。——猜猜看。——*黄色位置*。——(实验:红色位置)我们能知道铁棒会停在哪儿吗?——*不能*。——你觉得现在会停在哪儿?——*可能是蓝色位置*。——你认为铁棒总会停在不同颜色上吗?——*是的*。——有可能连续几次停在同一个位置上吗?——*有可能*。——(实验:黄色位置)有可能连续4次停在相同颜色的位置上吗?——*或许有可能*。"等等。

狄思普(7;6) 相同的反应:"当我们连续旋转8次,是更可能停在相同颜色的位置上,还是停在所有颜色的位置上?——*当我们经常做时会更容易预测出结果,因为很多次就会停在不同颜色的位置上,而不可能仅仅停在相同颜色的位置上*。"

安卡(7;1) "我们能知道铁棒会停在哪儿吗?——*不能,铁棒是旋转的,而且旋转速度会越来越小,我们不可能知道铁棒会停在哪儿*。——这次呢?——*其他颜色中的一种。更有可能是因为铁棒不能总停在相同颜色的位置上*。——如果旋转10次或20次,是不是有一种颜色的位置永远都不会停?——*是的,有可能会。如果只做10次,而不是20次,这种情况会更经常出现*。"

托尔(8;10) 这是个有趣的案例,因为尽管他起初有些犹豫,但是他还是连续几次使用了概率。"你能猜出铁棒会停在哪儿吗?——*棕色位置*。——确定吗?——*不完全确定*。——为什么?——*你不能完全确定,任何事都是这样的*。——如果我一个一个地问你,你会知道每次的结果吗?——*哦,可以的。我确定。这是两回事。我肯定*。——我能知道是什么颜色的位置吗?——*哦,不能*。——(实验:棕色位置)现在呢?——*绿色位置*。——确定吗?——*不,不确定*。——(实验:绿色位置)你很惊讶。现在呢?——*玫瑰色位置*。——确定

吗？——不确定。——(实验：玫瑰色位置)现在呢？——黄色位置。——确定吗？——是的。——为什么？——因为之前我都对了。——(实验：棕色位置。)——我错了，现在是黑色位置。——(实验：玫瑰色位置。)——又错了。——如果让你再猜一次呢？——我可能会说一种之前没有停过的颜色。——你认为铁棒会停在所有颜色的位置上？——是的，可能吧。——这次会停在哪儿？——黄色位置。——(实验：棕色位置。)——又错了！已经在棕色位置上停了5次了。——你觉得如果明天再做，铁棒还会在棕色位置上停5次吗？——哦，看情况吧。或许会因为铁棒还有铁棒怎么旋转而不同。——想象一下我做了1600次。如果非常规律，每种颜色的位置会停200次。你认为会比今天发生的情况更规律还是更不规律？——差异会变小。但是我会这样数：500次(他把铁棒停在棕色位置上的5次停留乘了100)、300次、200次，差异更大了(他以相同的数字定义了差异，也即是100，并由此发现差异变大了)。”

韦伯(8;4)　“你能猜出铁棒会停在哪儿吗？——不确定。这要取决于铁棒停在哪儿。——你说更可能停在新颜色的位置上吗？——是的，之前还没有停过的颜色。——确定吗？——不确定，这要取决于铁棒停在哪儿。——成年人能准确预测吗？——不能。——可能两次停在同一种颜色上吗？——是的，如果几次都停在同一种颜色的位置上，这种情况就也有可能出现。——如果做很多次，更规律停在几种颜色还是多种颜色的位置上？——更容易停在几种颜色的位置上。”

德贝(9;6)　“猜猜看铁棒会停在哪儿。——蓝色位置。——确定吗？——不是很确定。也可能会停在另一种颜色位置上。——你是说停在之前停过的颜色上吗？——不是，停在那些之前还没有停过的颜色上。绿色位置。——(实验：绿色位置)你是怎么知道的？——这是概率。——如果整下午都旋转铁棒，你是不是会更好地知道结果？——不是，不可能的。我们永远都不可能完全确定。——如果做16次，可能每种颜色的位置停2次吗？——不可能，有时候一种颜色的位置上会停2次，但不能总出现这种情况。——如果做160次，是不是意味着每种颜色的位置上停20次？——不是的，这根本不可能的。——差异会变大还是变小？——会更不规律。”

弗卢姆(10;11)　相同的反应。“现在呢？——一点儿也不知道。我不想提前说什么。一分钟后就会看到结果了。——如果继续呢？——还没有在所有颜色的位置上都停过，而这是有可能发生的。——我们已经做了16次了，如果做1600次，结果会是怎样的呢？——结果是相同的。仅仅是后面加了个零而已。——你真的这样认为吗？——看情况吧。我们不可能知道的。——更规律还是不规律？——更不规律。——为什么？——我解释不了这种情况，但是我理解我们已经做的实验：当实验次数少时，结果就会更规律。”

法尔(11;8)　也认为规律性会随着实验次数的增加而减少。“哪个最不可能？

800次实验中在每种颜色的位置上停100次，还是16次实验中在每种颜色的位置上停2次？——*800次实验中，在每种颜色的位置上停100次。”*

陈(11;11) 不确定少量实验中铁棒会在每种颜色的位置上都停过，因为“*我们已经转了很多次了。*——可以确定吗？——*哦，不能。可能需要转25次才能确定。*——那样就会非常确定了吗？——*哦，不能。或许是30次，那样我也不能完全确定。*——哪种最有可能？16次实验中在每种颜色的位置上停2次，还是在800次实验中在每种颜色的位置上停100次？——*16次实验中在每种颜色的位置上停2次更可能，因为2比100小。当存在概率的时候，这样就会更容易一些。”*

我们看到了这些事实的重要性，它给出了儿童连续建构分布关系链的完整发展过程，而且表明儿童习得了概率的概念。

实际上，这个阶段的最初反应是拒绝预测单个实验中铁棒的停留位置，也即是：与整体无关。儿童只是说，“不知道”或“我们必须要等铁棒旋转结束”或“我们肯定会发现的”。但是，这种妥协态度隐藏了明显超过阶段1的两方面的发展。首先是，理解如下事实：铁棒的停留位置是随机的，而且儿童没有寻找现象中隐藏的规律。换言之，儿童开始用概率概念取代变化；而在阶段1中，任何事都被看作是有规律的，而不是要取决于隐藏的假设规律。实验对象只是引述了已知。例如，托尔说“*我们永远都不能完全确定，对任何事来说都是这样的”*。他这样说是因为因素间的相互作用(*“因为铁棒及铁棒如何旋转”*)。实验对象托尔非常有代表性，因为他幸运地连续3次非常正确地预测出了结果，而他自己都不相信。然后，他思考了片刻，思考是否有隐藏的小把戏，不过因为他第一次预测错了，他不再耍开始时的小聪明。简言之，儿童不再认为可以预测单个实验的结果，但是儿童的第二个发展被与铁棒的停留点有关的整体预测补偿了，而不再是单独进行的每个实验的预测。

我们在证实知觉的新重要性中(经常在阶段1中看到)看到了第一点，即：在几次连续实验中，铁棒更有可能停在之前还没有停过的颜色上，而不是之前已经停过的颜色上。但是，如果这种判断(被认为是对称或对等的)中还部分残留了补偿意识，显然重点变成概率性的了，因为儿童非常惊讶铁棒会经常停在一种颜色的位置上，即使他意识到逻辑上是有可能的(此观点也参见托尔)。从7岁之后，我们发现了儿童对分布频度或规律的感知，因此产生了稀有的不规律组合：对实验对象而言，某些重复比变化更不寻常，重复本身更经常，就像分布更随机那样。

不过，我们必须要注意：此处所提及的儿童对频度的感知仅构成了随机混合的一个新方面，关于随机混合我们已经在第一章、第二章中有所阐述，这是概率心理概念的开始点。实际上，圆盘的连续旋转在一定程度上是相互独立的，也即是表明速度不同、后续停留点之间没有次序，这就是说在某种颜色位置的重复停留至少是有可能的(参见安卡对不可预测性原因的解释)。换言之，这是因为在儿童眼中，所有的旋转都是由大量

的连续实验构成的,因不同速度而相互独立、不同。因此,儿童判断出铁棒在某种颜色上的重复停留是不可能的,而不规则交替则是有可能的。这就是为什么他们不再给出预测的原因是颜色次序还是旋转速度。因此,我们事后明白了为什么在阶段1中,儿童认为每次单独旋转是可以预测的:这是因为不存在相互作用或混合,而是儿童假想出来的旋转和颜色之间的隐藏关联(次序、速度、相似性等)。然后,错误的预测就被归因为随机性或变化。不过,在当前阶段,单个实验的独立性及源于实验随机混合的整体结构形成了两个新特点,而这两个新特点共同促成了概率概念的建构。

狄思普补充了初始知觉的第三个特点:基本观点就是源于随机混合或随机分布的规律性会随着实验次数的增加而增加,*“因为可以经常停在另一种颜色的位置上,而不是经常停在相同颜色上”*。我们以有趣的方式在安卡身上发现了这个概念:20次实验比10次实验更不容易出现铁棒从未在一种颜色的位置上停过的情况,原因又是混合会随着旋转次数的增加而增加。因为这个原因,频度或分布的感知及随机混合的感知实际上是相同的,而且正是此事实引发了量化的开始。也正是这三个特点将此阶段与此前的阶段区分开来。

相反,如果我们将此阶段与阶段3做比较,就会注意到这种量化的局限性。实际上,这还没有超出小数字的范畴说30次连续实验中的10次,也并未从大数字的实验中做出归纳说,20次实验的颜色混合优于10次或多次实验的颜色混合,正如陈说的20或30次,这已经在形成大数字法则的进程中了,因为此规律明确地表明了补偿会随着实验次数的增加而增加。但是,还需要考虑到一个奇怪的事实,也就是:在这个阶段,相对小数字,这种大数字法则确实存在于儿童的思维当中,但当实验次数超过100时,这种情况就会发生逆转。因此,托尔认为1600次实验的差异会比16次实验大(相对于5次、3次或2次,*“500次、300次、200次使差异更大”*),韦伯以同样的方式认为:我们*“更容易从少次数实验中”*获得规律。德贝宣称*“试验次数少时,结果更规律”*。*“我无法解释。”*弗卢姆也说,*“但是我理解”*。法尔和陈的推理方式相同:*“当存在概率时,更容易”*做到16次实验而不是100次实验结果的统一。

那么,我们可以将那些一致认为混合、分布的规律性会随着实验次数的增加而增加的实验对象的这种不同寻常的逆转归因为什么?儿童给出了两种原因,而且这两种原因都很有意义。第一种原因源于儿童不能理解我们在第二章第五节中所研究的可能性——要领会大数字规律,最重要的就是个体要意识到:例如,100次中5次的差异比10次中5次的差异更小,因为差异都是相对的,而不是绝对的。现在,我们看到当托尔说16次实验中5次、3次或2次的差异会导致1600次实验中500次、300次、200次的差异时,他是进行了准确计算的,他因此总结出*“差异变大”*,儿童似乎考虑到了其绝对值。我们以相同的方式看到弗卢姆依然比较了16次实验与1600次实验,他宣称*“这是相同的事,我们所做的只是在后面加零了”*。接着,他总结出*“会更不规律”*。但第二个原因,这是更重要的一个原因,必须要补充到第一个原因上。实际上,大数字法则并未证实相对差

异的存在,因为大数字法则认为相对差异会随着实验次数的增加而减少,恰好是因为补偿的重要性不断增加。这个阶段的儿童开始理解最多10次、20次或30次实验的机制,因为这些都是成组的,可以直接观察到。但是,对于100次、800次、1600次实验,他不再确定会发生什么,因为他没有能力看到可能的表现或方向的数量。这是我们引用陈的言论的意思,“*当存在概率时,更容易*”出现16次实验比800次实验中每种颜色停留次数相同的情况,因为因混合引起的补偿恰好在小数字而非大数字中更容易被准确想到。

但是,我们这样做只是进一步将问题退回来了:为什么儿童能够概括出小的大数字过程?如果我们可以这样说,他们为什么又不能概括出真正的大数字?原因就在于我们所知道的此阶段的所有特点。实验对象不能用具体运算进行推理,除非是那些思维中或实际上能够被处理的数据,也即是细节上可视或表现出来的数据。这就是为什么他不能推理超过25到30次实验为一组的实验的结果,而这个数值在规模上接近于其在第一次实验中分析的数值。要将相同的格式应用于大数字,他可能必须具备根据第二阶段所需的形式格式推论所有组合的形式思维。也即是:不再使用具体思维而是在具体思维之上的抽象思维。第二阶段的形式思维或运算思维只能出现在11岁到12岁,也就是说出现在第三阶段,我们将在本章的第五节及本书的第三部分内容中看到(第七章到第九章)。

第五节　阶段2B:对磁铁的反应

第二阶段的实验对象以相同的方式成功建构了以混合为特征的变量关系,他们也试图建构无矛盾的常数关系,这就要考虑到圆盘会停在装有磁铁的火柴盒前面。有两点需要特别注意,因为这两点关系到火柴盒的使用,这当中有部分火柴盒中装有磁铁。第一点,从概率的视角来说,就是实验对象的反应。在当前阶段,所有儿童都毫无例外地认为铁棒在装有磁铁的火柴盒前面的对称性停留是由某些因素而非圆盘的自由旋转而引发的。我们记得:对第一阶段的儿童而言,这两种现象的次序是相同,或几乎相同的,这种情况与阶段2中的案例类似。第二点,分析导致实验对象发现因果关系的归纳性推理本身,阐明其关系是非常重要的,类似于我们之前(第三节)对可能性推理的处理。归纳性推理在本阶段开始发展,它以排除某些因素并保留其他因素的方式协调数据,直到我们能够将其从一般的相关关系中剥离出来。然后,我们就看到了这种逻辑步骤与引发随机均匀分布概念的逻辑步骤之间的相似性及不同性。当这种分布包含了相等可能的概念时,也即是包含了多种可能案例时,因果关系的归纳发现假设反而就排除了某些因素(颜色、重量等),而使用其他因素。因此,将这些相悖而非关联的概念整合在一起是非常重要的。如此,我们就需要简单分析这个阶段的儿童所具备的排除及分离的运算过程。这点至关重要,因为(我们后续将会看到)与概率概念相悖的(尤其是有

利案例和可能案例两者之间的关系)可能性概念本身反而包含了分离的介入。

刻画该阶段特征的归纳性推理的发展在分离或排除运算方面极其有意义。面对铁棒总是停在装有磁铁的火柴盒上的实验对象能够很快地排除颜色或旋转速度这样的因素,但是他们需要运用更多的智慧来排除重要因素。我们必须记住:每个装有磁铁的火柴盒(*B*)与装有非磁铁金属的火柴盒的重量是相同的。这些火柴盒比那些装有蜡或粉末状金属的火柴盒(*C*和*D*)重。通过比较装有磁铁的火柴盒和那些轻一点的火柴盒(*C*和*D*),实验对象将会试着说重量是使铁棒停下来的原因。但是,于我们而言,他仅仅需要比较装有磁铁的火柴盒(*B*)和装有铅的、更重的火柴盒(*A*)的重量,尤其需要注意未装有磁铁的火柴盒(*B*)与装有磁铁的火柴盒同重。这种认识使儿童排除了重量是使铁棒停下来的决定性因素。不过,这个阶段的实验对象仍然不能自己组织并控制实验,这就使其没有将重量纳入考虑范围。这个问题关系到广义上的实验归纳心理。不过,这并非推理结构。[①]另一方面,在考虑结构问题时,我们观察到了当我们鼓励儿童控制实验或让他看反例,或与预期相悖的结果时会发生什么。最小的实验对象一会儿就排除了将重量作为因素,但是很快就回到了他的第一个观点。或者他们注意到铁棒的停留并不是取决于重量的简单结果(将其与阶段1中的实验对象清楚区别开来)。因此,他们试图使结果与连贯整体相协调。例如,他们会比较中间重量(*B*)、重的(*A*)或轻的(*C*)重量的火柴盒,或将其中之一与圆盘的重量关联在一起等。那些只有9岁或9岁多一点的实验对象在看到我们构建出来的反例之后意识到重量并非某种因素。我们应该试图确定:为什么对实验对象而言,排除重量比排除颜色或速度更难。

丹(6;8)　装有磁铁的火柴盒放在白色位置上:“*铁棒自己会永远转下去*。——再试试。——*看!这就是使铁棒转起来的火柴盒*。——(我们拿走了白色位置上装有磁铁的火柴盒,只留下黑色位置上没有磁铁的火柴盒)铁棒会停在哪儿?——*黑色位置。我甚至都不用看就知道*。——(停在红色位置)怎么回事?——(他抓着火柴盒)*火柴盒轻,根本没用,必须得是重的火柴盒*。——[我们给了他重的没有磁铁的火柴盒(*A*)]“*哦,这些火柴盒是非常有引力的,因为很重*。——(实验。)——*不,没用*(有些惊讶)。——怎么回事?——(他掂量着火柴盒)*这就是比使圆盘停下来更重的火柴盒。这些火柴盒*(*C*和*D*)*的重量不大。我不相信这些火柴盒足够重了,要不铁棒就会停下来的。这些太重了。起作用的应该是中间重量的火柴盒*。”然后,我们让他比较了重量为*B*、装有磁铁和没有磁铁的火柴盒的重量。“*重量相同*。——好的。那么是重量让铁棒停下来了吗?——*不是的*。”但是,他后来又回到了他的假设上,也即是中间重量的火柴盒才有用。

狄思普(7;6)　“*这是因为火柴盒在这里。它们保持不变,而且很紧凑。当铁*

① 当前,巴蓓尔·英海尔德与我们正在做的关于这个问题的研究已经远远超出了特殊概率问题的范畴。

棒转得很快时,就会经过火柴盒。但是,当铁棒转得慢时,就不能穿过火柴盒了。火柴盒很紧凑、很重,这就使圆盘倾斜了。——(我们仅留下了轻的火柴盒。)——*这些火柴盒的重量不足以使圆盘停下来。*——(我们仅留下了重量为A的火柴盒。)——*不,不是的。可能这些火柴盒太重了。不能像刚才那样恰好使圆盘停下来。太重了。当火柴盒的重量稍微少一些,就一点点重量时,就会使圆盘倾斜得更好了。*"他通过圆盘的边缘区分了"重量"和"倾斜"。"那么,为什么轻一点的火柴盒没有用呢?——*重量不足以使圆盘动起来。*——这些(装有磁铁的)火柴盒呢?——*会有用,重量刚刚好。*"

托尔(8;4) "*我不知道为什么火柴盒让它停下来了。是因为重量吗?*——(我们拿走了轻火柴盒之外的所有火柴盒)——*不是的。重量不够。*(把重量为A的火柴盒放上去)*这样就好了。*——(实验。)——*不,太重了。*——然后怎样了?——*不是太重就是太轻了。那些(装有磁铁的)火柴盒的重量刚刚好,会有用的。*"

福尔(8;4) 我们在圆盘上放置了火柴盒,福尔注意到铁棒停在红色位置上(装有磁铁的火柴盒在红色位置上)。"现在会停在哪儿?——*不知道。*——(实验。)——*还在相同的地方。*——(我们再次做了实验。)——*还是相同的。有内部机制。*——(我们变化了所有火柴盒的位置)现在会停在哪儿?——*相同的地方。虽然你变化了火柴盒的位置,但是铁棒还是会停在红色位置上。*——(实验。)——*哦,不。停在绿色位置上了。总是停在那些火柴盒的前面。*(他打开了火柴盒)*里面有些什么东西。蜡。所有的火柴盒里都有蜡吗?*(他检查了所有的火柴盒)*是的,但是这个轻一些,那个重一些。铁棒会停在所有火柴盒前面。*——(我们变化了火柴盒的位置,把装有磁铁的火柴盒放在了黄色位置上)——*铁棒总是会停在那些火柴盒前面。颜色无关紧要。*——现在呢?——(他重新掂量了火柴盒)*这个(A)是最重的。只有中间重量的火柴盒才能使铁棒停下来。我不知道,这很难。*——你确定这些(装有磁铁的)火柴盒正好就是中间重量的火柴盒吗?——(完全比较重量为B的、装有磁铁和没有磁铁的火柴盒)*重量相同。*——铁棒停在哪儿取决于重量吗?——*有些火柴盒比那些(装有磁铁的)火柴盒重一些。*"

达夫(9;4) "如果我多次旋转铁棒,铁棒会停在哪儿?——*红色、黄色位置,所有颜色的位置。*——(我们做了几次实验。然后,我们放上了火柴盒,铁棒连续5次停在红色位置上,这个位置刚好放了装有磁铁的火柴盒)下次会停在哪儿?——*会10次停在红色位置上,然后才是另外一种颜色位置上。*——10次都停在红色位置上正常吗?——*是的。最多10次,这是正常的。但是,多于10次就不正常了。*——(我们继续实验。)——*不,不正常。这是因为旋转的速度不够快*(他快速旋转了铁棒,但是铁棒再次停在了红色位置上)。——为什么?是因为颜色吗?——*不。是因为旋转器(圆盘)的重量。太重了。*——但为什么铁棒停在红色位置上,而不是蓝色或绿色位置上……是因为火柴盒吗?——*不是。*——我们如何确

定？——*把火柴盒拿走*(他拿走了部分火柴盒)。——如果你的观点是对的，那么这次会停在哪儿？——*黄色位置*。(他旋转了铁棒，铁棒停在了黄色位置上！)——这说明什么？说明你的观点是对的吗？——*不，这是因为火柴盒。这些*(装有磁铁的)*火柴盒比那些火柴盒重。铁棒永远都不会停在蓝色或绿色位置上，因为这些*(重量为A，及没有磁铁、重量为B的)*火柴盒太重了*。——我们应该怎么做……拿走一些火柴盒吗？——*是的*(他先做了没有最重火柴盒的实验，然后是没有最轻火柴盒的实验)。*这是*(重量为B且装有磁铁的)*那两个火柴盒的重量，因为这两个火柴盒既不重也不轻*。(我们让他比较了重量为B、装有磁铁及没有磁铁的火柴盒的重量)*相同的重量*。——是重量的原因吗？——*不是*。——好的，如果既不是重量也不是颜色或旋转速度的原因，那是什么原因？——*是因为束缚*(*圆盘的阻碍*)。——我们应该做什么？——*改变火柴盒的位置*(他拿走了一些火柴盒，但什么也没改变)。——现在呢？——*是因为火柴盒里的东西*。"

丹尼(9;1)　以相同的方式比较了火柴盒的重量，说："*有些火柴盒比另一些重*(重量为B的火柴盒比重量为C的火柴盒重，比重量为D的火柴盒重)。*这些*(重量为A的火柴盒)*更重*。——圆盘会停在哪儿？——*停在*(重量为B)*那些火柴盒的位置。是的，不是重量*。"

法乌(9;5)　相同的方式："*不是因为重量，是因为这些*(重量为A的)*火柴盒是最重的，旋转器停在轻一些的火柴盒的位置*。——给我另一个原因，为什么重量没有形成差异。——*还会停在*(重量为B，没有磁铁)*火柴盒的位置，以及*(重量为B，装有磁铁的)*火柴盒的位置*。"

将同一实验对象的这些反应与未使用磁铁的简单随机停留实验时的反应进行比较，我们发现了有趣的原因。与阶段1A和1B的实验对象相反，这些实验对象实际上都立即感觉到了铁棒在某点的停留不是随机的。因此，这要取决于新原因。例如，丹一开始就注意到了火柴盒的因果作用；达夫看到铁棒总是停在红色位置，并自己确定出如果是简单概率在发挥作用，那么重复次数就不会超过10次，因为"*最多10次，这是正常的。再多就不正常了*"。换言之，因为没有火柴盒，铁棒会停在任意地方；有了火柴盒，铁棒就会总是停在相同的位置上。他们知道在第一个案例中，只有概率发挥作用，而在第二个案例中，有特殊原因发挥作用。

同时理解这两个相反的情形取决于相同原因及相同心智运算的作用。一方面，可能是均匀分布的概念，因此是铁棒在任何不同位置的同等可能性停留，而在其他案例中，是在某一点的中心性分布。因此，是唯一决定性。但是，要理解这种同等可能性的概念，可能性案例必须被分成一定数目的相互排斥(与圆盘的8个部分有关)且同等的案例，而且还要平衡原因，这样才不会有所遗漏。反之，理解分布为什么是以某点的中心性分布就要假定排除了其他原因的某些决定性原因的相互作用，也即是根据包含确

定是或不是其有用的或运算过程分离相互排斥的因素。因此，在这两种案例中，分布性的理解是基于相同的运算结构的。阶段1中没有这种结构，这种结果的发展说明了概率的认知及演绎推理的开始：这是包含或排除的能力，也即是在同等案例中做出是或不是的选择。

这种新运算态度首先会表现在试图通过拨弄所有仪器来理解会发生什么事的研究对象身上，而不是在阶段1中保持消极态度的研究对象身上。因此，福尔立即打开了铁棒停在其前面的火柴盒中的一个，并注意到火柴盒里有蜡，然后好奇是否所有的火柴盒里都有蜡，并比较了所有火柴盒的重量差异。狄思普以他自己的方式区分了倾斜作用和重量作用。其他实验对象比较了火柴盒中蜡光滑或粗糙的外表或提及圆盘重量的作用。达夫尤其积极，改变了旋转的速度，拿走并替换了火柴盒的位置，清除了最重和最轻的火柴盒，改变了圆盘的阻碍等。

但是，这次有意义实验活动中最重要且确定的是：实验对象开始排除某些因素，此种运算已经超过了阶段1中的（试图协调所有因素，即使是自身相互矛盾的因素。因为他们还不能理解排除）儿童。正是此阶段的这个原因，颜色因素在实验对象感知到固定停留与圆盘的任何决定部分无关之后就被立即排除在外。不过，福尔试着以这样的方式相信红色发挥了作用，他注意到“*哦，不，停在绿色位置上了。总是停在那些火柴盒前面……从来没有在其他颜色的位置上停过*”。旋转速度也很容易被排除：达夫假定铁棒的有规律停留是由旋转力量引起的，而且试图以更快的速度旋转圆盘，并立即总结出“*不，不是那样的*”。他试着以同样的方式确定是否可以在火柴盒里面或外面（二分排除法）发现原因，他拿走了所有的火柴盒，然后注意到作用停止了（消除效应，消除原因），他消除了外部原因。

在注意到重量上的不同之后，所有的实验对象都认为重量因素可以被逐渐排除了，但是排除重量因素比排除此前的因素更难。这个阶段（7到8岁）年龄最小的实验对象依然非常倾向于试图协调所有因素，但是他们在避免矛盾的方式上与阶段1中的儿童不同：如果最重的火柴盒（A）不能使圆盘停下来，而最轻的也不能，那么这一定是个适宜的重量可以达到预期效应的问题；而这个适宜重量就是中间重量（参见丹、狄思普和托尔）。这是个奇妙的假设，下一步的发展表明：更优秀的实验对象在注意到重量为A的火柴盒没有产生作用之后，总结出重量因素应该被排除。虽然这个可能复杂，但这并不是个荒谬的观点。当儿童被迫比较使圆盘停下来的重量为B的火柴盒和相同重量但却没有使圆盘停下来的火柴盒时，这种情形就发生了改变（他自己很难做到这点）。丹理解这点并决定排除重量因素，但是接着又回到了有效中间重量的假设上。不过，我们从大约9岁的儿童身上看到了他们可以清楚地排除重量因素：尽管福尔和达夫在比较重量为B的火柴盒之后，仍然试着以选择中间重量的方式直接将重量因素排除在外。丹尼注意到最重的火柴盒不能使圆盘停下来之后，决定排除重量因素：“*好的，那么这不是因为重量*。”最后，法乌使用了源于重量为A和重量为B且没有磁铁的火柴盒的两个实

验证据的样例。

因此，重量逐渐被这个阶段的实验对象排除。我们可以很好地看到排除重量比排除颜色或速度需要更多时间。因为，一方面，这是火柴盒本身的固有重量问题，而不是外部因素；另一方面，一旦儿童已经排除了重量，对其而言就没有了其他可以理解的原因，除非是达夫说的，“*火柴盒里有什么*”。显然，将相互排除运算应用于像颜色或非颜色、速度或非速度这样的一对选择上，比当我们知道排除了一个因素之后仍然还要从几个因素中做出选择更容易一些。[1]

撇开需要相对较长时间来解决的重量问题(这对广义归纳问题而言尤其有趣)，我们注意到阶段2中的实验对象在能够理解均匀随机分布的机制之时，很可能一开始就做出了某些排除，其结果就是为了寻找在某时刻可控的和非均匀分布的原因。两个对立观点所建构的关系需要非常仔细才能注意到，而且对我们后续从概率研究到可能性量化研究的过渡非常有用。

第六节　第三阶段：变化及常数关系发现中形式推理的开始

在谈及(使用磁铁前的)偶然分布时，此阶段表现出来的进步就是大数字法则的发现。对于常数关系的演绎推理而言，其特征是两个新元素：允许实验对象更容易分离发挥作用的因素的即兴实验方法；假设–演绎方法中的推理能力。也即是：归纳及排除多种因素的因果，而这不再只源于具体观察。

此处有几个关于可能性判断的案例，这几个案例以阶段2和阶段3重叠的两个案例开始。

巴尔(10;7)　拒绝猜测铁棒会停在哪种颜色的位置上，“*因为铁棒转动，可能会停在任何颜色的位置上*。——是否有人能知道？——*哦，不可能。当然，除非有东西可以使铁棒停下来*(他在使用磁铁之前这样说)。——(实验：棕色位置)还会停在棕色位置吗？——*不太确定停在棕色位置上，因为还有很多其他颜色的位置*。——会停在所有颜色的位置上，还是不会？——*这要看转了多久*。——为什么？——*因为如果我们经常转，到每处的概率就会更大*(参照大数字法则)！”一会儿以后：“我们已经转了16次，如果我们转1600次，铁棒的停留位置是更规律还是更不规律？——*更规律*。——为什么？——(怀疑)哦，不，*更不规律，因为16次中在每种颜色位置上停相同次数的概率更多，因为转的次数少*。——为什么？——

① 毫无疑问，此处缺少了重量概念的合理区分，通常这被视为是力量在术语所有意义中的表现(在此是引力)。

当转的次数少时,会更规律,因为差距更小。——那么,1600次呢?——*哦,相同的。*”

杰克(10;8) 相同的初始反应:“*是概率。这是不能预测的。*”15次实验之后,“如果我做300次实验,差异会变大还是变小?——*相同的*(但是思考之后),*不,会变大。*——如果我们做800次实验,铁棒更有可能停在确定颜色的位置还是其他颜色的位置上?或是不是只做15次才更有可能出现这种情况?——*15次实验中的不等性可能比800次实验中的更多。当我们转800次时,概率会更多,铁棒更有可能停在所有颜色的位置上。*”最后,他通过在随机混合和补偿这个意义上使用概率这个词获得了正确答案。

米克(12;1) “如果转800次,铁棒的停留位置会比15次更规律还是更不规律?——*更规律。*——为什么?——*均等化了。*”

劳(13;4) “如果转800次,铁棒的停留位置会比15次更规律还是更不规律?铁棒会在每种颜色的位置上停相同次数吗?或者会比15次更规律吗?——*800次实验会更规律,因为这个数值更大。我们试的次数越多,概率就越大。*——为什么?——*因为实验次数越来越多。*——但是为什么实验次数越多,铁棒的停留位置越规律?——*我不知道。因为概率越来越多。*——但是为什么概率越多越规律?——*好吧。例如,在100次实验中,每种颜色的位置上都会有一定次数的停留,但是次数不同。对于200次实验,次数会变得更相同。实验越多,结果就越趋于相同。*——但是为什么会变得相同?——*我不知道。好吧,准确而言,概率更多是因为实验更多。对于小数字的实验,铁棒每次的停留位置都会变,这要取决于实验次数;但是,对于大数字的实验,铁棒停留位置更规律的概率更多。*——我不明白为什么。——*当我们只做了几次实验时,铁棒这次停这儿,下次就不会停在这儿了。但是当试验次数很多时,铁棒的停留位置就规律了,因为铁棒这次停在这儿,下次会停在那儿。经过一定次数的实验之后,所有位置上的停留次数就相同了。*”

这几个案例的意义再清楚不过了:大数字法则的理解源于对不断发展的随机混合的感知,这种感知是阶段2的特点。当儿童归纳出超过具体可观察组范围的形式运算时,大数字法则的理解就开始了。因此,巴尔在说“*如果我们经常转,我们就更有可能停在每处*”的时候,就已经构想出了大数字法则。也即是,获得了规律性法则。当我们建议他做1600次实验时(远远超出了他所认为的经常),他就做出了归纳:“*铁棒的停留位置会更规律。*”虽然他的观点并未遵循这个推论暗示的方向,他倒退到了首次使用了阶段2中常见的推理模式(实验次数少了意味着不可预期也少了)。最后,他总结出:“*相同的事。*”杰克有着相同的初始反应,但是他最后意识到“*当我们转800次时,概率就更大了*”,这就由偶然差异中的补偿给出了更大规律性的意义(劳的这个回答与阶段2中陈的说法相悖,“*16次比800次中的概率更多*”)。最后,劳以最明确的方式构想出了适用于大数字法则的补偿机制。奇妙的是:在解释少量元素时,他用了几乎与阶段2中的

实验对象(例如,狄思普,7;6)所用的术语相同的术语阐述了这个缘由。因此,显然将阶段3中的实验对象与那些不知道小的大数字法则的实验对象区别出来的正是:物理可察觉情况和与伴随着理解数字上的比例差异的抽象归纳两者之间的差异。实际上,超出了具体形式及比例的归纳需要形式思维。因为前者包含了组合运算的所有可能案例的扩展,而后者需要建构关系之间的联系。

对于使用了磁铁的常数关系的归纳,以下是几个代表性的案例。

古格(12;7)　在我们放入了火柴盒后的第三个实验中惊讶于“*铁棒总是停在相同位置上*”,并决定自己旋转圆盘来“*看看铁棒是否会再次停在相同位置上*”。实验。“*是的,铁棒总是停在那里*(他拿走了火柴盒)。——你为什么要这样做?——*看看重量,这几对火柴盒的重量是相同的*。——所以呢?——(他拿走了其中一个装有磁铁的火柴盒,并注意到铁棒停得不那么明显了)*是距离*。(他拿走了稍远处的另一个装有磁铁的火柴盒,铁棒停在了其他地方)*我们之前拿走了其中一个有重量的火柴盒,如果拿走的是另一个,我们就会得到相同的结果了*(他将装有磁铁的火柴盒放回板子上,并拿走了重量为*B*且没有磁铁的火柴盒,他发现这种火柴盒与之前那些火柴盒的重量相同)。——你为什么要这样做?——*看看铁棒是停在这里*(装有磁铁的火柴盒),*还是那里*(没有磁铁的火柴盒)。”通过实验,他发现只有第一种火柴盒能够吸引铁棒。然后,他拿走了所有大约一英寸的火柴盒,除了那些重量为*D*的最轻的火柴盒。“为什么要这样做?——*看看是否会停在最近的火柴盒那里*。——(实验。)——*不,远处的火柴盒比近处的火柴盒影响更大*。(然后,他拿走了近处的其他火柴盒并实验)*火柴盒越近,引力越大*。——所以呢?——(他拿走了除重量为*A*的最重的火柴盒之外的所有火柴盒)*不是重量在起作用,因为铁棒并没有停在最重火柴盒的位置,而这是近处仅有的火柴盒*。——这说明了什么?——*有磁铁吸引铁棒*(他再次用装了磁铁,以及重量相同但没有磁铁的火柴盒做了试验)。”“*既然重量相同,那么重量就不重要了,因为总是会使铁棒停下来*。——如果我拿走一些(磁铁),而铁棒停在这些(最重的)火柴盒的位置,那么这说明了什么?——*说明如果磁铁很远,引力就不够大了*。”

欧拉(13;4)　在放入火柴盒后的第二个实验中说:“*肯定有磁铁。甚至能把铁棒拉回来。火柴盒里肯定有什么东西*。”他检验了火柴盒。“*这些*(重量为*B*的火柴盒)*比那些*(重量为*D*的火柴盒)*重。火柴盒的重量不同*。”他比较了所有装有磁铁的火柴盒的重量。“*肯定对旋转的圆盘有影响*。——我们要怎么做才能证明?——*我们可以把它们放在不同的位置*。”他注意到重量为*A*的火柴盒不能使铁棒停下来。然后,当他拿走了一个有磁铁的火柴盒之后,注意到铁棒移动了。“*看,铁棒跟着火柴盒走*”。他用几个不同的火柴盒做了相同的尝试,然后拿走了没有磁铁的火柴盒之外的所有火柴盒。“你为什么要这样做?——*如果这些火柴盒能使铁棒停下*

来,那么就能知道其他火柴盒没有阻碍作用了。"实验。"*没有用。——重量有影响吗?——没有。这些(重量为A的火柴盒)甚至更重,但是没有引力。*"

克拉(13;11) 没有考虑到磁铁的可能性,但是通过比较火柴盒的重量排除了重量因素。"*在任何情况下,都不是最重的火柴盒(重量为A)有引力。这些(重量为B且装有磁铁的火柴盒)与那些(重量为B但没有磁铁的火柴盒)同样重,但只有(前者)有引力。——所以呢?*"他拿走了某些装有磁铁的火柴盒。"*我想看看如果这些火柴盒在其能靠近的距离内有相同的影响……我认为就是火柴盒里的东西了。*"

这些实验对象与阶段2中的实验对象的差别,可以从活动中的两个关联元素中看出来。首先,他们的实验活动明显更好:他们自己分离因素,组织反证明,成功归纳排除或建立某些变量的作用。例如,重量或距离。不管是否猜测出火柴盒中隐藏着磁铁,他们都沿着相同的方法步骤进行实验,实验过程中改变数据,尤其是通过将作为证明手段的其他因素弃置一旁,修正单一关系时的数据。改变实验情形方面的极大灵活性导致了适用于本阶段的第二种新元素:通过假设–演绎方法重构现实的能力。我们刚刚在大数字法则中发现的正是这种形式思维,这也解释了排除运算的优先性。阶段2中已经说明:排除只有在没有共同元素(是颜色或不是颜色、是重量或不是重量)的分离中才能看到。在关于任务的关联及不再只是类别的具体关系或关联的形式阶段,排除成为一种可被立即用于假设的命题间运算:如果重量是原因,例如有个实验对象说最重的火柴盒应该是最有效的。既然不是这种情况,那么重量就直接被排除了。

因此,我们在所有情景中都看到了归纳机制的出现与偶然分布概念的达成这两者之间的紧密关系。同样,均等可能性的发现也恰恰伴随着阶段2中具体排除的发现、阶段3中大数字法则理解的出现,而后者与形成首次系统归纳及首次推理性构建出排除的形式过程有关。

第二部分
随 机 图

第四章 头尾游戏中的概率和“奇迹”

在研究了作为物理现象结果的概率感知发展之后，有必要分析随机概念的第二个方面：随机概念发展于成人和儿童都熟知的被称作概率游戏的游戏中。在科学史上，该游戏形成的概率理论和计算远远早于物理可能性的研究。毫无疑问，在投掷骰子、“头尾”、从广口瓶中拿筹码等游戏中都有物理因素。因此，它们在某种意义上都与物理可能性有关。但是，相对于第一章到第三章中的实验，这些游戏中的相互作用相对更为复杂。这其中包含了游戏者自身的操作行为，游戏者不再受限于从外部观察混合或分布，但是他们要大量画图、打赌等等。正是实验对象的这些运算或活动表现出了概率游戏中的不同心理方面，而非仅仅发现于观察物理概率，而且也是将逻辑与数学应用于概率的起点。这就是为什么我们在研究的第二部分分析玩头尾游戏、玩从广口瓶中拿弹珠的游戏及随机图中儿童在可能性量化上的反应。

本章将使用“头尾”游戏。正如在第三章中，我们已经尝试对比随机分布的感知及稳定因果关系的发现。为了让玩头尾游戏中的儿童更好地理解概率的概念，我们将尝试比较常规游戏中投掷的自由分布和只出现“头”或“尾”游戏中的“奇迹”。实际上，概率就是奇迹的妥协。也即是，对儿童和我们而言，要理解不确定性分布的特点将意味着承认排除连续“头”或“尾”的微乎其微的可能性，或者甚至根本的不可能性。因此，我们已经为实验对象准备了允许我们随意制造出奇迹，在概率上作弊的装置，这样做就是为了分析他们的反应。他们在面对这种难以置信的事实时，是否会认为一切都是正常的？以及这种印象是否来源于频度或罕见概念的视角？或者他们是否准备好了在几乎非常少的可能性意义上获得不可能性的印象？哪个是立即怀疑干预把戏中最明显的(等同于第三章磁铁案例中的非偶然因果关系的感知)？

由此，我们使用了两个不同的实验。一个实验包含了展示一面标记了十字，而另一面标记了圆圈的白色筹码。我们让实验对象玩“头尾”游戏，并在一次投掷10到20个筹码时预测结果。然后，不让儿童怀疑任何替代，我们扔出了两面都是十字的15个固定筹码。另一个实验中有装了红蓝弹珠的袋子。在让儿童预测并注意了实验结果之后，我们用另一个只装有蓝色弹珠的袋子替换了这个袋子。在两个实验中，在已经分析完

实验对象的反应后,最后我们向他展示了这其中的小把戏,如果他还未发现小把戏,我们就接着做最后的实验:他不知道我们是否使用了固定装置,我们一个接一个投掷了作弊用的筹码或从作弊的袋子(装有蓝色弹珠的袋子)中一个接一个地拿出了弹珠。然后,我们试图抓住在什么时候,由于什么原因使实验对象明确意识到了这是一个有同质或固定元素的实验。最后的实验经常给出哪个儿童有可能做出可能性判断的最明确启示。

我们可以将"头尾"实验及固定筹码测试的反应划分为三个阶段。在阶段1(到大约7岁)中,儿童多少会有些惊讶(尽管有时候一点也不)出现的全是"头"的事实,但是并不能从可能性的视角来理解这种不可能性。即使儿童发现了作弊之后(在实验的不同阶段指出),他依然认为使用正常筹码时可以出现奇迹。相反,阶段2(7到11岁)的特点是可能性的全部感知,但是两个假设(常规或固定组元素)之间的最后选择还未表现出细微的量化组合。最后,这只能出现在阶段3中。弹珠实验稍微简单一些。

第一节　第一阶段:罕见混合但非随机混合的感知

首先,这是一些事实。

克努(4;7)　"如果我扔出这个筹码,我们会看到圆圈还是十字?——*圆圈*。——确定吗?——*是的,可能是十字。我不知道。我来看看*。——你自己扔吧。——*圆圈*。——这次会是什么?——*还是圆圈*。——试试看。——*十字*。(他又扔了一次)*还是十字*。——如果把全部的筹码都扔出去,会怎样?——*有些会十字朝上着地,另外一些会圆圈朝上着地*。——(实验)*圆圈朝上的多一个*。——再扔一次呢?——*还是圆圈、十字两种朝上着地*。(假筹码。)*都是十字。太奇怪了*。——这是怎么发生的呢?——*像那样*。——但是怎样……是作弊吗?——*是的,你用手作弊了*。——(我们使劲摇晃了筹码,然后再做了一遍)发生什么了?——*我不知道。太奇怪了*。——你自己试试看。(他清空了袋子)为什么都是十字?——*我不知道*。——你猜是作弊吗?——*我不知道。所有的筹码都是以相同的方式落下,相同的面朝上*。"

派克(5;0)　"哪面朝上?——*不知道*。——(圆圈)现在呢?——*十字*。——为什么?——*因为*……——如果我们扔出去很多个筹码,会不会都是十字朝上?——*不可能。是圆圈和十字都有*。——很多圆圈,少量十字?——*不是,很多圆圈,很多十字*。——很好。为什么?……——(假筹码。)——*啊,所有的都是十字*(他非常吃惊,而且高兴)。——为什么?——*不知道*。——(我们又试了一次)"*还是都是十字*。——怎么发生的?——*不知道的*。——作弊了吗?——*没有*。——可能出现很多次都是相同面朝上着地吗?——*是的,因为我们扔了很多*

个筹码。——但是我说了这样是作弊了。想想看。——不知道。——看(我们翻过来一个筹码)。——两面都是十字。——有些筹码(我们从第一个袋子里拿的,有圆圈和十字,给他看了筹码的两面),能出现都是十字朝上的情况吗?——是的。"

温(5;2) 似乎没有玩"头尾"游戏的经验。"如果我把这个筹码扔出去,筹码着地时会十字还是圆圈朝上?——我不知道。如果一个人从来就没有看见过,他是不能知道的。——我们应该如何做?——我们必须试试。——(我们一个接一个地扔出去了20个筹码。温对游戏越来越感兴趣。)——哦,有些是十字!还有些是圆圈!(随后,朝上的圆圈比朝上的十字多。温分成了两组比较结果)十字不够多。——为什么圆圈多?——不知道。——如果再扔一次会怎样?——或许两种都会有。——每种有多少?——我们来看看。或许圆圈更多,因为上次十字多。——可能都是十字吗?——或许一个十字,剩下的都是圆圈。——(实验)——混合的……——(假筹码。)——都是十字(他没有惊讶)。——怎么发生的?——不知道。(在投掷筹码中,温发现筹码的另一面也是十字)哦,另一面也是十字。——对的,如果我们再做一次,会如何落下?——不知道。——都是十字或都是圆圈?——不知道。——或许一半圆圈,一半十字?——是的。——(实验)——哦,还是都是十字。(他翻过来一个筹码)另一面也是十字。——你认为每个筹码的另一面都是十字吗?——不知道。我们必须看看所有的筹码(他这样做了)。——用那些真的筹码,也就是那些一面是十字且另一面是圆圈的筹码,能出现所有都是十字或圆圈朝上着地的情况吗?——是的。——如果我们扔出去很多,可能都是十字朝上着地吗?——不知道。"

查普(5;4) 认为第一次筹码会十字朝上着地,因为:"十字(比圆圈)大。——试试看。——(他扔出去一个)是圆圈。——下次呢?(实验)——十字。——现在,如果我们一起扔出去很多个筹码,会不会都是十字朝上?——不会,因为都是十字朝上落下,在下落过程中会反转并相互碰撞。——为什么?——是它们落下的方式。它们不能都是十字或圆圈落下。——(假筹码。)——同时都是十字(他大为惊讶)。——你自己试试。——是的,都是十字朝上落下。——再试试。——还是都是十字。——再做。——很有趣,还是都是十字。——为什么会这样?——在落下时,都是那面。——你不认为作弊了吗?……(我们给了他一个筹码)。——两面都是十字。——用那些真的筹码(我们给他看袋子,有十字和圆圈标记的筹码),可能都是十字朝上落下吗?——是的,如果我们希望是这样。"

玛(6;0) 在一个接一个扔筹码的几次实验中预测出先是圆圈,然后是十字。"如果我全部扔出去,落下时可能是相同面朝上吗?——是的,可能会。——哪面?——圆圈。——为什么?——十字会都朝下。——可能一半十字,一半圆圈吗?——是的。——看(我们扔出去20个筹码)。——是的(刚好一样一半)。——(假筹码)——都是十字。——(我们又做了一次。)——还是都是小十字。——为

什么？——*因为所有的小圆圈都朝下。*——如果再做一次呢？——*都是小圆圈。*——再试试看(我们给了儿童装有真筹码的袋子,扔出去的是假筹码)。为什么你的是混合的,而我们的是只有十字的？——*因为你的那些小十字都朝下了。*——但是为什么我的那些都朝下了,而你的不是？——*不知道。*——你不认为作弊了吗？——*没有作弊,你没有像这样扔出去。*——好的。你自己扔出去(我们给了他装有真筹码的袋子)。——*十字和圆圈都有。*——(我们给了他装有假筹码的袋子)——*什么也没有,除了十字。这是因为我们扔得很重。*——好的,把筹码扔出去,这样就混合了(他试了)。为什么你不能扔出一些十字？——*不知道。*——作弊了吗？——*没有。*——但是我说有。——*是因为我们扔得太重了。*"

克莱(6;11)　预测出了混合,"*因为不可能都是一面朝上落下。*——如果扔出去1000个筹码呢？——*300个十字,700个圆圈。*——为什么？——*因为不可能都是一样的。*——让我们用这个袋子试试看(装有假筹码)。——*都是十字。*——为什么？——*不知道。*——如果再做一次呢？——*或许是一个圆圈,其他都是十字。*——为什么？——*因为已经有很多十字了。*——(实验)——*除了十字,还是什么都没有。*——作弊了吗？——*哦,不可能的。*——我说作弊了。——*没有。*——如果我扔出1000个筹码,可能都是十字朝上吗？——*是的,有可能。*——经常吗？——*不是。*"

这是我们在4岁多的儿童身上观察到的最基本反应的案例。在此可以发现一定数量的稳定趋势,而这正是第一阶段的特点。

首先,当实验对象确实观察某个实验,而实验反应截然不同于用于检验此前假设的实验时,就会出现现象论或某种顺从。对儿童而言,这是非常自然的态度,正如温所说的:"*如果我们从来都没有看到过,我不可能知道的。*"然而,正是这种态度使个体把发生的事视为是很自然的,而且将其当作现实加以接受。这就是为什么这些实验对象在面对假筹码直到我们提示的时候都不认为存在作弊。从现象主义的视角而言,当所有筹码都十字朝上落下时是不存在奇迹的,不过只是一种新的事实。

源于第一个特点的第二个特点就是所谓的消极归纳,[①]或经验性归纳(不同于积极或实验性归纳),这种归纳建立于什么是经常或罕见的简单感知基础之上。对于这些儿童中的大部分而言,扔筹码出现的圆圈与十字一样多,但这只是实验教会他们的,而不是从组合运算中推断出来的。这就是为什么他们不认为假筹码奇怪或没有困难地就接受了事实,而且非常自然或仅仅有趣,因为罕见(克努)。第一次看到"头尾"游戏的温认为这很自然,甚至一点也不惊讶,尽管他的预测与我们后来的实验结果相悖。查普以相同方式的反应立即发现了解释,其赘述特点表明了最纯净的现象:"*当筹码落下时,会翻*

---

① 消极是相对意义上的,是迁移和归纳的中间状态。

向那面。"简言之，那些体验游戏的反应对实验对象而言就是体验不寻常的经历；而对其他人而言，却是不能理解他们什么也不惊讶。

但是，这只是他们反应的现象层面，还有另一种很重要的反应，而且我们可以从后面的章节中知晓。在这个有意义的案例上，我们发现第三个特点在缺乏经验的温身上体现得非常清楚：5个实验之后，这个孩子突然从圆圈远远多于十字的事实中做出了总结，下一组将会出现"*更多十字，因为上次实验中圆圈多一些*"。因此，存在看到补偿和平衡化的趋势。毫无疑问，在这种趋势中，感知性对称、公平、充分原因等要素发挥了部分作用（不存在一面胜过另一面的原因）。因此，我们同时有大量客观、主观方面的动机。

第四个特点源于第三个特点，就像第二个特点源于第一个特点那样。当儿童为所有筹码都是十字朝上落下的事实找到了客观原因（"*它们以那样的方式落下*"）之外的解释时，他认为这要归因于扔筹码之人的力量。"*是你用手作弊了。*"克努说，"*用手作弊。*"玛也是这样说的："*你像这样扔出去的。*"他认为他也可以这样只是以一定力量、没有困难的方式扔筹码。儿童已经注意到了混合，而且已经看到了在下落过程中的相互碰撞（"*在下落时会翻转*"，查普在实验的开始部分准确地解释了筹码不可能相同面朝上落下），但是他们仍然认为用一定的方式扔筹码可以出现只有十字朝上的情况。

接下来，总结阶段1中实验对象的反应：当筹码随机落下时，实验对象用现象主义和自我中心知觉（就是前运算知觉）解释了结果。现象主义可以在频度和稀有概念中看到，且儿童仍然是凭借经验知道的。自我中心可以在补偿概念的客观方面看到。尽管当筹码都是十字朝上落下时，儿童的现象主义使其毫无困难地就接受了事实（"*可能会发生*"），但其自我中心要归因于以避免混合的方式扔筹码。总之，这些实验对象还没有获得像我们在第一章到第三章的阶段1中的实验对象身上看到的那么精准的随机混合概念。即使他们可以观察材料及混合的经验行为，然而他们还是不能洞察逻辑的、数学的系统组合和排列的结果。这正是他们缺乏概率、可能性概念，且转而寻找混合本身的隐藏控制力的原因。

这些解释的价值的最好证明就是几次假筹码实验之后，儿童对有十字和圆圈的真筹码的反应。实际上，我们在实验的最后环节告知了每个实验对象他们被作弊欺骗了。然而，当我们继续使用真筹码时，他们还是认为所有筹码都会十字朝上落下。值得注意的是，首先是（此前对游戏一无所知的）温的非常有意义的反应。当他看到假筹码都是十字朝上落下时，他随机翻起了一个，并发现另一面也是十字，但他并没有突然受到启发总结出剩下的所有筹码的结果。后来，对温来说，使用真筹码很自然地就想象出了所有筹码还是会都是十字朝上落下，即使是在他已经看到第二个袋子的筹码是固定的之后。查普的观点与此相同。克莱甚至宣布了1000筹码的可能性，并承认"*不能经常发生*"。毫无疑问，我们可以说这是已经被愚弄过的儿童后来默许了一切。相反，我们将会看到阶段2中的儿童是不会这样的，这就是为什么要在阶段1中向儿童提问。

第二节　第二阶段:概率和整体可能性

阶段2的最显著特点就是儿童拒绝接受假筹码的实验结果。儿童不相信不作弊就会出现这样的结果。这些反应基本可以在7岁之后看到,但是我们有一些从6岁开始的案例。

汉(5;11,提前的)　“*筹码会怎样落下?*——*一面朝上落下,还有另一面朝上落下。*——(我们扔出了一些筹码)如果继续扔2000个筹码呢?——*1000个十字,1000个圆圈。*——(我们扔出了假筹码。)——*所有的都是十字!*(他想了一会儿)*是因为两面都是十字。*——真筹码也会那样落下吗?——*不能,因为会一面朝上落下,还有另一面朝上落下。永远不可能都是相同面朝上落下。*——为什么?——*不可能相同面朝上落下,因为在下落时会随机翻转。*”

巴拉(6;5)　预测出有时候十字会比圆圈多一些,其他时间会圆圈多。我们扔出了假筹码。“*除了十字,什么都没有!*——如果再做一次呢?——*相同。*——为什么?——*可能是因为反面也是十字。*”

贝尔(7;2)　当我们一个接一个地扔筹码时,他在第二次扔筹码时做出了预测,“*可能是十字。*——为什么?——*因为之前就是十字。*——(筹码再次十字朝上落下)现在呢?——*圆圈。*——为什么?——*不能总是相同面朝上落下。*——为什么?——*不知道。*——(但他继续成对地预测)如果一次把全部筹码都扔出去呢?——*两面都会有。*——数量相等?——*不是,一面多一些,另一面少一些。*——(实验。)——*每面数量相同。*——有原因吗?——*没有。*——(假筹码。)——*哦,确定两面都是相同的*(他没有观察就立即做出了反应)。——真筹码可能相同面朝上落下吗?——*不可能。筹码太多了,而且很混合。*”

迈尔(8;7)　拒绝详细预测。“*会任何面朝上落下。*——如果把筹码都扔出去,会哪面朝上呢?——*十字和圆圈都有。*——一种多一些,还是每种的数量相同?——*没有办法知道。*——(实验。)——*基本相同。*——为什么?——*因为是混合的。*——(假筹码。)——*都是十字!*——为什么?——(又做了两次实验。)——*是因为两面都是十字。*——你怎么猜出来的?第一次扔的时候你知道吗?——*不知道。*——是在第二次扔筹码时知道的吗?——*是的,但是不是完全确定。*——第三次扔筹码时知道吗?——*是的,完全确定。*——用真筹码可以得到这样的结果吗?——*不能。*——如果连续扔1000个筹码呢?——*可能会。*——10 000个呢?——*可能吧。*——更可能是在1000个还是10 000个筹码的实验中?——*10 000个。*——为什么?”我们告诉他打算从其中一个袋子里逐个拿出筹码并扔出去,看

看他是否可以猜出我们正在从哪个袋子里拿的筹码。"第一个。——*是两面都有十字的筹码*。——确定吗？——*不确定*。——第二个呢？——*不能确定*。——第三个呢？——*两面都有十字的筹码*。——确定吗？——*是的*。——不可能是一个真筹码连续出现3次十字朝上落下的情况吗？——*是的，不可能的*。——第四个呢？——*不可能*。——第五个呢？——*不可能*。——你需要多少次实验才能明确知道两面都有十字？——*不知道*。"

曼(9;5) "如果我把所有筹码都扔出去，会怎样？——*会都落下来，有些十字朝上，还有些圆圈朝上*。——可能都是十字或圆圈朝上落下吗？——*是的，但是不经常*。——在1000次实验中，会发生多少次？——*两三次*。——在10次实验中呢？——*我想是1次*。——(假筹码。)——*都一样的*。——为什么？——*可能另一面也是十字*。——你确定吗？——*不确定，可能吧*(他看了看)。*是的，背面也有十字*。——如果用真筹码，可能会这样吗？——*可能会，但是很罕见*。"我们要求曼猜猜，我们打算扔出去的筹码，是从装有假筹码还是真筹码的袋子里拿出来的。"第一个。——*可能另一面也是十字，也可能是圆圈*。——第二个呢？——*相同*。——第三个呢？——*相同*。"等等。"第十四个呢？——*不确定*。——第十五个呢？——*两面都是十字*。——为什么？——*如果不是，就会出现一些圆圈*。"

我们看到了这个阶段的反应和前一阶段反应的区别。在阶段1的实验对象还只能以经验频度的术语说话时，这些实验对象立即就以混合和组合的方式看到了可能性："*它们不可能以相同面朝上落下，因为在下落过程中会随机翻转*。"汉说。贝尔也说："*因为它们太混合了*。"因此，对这些实验对象而言，随机混合有组合的重要性，而不再仅仅是材料的混合。

这正是当他们面对假筹码时有非常清楚的态度的原因。因为他们早期的组合知觉使其超越了现象主义和自我中心的初级层次，不再局限于基于投掷力量的解释，而是立即意识到投掷的结果与可能性相反。他们意识到材料本身就是混合的，有些实验对象是立即意识到的，还有些是犹豫过后才意识到的。汉过了一会儿说，"*是因为两面都是十字*。"这正是贝尔甚至并未检查筹码另一面时就说的话。"*可能另一面有十字*。"巴拉猜测，他只检查了一个筹码就做出了整体的判断(与阶段1中温的做法相反)。实验对象迈尔在第二次投掷之后做出了假设，在第三次投掷时明确了假设。简言之，不管发现方式是什么，这都立即呈现出不同于第一阶段的思维导向。

不过，阶段2和3的分割线更为困难，自然是因为将两个阶段分开的差异性与组合运算(参见第七章)的发展有关，而且当前的实验并未注意到这样的组合，而只关注了其间接结果。也即是，从广义上说，我们是在比较不同迹象中已经发现(但是没有任何精确的客观迹象可以使我们据此做出判断)的是：这个阶段的儿童确实已经有了可能性的整体感知，但是没有达到需要持续发展的更精细评估。对于知晓真筹码是否会产生与

假筹码相同的结果这个问题，实验对象的回答正确——不会出现，或只能很罕见地出现。迈尔甚至足以预测出更可能发生于10 000个筹码的实验而非1000个筹码的实验中。对于知晓真筹码是否会出现更多十字或圆圈朝上落下或每种数目相同的问题，他们只能回答出他们不知道。因此，他们不理解这当中可能性的程度不同，每种50%是最可能的分布。此外，当这是个判断从装有真筹码或混合筹码的两个袋子中的哪个袋子拿筹码的问题时，我们投掷筹码，相同的实验对象只是试图猜测或怀疑，而且仅仅是在大约第十四个或第十五个实验时他们才会突然确定，例如曼。我们将会在阶段3中发现差异更微小的反应。

第三节　第三阶段：可能性的量化

与组合运算(从第七章到第九章)并行，最后一个阶段的实验对象能在所谓的可能性的问题上做出更好的判断。前一个阶段，我们已经看到了这其中的部分困难。

莫尔(11;9)　宣称我们不能知道投掷20次筹码的结果，是十字多，还是圆圈多，或者两者的数量相同，因为“*这是概率，视情况而定。*——更有可能是在1000筹码的投掷实验还是10 000个筹码的投掷实验中出现一样一半的情况？——*更有可能出现在1 000 000个筹码的投掷实验中。*——(假筹码。)——*都是十字！你肯定在这里的某处作弊了。*——(他翻起了一个筹码)*那里！*——但是它们都是另一面有十字吗？——*毫无疑问是。*——用真筹码会出现这种情况吗？——*是的，如果我们扔很多次。*”猜筹码是从第一个袋子还是作弊的袋子里拿出来的：“第一个。——*好吧，是概率。不知道。*——第二个。——*如果我们不知道第一个，我也不会知道第二个。*——第三个。——*如果你接着一个一个地拿，不可能每次都出现十字。*”

塔姆(12;10)　对于一个筹码：“*这是由概率决定的，但是如果知道筹码是混合的，更多的概率是每种一半。*——(假筹码。)——*都是十字*(他翻起了一个筹码)。*哦，两面是相同的。*——但是这一堆中可能有1个另一面有圆圈的真筹码吗？——*是的，可能有1个。*——2个呢？——*是的，有可能。*——5个呢？——*不可能。*”判断哪个袋子装有真筹码：“第一个。——*可能是作弊的那个，但是我不确定。*——第二个。——*我们不能确定。*——第三个。——*这是我们得到的第三个十字。如果我们继续扔筹码，我们就会知道。2个可以发生，但是3个就不可能了。*——我们怎样做才能确定？——*继续扔。我们正在逐步确定。*——为什么？——*因为我们看到了圆圈和十字的数量。如果除了十字，什么也没有，我们就会知道这些假筹码。*——为什么我们对5个比对3个更确定？——*因为3个中的概率不大。*——*20*

*相对于10呢？——一样的。——*用真筹码可能会出现都是十字朝上落下的情况吗？——*不能。*——如果用5个筹码，可能会出现5个十字朝上吗？——*是的，但是这个数字（比袋子2中的20个）小。*——必须扔多少个筹码才能出现5个十字呢？——*25个。*——6个十字朝上的筹码呢？——*35到40个。*——7个十字朝上的筹码呢？——*不可能。*”

索姆（13；5） 一次扔20个筹码：“圆圈可能比十字多吗？——*一种比另一种多只能是概率。*——可能都是十字朝上落下吗？——*不可能。*——如果投掷1000个筹码呢？——*可能吧。*——筹码个数多还是筹码个数少的实验更容易出现这种情况？——*筹码个数多的实验。*”判断哪个袋子里装有真筹码。“第一个？——*我们不能知道。*——第二个？——*不知道。*——第三个？——*仍然不知道。*——第四个？——*可能是作弊的那个袋子。*——确定吗？——*不确定。*——如果我们继续呢？——*我们会更确定。*——为什么？——*因为如果筹码很多，出现所有的都是十字朝上的情况就很异常了。*”

比较这些反应与阶段2的反应，我们看到的进步是：可能性知觉已经对部分实验对象量化的持续发展造成了影响。毫无疑问，正如在所有概率发展的研究中，没有单一、绝对的迹象使我们可以明确确定这种特点的出现。但是所有迹象本身很重要，尤其是比较不同分析的结果之时的重叠性（尤其是第三章中的分析结果）。

在猜测我们从哪个袋子里一个接一个地拿筹码的问题中，这组与先前那组的反应差异很明显。在阶段2中，实验对象有立即做出判断的趋向（参见第2部分中的迈尔），或如果不能在第一个筹码上就做出判断，那么当他没有过渡而突然确信之时就会有瞬间的怀疑（参见第2部分中的曼）。相反，我们看到当前阶段的实验对象表现出可能性的持续发展。莫尔愿意画出这种格式，但是塔姆非常清晰地解释了这种发展：“*如果你继续，我们就会知道……我们会越来越确定。*”他这样说是因为，在小数字中“*概率不大*”（判断甚至更为重要）。因此，正是这个原因，所以在一次投掷25个筹码中可能会同时出现5个十字；但是如果要得到6个十字，我们就需要投掷35到40个筹码。而要得到7个十字就是“*不可能的*”。尽管这些约数比较随意，但是却给出了可能性增加的重要意义，根据索姆“*我们将会总是更确定*”，这会引发可能性的状态。将这些反应与第三章（第六部分）中所涉及大数字法则的对应阶段中的实验对象的反思做比较，我们注意到了是相同的机制在当前反应中发挥作用。

对于知晓一次投掷20个或多于20个真筹码会出现什么情况时，我们注意到了超越阶段2的类似发展。实际上，阶段3中的实验对象再次进入可能性增加的持续发展之中。最可能的状态是一半十字和一半圆圈，且随着投掷筹码数量的增加，这种可能性是逐渐增加的（参见莫尔的1 000 000个筹码的投掷）。相反，最小可能性状态出现的都是十字或都是圆圈，且即使这种状态在大数字实验中是可能的（也参见莫尔）。

简言之,本阶段中的可能性分裂成逐级判断,取代了阶段2中依然是整体或整块的可能性,而这反映出了内在量化的出现。我们试图在第六章中使用新方法来研究这种量化。此外,这种持续性发展标志着相对增加的可能性。这种相对性(在相悖于简单归因判断中发挥作用的不同复杂数据组合的意义上)可能构成了不同组合运算发展的最终结果。其中,不同组合运算的作用我们已经在先前章节中研究过了,而且将会在第七章到第九章中继续研究。

第四节　弹珠实验

弹珠实验的构成——其结果我们将会以反例的形式快速描述——刚好与先前实验的构成相同,唯一的差别就是这个实验可以使儿童更容易地理解单色弹珠的投掷。首先,我们给儿童看了袋子A,这个袋子里混合装了20个蓝色弹珠和20个红色弹珠,并问了他几个关于会出现什么结果的问题。然后,我们给他看只装有蓝色弹珠的袋子B。在使用假筹码的案例中,困难是理解外观上与第一个袋子中的筹码类似的筹码实际上两面都是十字。相反,在蓝色弹珠袋子的实验中,仅仅是缺少了一种预期元素。这就使实验对象可以更容易地总结出不是混合不充分就是只有一种颜色的结论。因此,一方面,正确答案能够更快地出现,因为可以被简单解释的差异以及数据的透明性可以被儿童更好地凭知觉感知。但是三类反应的连续次序是相同的,而这正是我们希望建立的。[①]另一方面,儿童可以以比发现筹码作弊更快的速度发现弹珠作弊。儿童在确定情境及对与呈现数目相关的额外问题时的反应非常有趣。这里是阶段1中儿童的反应。

桂(4;4)　混合弹珠。我们给他看了颜色,并晃动了袋子:"如果拿出其中一个,这个弹珠会是什么颜色?——*蓝色的*(正确)。——下一个呢?——*蓝色的*(还是正确的)。——下一个呢?——*红色的*。——你确定吗?——*是的*(他再次拿出了一个蓝色弹珠)。——如果我们拿出一把呢?——*蓝色和红色的弹珠*。——(实验:结果正确)袋子B(只有蓝色弹珠)。我们晃动了袋子:如果拿出一把,会是什么颜色?——*红色和蓝色的弹珠*。——(他拿出了一把)*都是蓝色的*。——为什么?……如果再拿一次呢?——*红色的*。——只有红色的,还是红色、蓝色的都有?——*只有红色的*。——(实验。)——*都是蓝色的*。——再试试看。——(连续实验)*都是蓝色的*。(他似乎发现这很自然)*为什么总是蓝色的?*……——(我们再次拿出了袋子A,给他看袋子里的混合弹珠并晃动袋子)如果我们拿出一把,会是什么颜色的?——*都是蓝色的*。"

---

① 简短起见,我们的研究局限于阶段1和2。

艾森(4;7)　袋子A:"如果你拿出一把弹珠,你会拿到什么颜色的弹珠?——*都是蓝色的弹珠。*——如果再拿出一把呢?——*都是红色的。*——第三把呢?——*两种颜色的都有。*——试试看。——*两种颜色的弹珠。*——再试试看。——*两种颜色的弹珠。*"袋子B:"哪种颜色的弹珠?——*两种颜色的都有。*——(实验。)——*只有蓝色的。*——现在呢?——*只有红色的。*——(他连续试了两次)*红色的弹珠不想出现。*——为什么?——*蓝色弹珠把红色弹珠推出来了。*——再试试看。"几次尝试之后,他说"*只有蓝色的弹珠*"。

雷(5;6)　预测出袋子A的结果是蓝色和红色交替出现,但是每次都错了。"你为什么错了?——*人是可能出错的。*——现在呢?——*红色的。*——确定吗?——*是的,因为这次我不可能错。*——(实验:蓝色的)为什么?——*我还不够仔细。*"袋子B:"会是哪种颜色的弹珠?——*两种颜色的都有。*——试试看。——*只有蓝色的弹珠。*——*再试试看。*——*现在我知道结果了,只有蓝色弹珠。*(我们往袋子A中放了15个红色弹珠、10个蓝色弹珠,而且让他数了数)多少个弹珠?——*15个红色弹珠。10个蓝色弹珠。*——如果你拿出一把,每种颜色的弹珠会各是多少?——*每种颜色的数量相同。*——为什么?——*因为那样我不会被愚弄,而不是这次。*(他拿出了4个红色弹珠、3个蓝色弹珠……)*我几乎对了。*——现在呢?——*每种颜色弹珠的数量相同。*(他拿出了4个红色弹珠、2个蓝色弹珠)*红色的弹珠多2个,但基本是相同的。*——(我清空了袋子并让他再次清点)如果你拿出一把弹珠,哪种颜色的弹珠会多一些?——*每种颜色弹珠的数量相同,或者可能是红色的弹珠多一些,或我甚至认为蓝色弹珠多一些。*"

芬(6;1)　袋子B,拿出第三把弹珠之后:"*只有蓝色的弹珠。*"实验对象清点出袋子A里装有15个红色、10个蓝色弹珠:"袋子里哪种颜色的弹珠多一些?——*红色的弹珠多。*——如果你拿出一把弹珠,拿出的弹珠中哪种颜色的多一些?——*我不知道。*——我知道吗?——*不知道。*"

罗伯(6;6)　袋子A:"如果你拿出一把弹珠,我们可以知道你拿出的是什么颜色的弹珠吗?全部是红色的还是全部是蓝色的,或混合的(我们给他看完袋子里的东西之后就充分晃动袋子)?——*我们不能知道。*——你认为是什么颜色的?——*都是红色的。*——观察。——(他拿出的蓝色弹珠比红色弹珠多)*蓝色的多。*——为什么?——*可能是因为蓝色弹珠本来就多。*——袋子里有什么?——*数量相同的两种颜色的弹珠。*——如果你再拿一把,会是什么样的?——*蓝色弹珠多一些*(他拿出了5个红色、6个蓝色弹珠)。——下次呢?——*蓝色弹珠多一些。*"袋子B:他拿出了一把弹珠,"*都是蓝色的。*——再一次呢?——*还是11个蓝色弹珠*(他非常惊讶)。——为什么?——*可能袋子里都是蓝色弹珠。*——确定吗?——*不确定。*——再拿一把呢?——*都是蓝色的。*——袋子里可能有一个红色弹珠吗?——*是的。*——可能有10个红色弹珠吗?——*是的。*——袋子里的那

些还会都是红色的弹珠吗？——*是的*。”袋子A：实验对象清点出了10个蓝色弹珠、15个红色弹珠：“如果你拿出一把弹珠，这些弹珠是蓝色的多，还是红色的多，或者是两种颜色的数量相同？——*蓝色的多*。——为什么……我们知道吗？——*是的，如果我们努力想*。——下次呢？——*蓝色的多*。——袋子里剩下的是什么样的？——*红色的多一些*。——如果你拿出一大把或一小把弹珠，哪种更可能拿出的红色弹珠多一些？——*一小把*(他拿出了几个)。*不，是一大把*。”

我们注意到这个阶段中年龄最小的实验对象，也即是从4岁到大约5岁或6岁的被袋子B愚弄了，就像第一节中的实验对象被两面都是十字的筹码所愚弄。他们不能总结出袋子里只装有蓝色的弹珠，或不能解释怎么拿出来的都是蓝色弹珠，或给出自我中心原因(*“红色弹珠不想出来”*或*“蓝色弹珠把红色弹珠推出来了”*等等)。反之，年龄稍长一些的实验对象能非常快地理解袋子里只装有蓝色的弹珠，而且我们在此重申此原因就是，比想象出两面都是十字的筹码更容易的是，凭知觉感觉到红色弹珠的缺失。但是此理解的意义是什么？构成了阶段2的反应吗？或仅仅是子阶段1B，因为与之相随的是阶段1的某些典型反应？

在这方面，我们可以注意到几个有趣的地方。第一，儿童经常以非常明显的矛盾的想象*“我们不能知道”*可以从袋子A里拿出哪种颜色的弹珠，但是*“我们可以，如果我们努力想”*，就像罗伯说的。现在，努力想就意味着能够想象出由混合引发的可能组合，并将其理解为是既定频度的结果。这个阶段的儿童不相信其面前的物理混合排除了行为的可能性或元素相互之间的潜在影响。因此，他仅仅试图重构元素，接受各元素之间的相互作用，不是补偿方向(这个很自然，且已经在第一节中探讨过了)，就是重复方向(这是非常奇怪的)。因此，已经在第一次投掷中观察到蓝色弹珠多一些的罗伯几次毫不犹豫地预测出*“蓝色的多”*，即使当我们在新游戏中使用了15个红色、10个蓝色弹珠。尤其明显的是，儿童认为在量化上没有差异。尽管已经清点出我们一次在袋子A里装了15个红色弹珠、10个蓝色弹珠，他还是没有在预测一把弹珠的颜色组成上注意到弹珠的数量差异。*“每种颜色弹珠的数量相同。”*例如，雷说，*“因为我这次不会错了。”*实验证明他每次都错了，最后他在记住了袋子里红色的弹珠多一些之后说，他拿出的弹珠中*“蓝色的多”*。

简言之，总结出这些儿童不理解随机混合的概念并非言过其实。回到(仅仅装有蓝色弹珠的)袋子B的问题上，我们看到儿童的反应并未达到阶段2的水平。首先，我们注意到即使在实验前，例如艾森和罗伯从(装有混合弹珠的)袋子A里拿出来的弹珠可能*“都是蓝色”*或*“都是红色”*。另一方面，当从袋子B中只能拿出蓝色弹珠时，几个实验对象甚至在检验了晃动袋子的力度之后依然认为下次会*“都是红色弹珠”*，就好像两种颜色混合在一起的弹珠已经从袋子里分离出来了，刚好可以一把抓住其中的一种。这正是艾森和雷的反应方式。罗伯在拿了几把都是蓝色的弹珠之后，认为剩余的弹珠可能都是红色的。即使他猜测出袋子仅仅装有蓝色弹珠之后，还是这样说。

此外,显然,对于阶段1B中的大部分实验对象而言,发现袋子B中仅仅装有蓝色弹珠并未形成组合混合概念的明确标志以及概率的概念。实际上,这只是与我们称为(第一节)消极或经验归纳相关且使之与积极或实验归纳区别开来的基础归纳过程的过程。儿童只能总结出蓝色跟着蓝色,因为他补充说一次投掷会让他看到下次是什么。这个事实仍然不值得注意:一方面,这说明了频度和稀有知觉的早熟;而另一方面,这不足以建构概率概念的基础,因为这个概念需要具备随机混合的概念。而随机混合的概念不仅是经验性的(材料混合)且是组合的。

阶段2中的实验对象即将为我们证明的正是这个事实。以下是三个例子,这些例子始于介于阶段1B和阶段2之间的中间阶段。

格尔(6;9) 袋子A:“第一把弹珠会是什么样的?——*红色和蓝色的*。——第二把呢?——*一样*。”等等。袋子B:“拿出一个弹珠,这个弹珠会是什么色的?——*红色的*。——(实验:连续三次都是蓝色的弹珠)——*那是因为红色的弹珠不像蓝色的弹珠一样多*。——拿出一把。——*都是蓝色的,那是因为有很多蓝色的弹珠,而红色的只有几个*。——再试试看。——*都是蓝色的弹珠*。——红色的弹珠在哪儿?——*可能都在下面*。——再抓一把。——(他拿出了4个蓝色的弹珠)*没有弹珠了*。”

韦(7;4) 袋子B:“抓出一把。——*都是蓝色的*。——为什么?——*因为*……——你再抓一把,你会拿出什么颜色的弹珠?——*蓝色的*。——没有红色的吗?——*没有*。——为什么?——*因为没有红色的*。——试试看。——*蓝色的这么多!*”袋子A:15个红色弹珠和10个蓝色弹珠:“你抓出一把弹珠,这些弹珠会是什么颜色的?——*红色的多*。——为什么?——因为袋子里红色的弹珠多。——(实验:4个红色的、6个蓝色弹珠)*怎么会这样!蓝色的弹珠多*。——为什么?——*因为我拿的不多*。——如果你拿的多一些呢?——*会是8个红色、6个蓝色的弹珠*。”

弗朗(7;6) 袋子B:“抓出一把。——*都是蓝色的*。——再抓一把呢?——*蓝色和红色的弹珠*。——为什么?——*如果它们混合得足够充分*。——(实验)——*不,袋子里只有蓝色的弹珠*。”袋子A:实验对象清点出了15个红色、10个蓝色弹珠,“*我们会拿出红色和蓝色弹珠,但是红色的多一些*。——为什么?——*因为我们拿走了一些蓝色的弹珠*。”

我们看到了这些反应与阶段1看到的之间的差异。儿童不满足于仅仅理解袋子B中只有蓝色弹珠,他已经能计算出作为量化结果的可能性(尤其是袋子A中装有15个红色、10个蓝色弹珠)。因此,当格尔第一次从袋子A中拿出蓝色弹珠时,他起初认为“*袋子里有很多蓝色的弹珠,只有几个红色的*”,然后他将其称之为不良混合。最后,他总结出所有的弹珠都是蓝色的。尤其是韦为他在预测从装有15个红色、10个蓝色弹珠的袋

子里拿出的弹珠红色比蓝色多上的错误,给出了令人惊讶的解释:他说他的样本太小了,一大把会更容易证实他的预测。简言之,这些回答中有两个使之与此前的回答区分出来的新元素:组合混合的概念(格尔和弗朗)和可能性量化的开始。

附　　录

关于已经在先前回答中看到的关于频率和罕见的感知,我们也花时间向本章中的实验对象询问了他们如何理解概率这个词,以及如何解释概率。[①]显然,口头概念并不能告诉我们思维的真实运作,但却在一定程度上形成了运算结果的有意识领会。这正是我们的想象方式。此外,有意识领会总是晚于运算本身发生,但其发展却总是再现出运算的发展,即使是部分的、不完美的再现。

在概率的口头概念案例中,我们实际发现了三类有趣的反应:第一类,不理解概率这个词的实验对象的反应(到大约6岁或7岁);第二类,那些给出了概率罕见或意外事件意义的实验对象的反应(6到9岁);最后一种,那些将概率定位独立于因果事件的相互作用或干预的实验对象的准确反应。为了便于技术上的接受,我们有时候会讲个小故事,问实验对象这是不是概率的问题,尤其是要求儿童讲个有赖于概率的故事或事件。

这是个不能理解概率的案例:"概率是什么意思?"*"就是当有些事发生得非常快,我不能以另一种方式说。*——例如?——*就像马上会有火灾。*"(米克,6;3)

这是个用罕见定义概率的案例:*"我做错事是概率性的。*——为什么是概率性的?——*因为不经常发生。啊,如果经常发生就不是概率了。*——再举个例子。——*我生病是概率性的。*——如果我说机器撞到我是概率性的,是不是这样就对了?——*是的,因为这不能每天都发生。*"(邦,9;1)

最后两个是用相互作用或干预定义概率的案例:*"概率:如果他已经先被邀请了,而他刚好那天生病了。*"(鲍勃,9;11)*"我不知道我是否要去看我祖母或阿姨,所以我就去看我祖母并发现我阿姨也在。*"(帕姆,13;1)

我们不是要纠结于这些口头定义的重要性,我们认为有必要将其从先前的反应中指出来。

---

① See also Marguerita Loosli-Usteri, "La notion du chez l'enfant," *Archives de Psychologie*, 23 (1931), No. 89.

第五章　帕里斯随机图

此前获得的结果(第四章第四节)已经使我们意识到了可能性的逐步量化问题在概率概念发展中的重要性。因此,只能恰当地、系统化地接受这个问题,而这正是我们在后续章节中所做的。首先,需要描述已经包含了可能性的量化实验,这些实验使我们可以将早期的分析整合起来,而且已经引导我们获得了随机混合的组合概念。

我们在一张图表上抽取了由大量元素构成的集合A(例如,15个黄色筹码),元素少一些的集合B(例如,10个红色筹码),元素更少的集合C(7个绿色筹码),元素最少的集合D(3个蓝色筹码)。我们把这些集合留在图表上,这样儿童就可以毫不费力地记住袋子里的四组元素并能将其混合均匀。然后,我们指导儿童把手放入袋子并拿出一定对数的筹码。要求儿童在每次绘图之前预测出可能的那对筹码(因为筹码的对数是画在图表上的,将筹码放在儿童的面前就是很自然的了,这样他就会知道袋子里还剩下了什么样的筹码,但是我们并没有给出与此相关的解释)。对于年龄小的儿童,我们也可以让他们预测出一次只拿一个筹码的图。

我们获得的结果的确与我们之前看到的一样。在阶段1中,儿童试图将预测做成可能数量组合的函数,但是总是相同类型的标准,其中之一就是游戏中所使用的元素的数量。在阶段2中,儿童开始寻找量化关系,但是没有理解需要在每次绘图之后要重新计算,因为袋子里剩余元素所减少的数量刚好就是每次拿出来的元素的数量。最后,在阶段3中,儿童将可能性量化为袋子中剩余筹码的函数。

第一节　第一阶段:系统可能性的缺失

首先,这是几个关于绘制单个元素的案例。

贝尔(5;1)　6个红色、2个蓝色筹码:"如果你没有看袋子就从袋子里往外拿筹码,你认为你拿出的筹码最可能是什么颜色的?——*红色的。*——为什么?——*因为我喜欢红色多一些。*——(相同的问题,但是这次使用了6个蓝色和2个红色筹码。)——*红色的。*——但是这儿有很多蓝色的筹码。你不认为可能是蓝色的吗?——*不。*——(6个蓝色、1个白色筹码。)[①]——*白色的。*——为什么?——*因*

① 我们每次都自然地重复所有问题,只是用词不同。

为白色筹码是第一个(他指着图表上案例的分布)。——但是我们在袋子里已经混合过了,你看到了(我们在图表上混合成一堆给他看)。现在,白色筹码不是第一个了。从袋子里拿出一个。你认为是什么颜色的?——白色的。——为什么?——因为你混合过了。——(与图表上相关的元素是6个白色筹码、1个红色筹码,我们一直这样做。)——红色的。——为什么?——我喜欢红色。——看看你拿到了什么颜色的筹码。——白色的。——为什么?——因为白色的筹码在袋子的角落里。”

列伊(5;8)　6个红色、4个蓝色、1个白色筹码:对应物在图表上,列伊自己晃动了袋子。“如果你从袋子里拿出一个筹码,这个筹码会是什么颜色的?——白色的。——为什么?——因为只有1个白色的筹码。——(我们从袋子里、图表上拿出了白色的筹码)现在,如果你再拿一个,这个筹码可能是什么颜色的?——蓝色的。——为什么?——(他伸开了手)红色的。——为什么是红色的,不是蓝色的?有原因吗?——没有。——(6个红色、1个白色筹码)红色的。——为什么?……——(4个白色、4个红色筹码)你会拿到什么颜色的筹码?——红色的。——为什么?更可能拿到红色的筹码吗?——是的。——为什么?”

孟(5;10)　6个蓝色、3个红色筹码:“红色的。——为什么?——因为……——(6个蓝色、2个红色筹码。)——蓝色的。——为什么?——因为……——(3个蓝色、6个红色筹码。)——蓝色的。——为什么?——因为……——(3个蓝色、6个红色筹码。)——蓝色的。——为什么?……(12个红色、1个白色筹码。)——白色的。——为什么?——因为只有一个白色的筹码。——(12个白色、1个红色筹码。)——红色的。——为什么?——因为你放进去一个。”

沙查(5;10)　1个玫瑰色、2个黄色、5个红色筹码:“红色的。——为什么?——因为有很多红色筹码。(我们加了6个蓝色筹码又做了一次)现在呢?——一个黄色筹码。——为什么更可能是个黄色筹码?——我不知道。——(1个玫瑰色、2个黄色、2个红色、6个蓝色筹码。)——我想是会出现个玫瑰色筹码。——为什么?……——(4个蓝色、4个黄色筹码)我们可以知道会出现、不会出现什么颜色的筹码吗?——可能是1个黄色的筹码。——为什么?——黄色的更漂亮。——(1个蓝色、2个黄色、3个绿色、4个红色、5个玫瑰色筹码)如果你拿出其中的两个筹码,你认为这两个筹码会是什么颜色的?——黄色的。——为什么?——因为这当中有2个筹码。——(我们使用了4个黄色、4个红色、4个玫瑰色筹码)现在呢?——红色和玫瑰色的。——为什么?——因为漂亮。”

劳(6;6)　2个蓝色和6个红色筹码:“红色的。——为什么?——因为红色的多一些。——(2个白色、5个红色、5个蓝色筹码。)——白色的。——为什么?——因为白色筹码不多,而红色和蓝色筹码数量相同。——(1个蓝色、3个红色、6个白色筹码。)——白色的。——为什么?——因为白色筹码多。——(3个玫瑰色、3个

红色、2个白色筹码。)——*玫瑰色的。*——为什么?——*因为有3个玫瑰色、3个红色筹码。*——(再加上4个筹码)现在呢?——*红色的,因为这当中红色的筹码不多。*"

芬(6;4) 2个白色、8个蓝色筹码:"*1个蓝色的筹码,因为蓝色的多。*——(4个白色、4个红色筹码。)——*我们不能知道,因为白色筹码和红色筹码一样多。*——(1个蓝色、2个绿色、2个玫瑰色、3个红色筹码。)——*1个红色筹码,因为红色筹码多。*——下次最可能是什么?1个绿色筹码还是1个玫瑰色筹码?——*1个玫瑰色的,因为刚好挨着红色筹码*(即记住了颜色或图表上的颜色)。——(1个蓝色、2个绿色、3个玫瑰色、4个红色、5个蓝色、6个黄色筹码)如果你拿出2个筹码,这2个筹码最可能是什么颜色的?——*2个黄色的,因为黄色的多。*(还有15个其他颜色的!)——如果不是黄色的呢?——*2个蓝色的。*——什么时候拿走了那些?——*2个红色的。*——如果我们随机选择,我们能拿到不同颜色的筹码吗?——*1个玫瑰色和1个红色的筹码*(即相邻的颜色)。"

佩(7;3) 1个白色、2个玫瑰色、3个绿色、4个红色、5个蓝色、6个黄色筹码:"如果你以任何方式随机选择,你可能会拿到什么颜色的筹码?——*白色的。*——为什么?——*因为这是第一个。*——如果我把它们混合起来,白色筹码还是第一个吗?——*是的。*——(我们拿走了所有的筹码并将其再次混合起来。)——*1个玫瑰色的。*——(6个蓝色、3个白色筹码)——*1个蓝色的。*——为什么?——*因为蓝色的多。*——(6个白色、5个黄色、4个蓝色、3个绿色、2个红色、1个玫瑰色筹码)如果你一次拿2个,你最有可能拿出什么颜色的筹码?——*红色的。*——为什么?——*因为刚好有2个。*——如果我们把筹码混合起来呢?——*白色和红色的。*——如果没有那些呢?——*红色和黄色的。*——如果混合得很均匀呢?——*白色和玫瑰色的*(即记忆中的两个极端)。"

这是第一阶段的普遍反应。除此之外,还有一个综合实验很出众,这个实验非常清晰地证明了我们在此前实验的这个阶段一直注意到的事实:如果年龄小的实验对象不能考虑到袋子中筹码的混合,换言之,不能将随机混合的特点理解为偶然相互作用系统,那么一切都会发生。正是这个原因,我们将与袋子中相同的筹码放在儿童面前的图表上充当记忆刺激,根据颜色安排等级(即1个白色、2个绿色、3个玫瑰色,等)。儿童不用数筹码就可以以这种方式看到差异。现在,我们发现很多实验对象即使知道袋子中的筹码是混合的(不仅是我们无限重复混合,而且儿童自己也晃动袋子混合袋子里的东西),他们所做出的决定依然就好像比例模型的次序会控制他们绘图的结果。换言之,就好像袋子中的筹码即使混合起来了,也还是会遵循由最初的模型所决定的次序。例如,贝尔开始预测出在6个蓝色筹码、1个白色筹码中,如果要拿出1个筹码,可能就是后者。他给出的原因是"*这是*(模型中的)*第一个*",他没有考虑到当前筹码的数量。当

我们通过强调混合表明白色筹码不再是第一个时，贝尔再次说是白色，这次*“是因为你把筹码混合起来了”*，就好像筹码的初始次序并没有被改变，反而是我们从混合筹码中拿出来了。因此，儿童在制定选择时遵循的第一个标准就是元素的初始次序。

第二个标准，同样经常，再次表明了儿童不能理解混合的概念，完全忽略了数量的影响。当我们告诉实验对象他要拿出1个筹码，或2个筹码时，经常发生的是儿童预测出他将会拿到的筹码的颜色恰好就是与模型上相同数量的筹码，也即是，1个筹码或2个筹码的颜色。换言之，他的决定并不全部基于数量最多的筹码的颜色最有可能被拿到的事实。相反，他预测出可以通过看模型上的哪个颜色的筹码的数量与其被要求拿出来的筹码的数量相同来判断筹码的颜色。列伊正是用这种方式从6个红色、4个蓝色、1个白色的筹码中，预测出他将会拿出1个白色筹码，*“因为只有1个白色筹码”*。孟在1个白色、12个红色筹码预测出他会拿到白色的筹码，*“因为只有1个白色筹码”*。在12个白色、1个红色筹码中预测出红色，*“因为我们放入了1个红色筹码”*。同样地，我们要求沙查随机拿出一对筹码，预测出会(从15个筹码中)拿到2个黄色的筹码，*“因为(模型上)只有2个黄色筹码”*。同样地，佩在21个筹码的实验中相信他会拿到一对红色的筹码，*“因为只有两个红色筹码”*。毫无疑问，这就是控制我们所得到的某些个别奇怪回答的观点，而这些个别奇怪回答给出的预测是基于我们所展现的小数量的筹码的。因此，劳在给出了一组2个蓝色和6个红色筹码的似乎正确的回答——*“红色，因为红色多一些”*之后，做出的选择是2个白色、5个红色、5个蓝色筹码，*“白色，因为白色的筹码不多，红色的筹码与蓝色的一样多”*。当我们希望只拿出一个筹码时，儿童似乎要说这不可能出现于数量较大的筹码中，尤其是各色筹码的数量相同时，因为没有什么可以决定其单个选择；而使用2个白色筹码，他没有选择，只能拿出2个筹码中的1个。

第三类标准与元素的关于要做出的预测的内在特点紧密相关，且总是没有考虑到混合的作用或实验中筹码的数量就做出的预测。正是这个原因，开始就提及了元素数量的芬认为：如果要拿2个不同颜色的筹码，那么这2个筹码会是“*红色的和玫瑰色的*”，因为这2个颜色紧挨着。同样地，沙查说“*红色和玫瑰色，因为颜色漂亮*”，那是两种临近的颜色。

第四个标准是主观优先权，就好像概率等同于简单的随意性。贝尔预测出*“红色的，因为我喜欢红色”*，沙查说，*“可能是黄色的，更漂亮一些”*。

最后，第五个标准表明了可能性更精确的概念：这就是数量本身。儿童似乎要说，在两组筹码中，数量多的那组更有可能出现在绘图中。但是，我们必须要警惕接近于我们自己的事物观点的解释，恰是因为这最后的标准总是与其他的标准混在一起的事实。准确地说，我们必须从两个极端的中间步调中区分出两个意义迥异的案例。在第一个案例中，就是那个我们发现在年龄最小的实验对象的眼中，数量仅仅是几个筹码中的品质：一个筹码以相同的方式被选出来，因为是第一个，或因为是模型上唯一的一个样例，或因为漂亮等，也可能是因为那个颜色多才会被选出来，不过儿童没有理解混合

的作用。例如,沙查在1个玫瑰色、2个黄色、5个红色筹码的实验中预测出*"红色的,因为我们有很多红色筹码*(注意,他说的是'我们',而不是'这儿')"。但是,当我们增加了6个蓝色筹码时,他无缘由地就预测出了黄色的筹码,接着转向了主观优先权标准。相反,第二个案例包含了似乎要转向正确量化概念的实验对象,而正确的量化概念被视为混合作用感知的其中一个方面。但是同时,当这些实验对象看到要求时,他们就退回到了其他标准上。例如,芬开始的回答接近于我们在阶段2时获得的回答:*"蓝色筹码,因为有很多蓝色的筹码。"*等。但是对于1个蓝色、2个绿色、2个玫瑰色、3个红色筹码的实验,他预测出*"1个玫瑰色筹码,因为紧挨着红色筹码"*,这仅仅是返回至序列的标准,或选择相似性的标准上。

现在,我们注意到第二个案例在这个阶段的最后变得更为寻常,这非常清楚地表明这是可能性感知发展的问题,而这将会在阶段2中得以发展。因此,我们可以像之前那样从这个案例中区分出子阶段1B是阶段1A和2的中间状态。

这些描述使我们得出了两个结论。第一,我们已经多次注意到,就是概率概念的起点——混合的概念远不能像看上去的那么基础、简单地被儿童掌握。当我们说混合之时,实际上,我们说的是与或多或少有些独立的元素因为相互作用的轨迹而发生接触(这可能是为什么根据库诺特定义概率的方式,混合就是独立元素之间相互作用的原型)。相反,阶段1中的实验对象质疑:即使元素是混合的,但它们还会保持混合之前的特点,即它们准确保持了混合所破坏的东西。例如,儿童预期袋子中被晃动过的弹珠保持了起初的次序,图表上表现出来的次序用于指导儿童的记忆。这些奇怪反应使我们回忆起此前用袋子A做实验的观察。斯泽明斯卡(Szeminska):对于某些年龄小的实验对象,当集合A源于一个比集合B所源于的样本大的样本之时,集合A似乎比集合B大(例如,从30个样本中拿出的6个筹码组成的集合比从10个样本中拿出的6个筹码组成的集合大)。换言之,这个年龄阶段(不到七八岁)的儿童不认为混合是不可逆的。这个事实是非常矛盾的,因为这个阶段的儿童既不能理性观察,又不能可逆运算——我们在第一章的阶段1中(实验对象将弹珠的混合归结为由倾斜活动引发的弹珠回归初始位置的过程)已经注意到了这点。在阶段2中,在不可逆混合和可逆运算的概念发展之前,我们只有可感知的、客观知觉世界(现象的、自我中心的),这个世界的品质被简单迁移和保存所记忆。这与假记忆相悖,假记忆是随意的且没有真正理解概率。

现在,如果概率的概念源于随机混合的感知,那么可能性的判断将包含预期复原混合元素的可能性,这种预期仅仅是基于实验中的量化关系的。然后,从先前事实中得出的第二个结论就是儿童没有不可逆混合的概念,这个阶段的儿童不能通过系统化量化来建构可能性评估的概念。相反,他甚至还没有这样做的能力,因为这种量化假定运算系统同时是数字的且组合的,确切而言就是不能解释为什么仍然没有意识到随机混合概念的发展。

例如,当孟在晃动袋子里的12个白色、1个红色筹码的实验中,马上做出了红色筹

码的选择,因为红色筹码只有1个,他表现出来的不仅仅是微弱感觉到了混合,而且还有非常基础的可能性概念,发现混合中某些元素所必要的非常基础的运算概念。实际上,在这个特殊案例中,当实验对象拿到装有混合筹码的袋子中的1个筹码时,可能性的判断就包含了预期用手找到预期元素的可能性。然后,我们看到这种预期如何必然引发量化运算。要确定拿到了红色筹码,所必需的是手中拿到所有的筹码。也即是,要拿出当前的所有13个筹码。这就是一定或13/13的可能性,也就等同于1。要拿到所有筹码中的某一个,这是一个将其视作整体的部分的问题。也即是,某一部分与剩余部分的量化比较,就是要用与预期筹码相关的部分的总和来表达确定性(值为1)。在预测他可能会拿到红色筹码时,孟质疑他的手不能12次接触到12个白色筹码及1个红色筹码。也即是,好像唯一的红色筹码不是所有筹码中的第十三个。因此,他认为手与纯粹预期的红色筹码之间存在某种直接相关性且两者是一个整体,而不是略微将其视作两个可能性:1/13或12/13,这给出了拿到白色筹码的最大可能性。换言之,他还一点儿也没有可能性的概念,而阶段1B中的实验对象已经处在可能性概念的发展中,因为他们确实说所呈现的元素的数量是预期特定元素的特性。他们正在发展真正的可能性,因为他们将整体划分为类别,并意识到元素之间的量化关系,而不是质疑某一特殊元素或单独品质。

从心理及逻辑的视角而言,可能性的判断伴随着组合的量化运算的发展。可能性是不可逆随机混合的结果。相反,可能性的判断包括用思维过程的方式将混合简化成可以用分数表达的组合系统。

第二节　第二阶段:量化可能性的开始

儿童一旦发展了随机混合的合理概念,可能性的量化就开始在阶段2中出现了。但是,阶段2中的实验对象没有考虑到在每次拿出筹码之后,将混合物中剩余筹码的数量绘制在相应类别中,忘记了清点已经从袋子里拿出了多少个筹码。因此,他们质疑固定类别。案例如下。

菲尔(8;6)　8个黄色、4个红色、2个绿色、1个蓝色筹码:“如果你不看,一次拿出2个,你最可能拿出什么颜色的筹码?——*2个黄色筹码*。——为什么?——*因为黄色筹码很多*(他拿出了2个黄色筹码)。——如果你现在只拿出1个筹码,这个筹码会是什么颜色的?——*还是黄色的*。——(他拿出了1个红色的筹码)现在呢?——*红色的*。——(他拿出了1个蓝色的筹码)现在呢?——*绿色的*。——接着呢?——*黄色的*。——再接着呢?——*红色的*。——再接着呢?——*绿色的*。”因此,他遵循了数量递减颜色的次序。

皮埃(9;3) 8个玫瑰色、6个黄色、4个白色、1个绿色筹码:“如果你一次拿出2个筹码,这2个筹码会是什么颜色的?——*玫瑰色和绿色*(即两个极端)。——试试看。——(他拿出了1个玫瑰色、1个白色筹码)——为什么一个是玫瑰色,一个是白色的?——*因为有很多*。——现在呢?——*白色和黄色的*。——接着呢?——*绿色和白色的*。”(他遵循了模型上的颜色次序。)

丹(9;6) 8个红色、5个黄色、2个玫瑰色、1个绿色筹码:他连续说了每对筹码的颜色分别是红色/黄色、红色/玫瑰色、红色/绿色。他以这种方式将数量最多的筹码与数量递减的筹码以颜色次序关联起来。

吉(10;0) 15个绿色、12个黄色、8个红色、3个蓝色筹码:“如果你拿出2个筹码,你最可能拿到什么颜色的筹码?——*2个绿色筹码或1个绿色筹码、1个黄色筹码*。——(他拿出了2个绿色筹码)现在呢?——*绿色和黄色筹码*。——(他拿出了黄色和蓝色筹码)现在呢?——*绿色和黄色筹码*。——(他拿出了黄色和蓝色筹码)现在呢?——*2个红色筹码*。——看看你都拿出了什么颜色的筹码,更有可能是绿色的还是红色的筹码?——*红色的,因为我们已经拿出了2个绿色的筹码*。——(但是还剩下了13个筹码!)试试看。——(他拿出了2个绿色筹码)——为什么你又拿出了2个绿色筹码?——*因为绿色的筹码比其他颜色的多*。——现在呢?——*绿色和红色的*。——(他拿出了绿色和蓝色筹码)现在呢?——*2个黄色筹码*。——为什么?——*因为我们还没有拿到黄色的筹码*。——现在会是1个蓝色筹码吗?——*我不这样认为*。”

切沃(10;0) 8个黄色、6个红色、4个蓝色、2个绿色筹码:“*黄色和红色的*。——(他拿出了2个红色筹码)接着呢?——*2个黄色筹码*。——(他拿出了1个黄色、1个红色筹码)现在呢?——*2个绿色筹码*。——为什么?——*因为我们还没有拿到这种颜色的*。”

这些反应的意思很清楚。一方面,所有的实验对象都考虑到了筹码的数量,这非常清楚地表明:他们确实明白了混合的作用,也明白了伸进袋子里的手比较有可能拿出数量最大的那种颜色的筹码。不过,如果这些概念在每个实验开始时就是正确的,那么这些概念随着实验的进行就变得不是那么有效了。除了要考虑每次拿过筹码之后袋子里剩余的筹码数量并由此调整量化关系,实验对象继续遵循初始数量递减的筹码的颜色次序,或甚至忘记数量不等并质疑不同类别筹码的数量不同,就好像不同颜色筹码的数量是相同的。

某些实验对象即使一开始就知道量化分布,他们还是以这种方式从一个极端转到了另一个极端。例如,皮埃预测到最可能的2个筹码的颜色是玫瑰色(8个)和绿色(1个),切沃在第三次预测出是2个绿色筹码(20个筹码中的2个),因为“*我们还没有拿到过绿色筹码*”。第一个方法使我们想起了第一阶段的过程,尽管清晰地关系到数量。

第二个方法包含着遵循数量递减筹码的颜色次序,例如菲尔建立起了颜色次序旋转的次序,或丹将数量最多的那组筹码与数量递减的那组筹码关联在一起。不用说,第二种方法即使是建立在数量原则基础之上的,也还是没有考虑到数量之间的准确关系。

最后,第三个方法包含开始预测出数量最多的那组筹码,接着只是根据还没有拿到的颜色而不是袋子中剩余其他筹码的数量做出预测。例如,吉预测出第三对筹码是"*2个红色,因为我们已经拿出了2个绿色筹码*(剩余的筹码是13个绿色和8个红色的)",后来预测出2个黄色筹码,"*因为我们还没有拿到很多个黄色筹码*"。这第三种程序虽然忽略了变化混合的相对性,但是还是无意地导致了一种需要考虑到剩余筹码数量的情形。

显然,要注意可能性判断与我们即将在第七章用相同实验对象研究组合方法之间的相似性。在这两个案例中,儿童在寻找客观体系,而非只是经验性的发展及单独解释。但是,在这两个案例中,客观体系不足,因为实验对象把可能性及组合的整体视为静态顺序,而没有理解相互作用及连续修改的动态性。

第三节　第三阶段与结论

阶段3中的实验对象在每次拿筹码后再次成功量化了可能性,表明他们在能够以这种方式看到每次拿取筹码之后,发挥作用的关系都发生了改变。

斯通(10;0)　12个白色、10个红色、5个绿色、3个蓝色筹码:"*1个白色、1个红色筹码。*——(他拿到了2个绿色筹码)现在呢?——*白色和红色的。*——(他确实拿到了这些颜色,而且连续几次实验都是这样。)——*现在,我们拿到白色和红色筹码的可能性比之前少了,因为我们已经拿出了好几个这样的。以后更可能是绿色和蓝色的。*——(12个玫瑰色、6个红色筹码。)——*更有可能是2个玫瑰色筹码,因为是其他颜色的2倍。*——(他拿到了2个玫瑰色筹码。)——*仍然更有可能拿到玫瑰色筹码,但是概率比之前少了。*——(他拿到2个玫瑰色筹码。)——*现在,拿到两种颜色的概率是相同的了。*"

劳尔(12;3)　14个绿色、10个红色、3个黄色、1个蓝色筹码:"*2个绿色筹码。*——(他拿到了1个红色、1个黄色筹码)现在呢?——*2个绿色筹码。*——(他拿到了2个绿色筹码)现在呢?——*仍然更有可能拿到2个绿色筹码,因为还有12个绿色筹码,但只有9个红色、2个黄色筹码。*——试试看(他拿到了绿色和蓝色筹码)。——*嘿!还有1个蓝色筹码。*——现在呢?——*仍然最有可能是2个绿色筹码。*"

这些回答很简单,我们看到:对这些实验对象而言,真正的困难是在每次实验之后

判断还剩下多少个筹码(同样,还有组合的系统方法,困难将会是连续协调每种颜色与其他所有颜色的组合)。这就是当前情形反复再现的情况,而不是把问题看作是一成不变的或者彼此是相互独立的情况。在此发生的是类似于指向问题所指中的所谓的相关性系统的修改。①这就是为什么形式运算的介入在此案例中似乎是必要的。

从此前观察中得出的基本结论是:概率和可能性的概念天生就是组合所必需的。这就是为什么我们要用相同的实验对象来研究具体组合运算的发展。但是,我们依然不知道这种操作性建构的细节(我们将在第七章中对此做出描述),有趣的是:从当前的事实中分辨出实验对象自主反应中不断介入的组合格式。

因此,显然在阶段1中,儿童还不知道这样的格式。但是,7岁之前没有什么好惊讶的,儿童既没有运算序列或构建类别,也不确定能理解初级数字运算。但是,显然,从阶段1开始,实验对象就有了某种经验性感知,使其能够预测出后来的概率知识是什么。这些经验性观察已经形成了组合性解释,但是儿童并没有获得,恰恰是因为他没有这样的运算能力来组织他不能建构的概率概念。因为他确实知道随机混合是以材料混合的形式存在的。有时候,将他的玩物放在一起,其他时候杂乱地堆起来,他非常清楚地知道第一种情况比第二种情况更容易找到某物体。在第二个案例中,当他想发现他丢了什么时,他很清楚地看到他的成功取决于元素的数量及元素之间的不同可能关联。他总是有机会直接体验到相同的运气——非好即坏。但是,在此本章中所研究的事实教给我们的是:具体物体混合的感知还并不是组合性混合的理解,儿童没有建构经验的积极能力,这种感知自身不足以引发概率概念及可能性概念。

实际上,我们从单纯的呈现混合物的实验或与此等同的实验、从位置体系或不可预测的位置变化(或甚至是更普通的方式,从未知原因或多种效应体系)中获得了什么?仅仅是获得了频度的观察:经常会形成某种关联,而其他的在不同程度上较少出现。但是,如果频度感知形成了随机混合感知的开始,那么这只是一个不完整的、粗略的概数。这与随机混合概念外且与之相悖的其他元素一致。当缺少充分的运算格式之时,这种频度的感知甚至需要这些其他元素。我们已经看到尽管混合,但阶段1中的实验对象依然相信混合物体中的品质或内在力量的干预(玫瑰色吸引红色等),甚至相信这些物体在混合前的次序中存在内在关系(例如,用作记忆帮助的桌面上的颜色的次序)。要知道实验对象已经成功获得了随机混合的准确概念。因此,有必要满足这两个条件,这两个条件已经超出了单纯的实验以及频度感知的范畴;我们必须有可能性组合的列表,只有这些才能显示出实际观察到的组合的重要性;我们还必须有彼此相互混合及所有可能性混合的不同类别之间的量化关系体系,也即是,样本空间。因此,在这两个案例中,有必要发展超出了数据的范畴,且可以被同化进恰当运算格式中的运算体系。

我们已经看到了从阶段1到阶段2的过渡,即从客观解释经验频度的简单感知到随

① See, for example, Jean Piaget, *The Child's Conception of Movement and Speed* (New York: Basic Books, 1969).

机混合概念及正确的可能性评估的开始,某种组合格式的发展是其明确特点。首先,随机混合本身被视作一种通过混合元素的不同可能关联来显示自身的偶然组合体系。其次,我们已经在前面注意到了,实验对象如何自己将拿取筹码的行为表现为与实验中元素种类的量化值关联。因此,他只要接受了随机混合的概念,就开始了量化可能性本身。这样,一种如何预测的操作格示就介入了两个案例之中,而我们也将会发现这种格式介入到组合运算的建构之中的作用。

最后,在阶段3中,感知不再是整体的,可能性概念的优化及可能性的计算被视作与可能组合的整体相关的部分的可能性。这些感知表明了运算体系本身的获得,而这引发了组合的建立。

这样,随机混合的感知(在阶段2中形成了与操作"分组"概念相悖的概念)就以被视为分组模型本身而结束了,并有下述唯一区别,而此区别恰恰就是概率的合理概念与简单决定论的概念的鲜明对比:区别只是整体(大数字)是由(可能组合的完整乘法分组)与多价分数的有关推理而决定的。

在此,我们看到仍需完成的研究:第六章将进一步分析可能性量化的机制,这部分已经在第四章及第五章探讨过了。之后的问题是研究组合运算自身的发展。我们刚刚已经看到这些组合运算为我们提供了概率及可能性概念整体发展的关键。

第六章　可能性的量化[1]

在本书的第一部分中，已经研究了儿童在面对物理情形时的反应。在这些物理情形中，引导儿童在日常生活体验中建构概率概念。在本书的第二部分，我们的任务是分析实验对象的反应如何与类似随机拿取筹码这样的活动中的概率关联起来。儿童对物理概率的反应及随机抽签的行为已经告诉了我们，发展可能性概念中所必需的两个条件。首先，正如我们已经看到的，解释可能性的过程取决于儿童建构组合（组合、排列及排列组合）运算的能力。其次，这个过程需要建立单个案例和整体分布两者之间关系的渐进能力；这种建立关系的能力普遍需要逻辑及算术运算，即运算量化。因此，现在就是要研究这种量化机制的问题，而这也确保了此前所有章节（尤其是后面两章）向本书第三部分的过渡。本书的第三部分将分析组合运算。

此前章节使我们提出了这样的问题：面对一组不同颜色、数量的筹码，阶段1中的实验对象没有关注到实验筹码的数量；阶段2中的实验对象（从7岁到11岁）开始考虑到了数量，但是没有考虑到每次连续拿取筹码之后袋子中筹码数量的变化；只有阶段3中的实验对象做出了精确计算。因此，值得详细研究的困难就是，儿童为什么那么晚才意识到哪种可能性判断的机制明显决定了拿到什么颜色筹码的可能性的数值关系以及逻辑和数值运算。

第一节　实验与结果

要理解量化的机制，我们就不能在前面的章节上停滞不前，即研究从一个装有复杂混合物的袋子里拿筹码，现在要给实验对象看两组小的混合，每组由数量非常少的元素组成，这样就能逐步详细研究所建立的关系。

因此，我们向儿童展示了两组白色筹码，一组背面有十字，另一组没有。实验对象每次都会注意到每组筹码的精确组成。在我们混合了筹码之后，将每组分离并将其放在图表上（只能看到每个元素的正面），儿童要预测出他第一次最有可能在哪组筹码中发现有十字的筹码。我们提出的10个问题如下（对每个实验对象而言，不一定要问全部的问题，以下是普遍问题）。

---

① With the collaboration of Myriam van Remoortel, Gaby Ascoli and M. A. Morf.

1. 两个不可能问题:两组筹码,每组有二三个筹码,但是筹码的另一面没有十字。儿童事先已经看到了他面前的每组筹码,我们仍然问他在这组还是另一组筹码中最有可能拿到有十字的筹码。

2. 两个确定问题。肯定案例,例如,2个筹码中的2个或4个筹码中的4个(我们将会写成2/2和4/4)。也即是,所有的筹码都有十字。因为筹码数量不等,问题依然是在哪种情况中拿到有十字筹码的概率是最大的。

3. 确定–不可能问题:两组筹码中的一组筹码上有十字(例如,2/2),另一组与之数量相同的筹码没有十字(因此是0/2)。问题仍然是,说出哪种筹码中最有可能拿到有十字的筹码。

4. 可能–确定问题:一组筹码中有一半的可能拿到有十字的筹码(即1/2),另一组是百分之百能拿到有十字的筹码(1/1),或再次是1/2和2/2等。

5. 可能–不可能问题:例如1/2或0/2。

6. 相同构成的两个问题:例如1/2和1/2。

7. 比例性问题:两组筹码,其中一组2个筹码中的1个筹码有十字,另一组是4个筹码中的2个筹码有十字,或1/3和2/6。

8. 肯定案例中的不同可能性和可能案例中的相同可能性问题:例如1/4和2/4。

9. 肯定案例中的相同可能性和可能案例中的不同可能性问题:例如1/2和1/3。

10. 肯定案例中的不同可能性和可能案例中的不同可能性问题,不成比例:例如1/2和2/3。

此外,我们还问了类似的问题,但是只使用了一组筹码。例如,我们在袋子里装了2个白色、1个黑色筹码:最有可能拿到哪个筹码?这第二种类型的问题被用于给出所产生的结果与此前章节的结果两者之间确定点关系的信息。

实验对象对这些不同问题的反应通常可以被分为三个阶段。在第一个阶段中(4到7岁),缺少基于实验中量化关系(子阶段1A)的比较或感知明显不成比例的直观比较(子阶段1B)。在第二个阶段中(7到11岁),我们看到了唯一的关系:儿童比较了肯定案例与不肯定案例,但是他没有构建出肯定案例和可能案例之间的关系;接下来,儿童仍然没有理解比例(子阶段2A),或比例只有在能够被轻易觉察时才能被发现(例如1/2=2/4),而且没有归纳(子阶段2B)。最后,在第三阶段(11岁之后),实验对象建立起了所有情况下肯定案例和可能案例两者之间的关系,确实理解了可能性,即使10种情况下的肯定案例和可能案例都不同。问题的解决要借助于分数计算,或在本阶段的早期借助于不同感知结构及其逻辑关系的分析。

第二节 子阶段1A:逻辑和算术比较的缺失

我们将阶段1划分为了两个子阶段,划分依据是实验对象是否关注到了量化关系或他是否开始从量化的视角上做出直观比较。我们将以子阶段1A的某些案例开始。但是,在此必须要指出的是,将要描述的案例的主要方面应被视作一个整体。实际上,要提问的问题的本质上就是实验对象自己随意回答,并总是有可能在两个回答中得到一个正确的答案。一方面,我们不能再预期普遍错误的答案,而是应该通过比较所有的反应来判断儿童是否理解。另一方面,在儿童谈及的大量原因中,可能会提到数量。但是,正如在前面章节中所看到的,我们不能说可能性的量化,除非儿童的量化基础是成体系的,而不是仅仅简单地加入到其他与之相冲突的体系之中,因为实验对象还没有获得情形的普遍理解。这是部分案例。

金(4;6) 问题4(可能-确定问题),1/3和3/3:"你最有可能马上从哪儿拿到1个有十字的筹码?——*那里(1/3)。*——为什么?——*最容易,因为那里只有1个有十字的筹码。这里(3/3),3个筹码都有十字。当只有1个筹码时,最容易拿到1个有十字的筹码。*——这里呢(3/3和1/6)?你第一次最有可能在哪儿拿到1个有十字的筹码?——*这里(1/6),因为只有1个。*"

李尔(4;6) 问题4(可能-确定问题),1/3和3/3:"*这里(3/3),因为3个筹码都有十字。*"

问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/3和2/3:"*这里(2/3),因为有2个筹码有十字。*"

问题6(相同构成的两个问题),1/3和1/3:他选择了右边那组,"*因为只有1个有十字的筹码。*——那个呢?——*也只有1个筹码有十字。*——所以呢?……"

问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/3和1/4:"*相同的,因为这里、那里都只有1个有十字的筹码。*——在那些情况(1/6和1/3)中,哪个最确定?——*那个(1/3),因为只有1个有十字的筹码。*——在那些情况(1/3和1/6)中,你第一次最有可能在哪种情况中拿到1个有十字的筹码?——*那个(1/3),因为只有1个筹码有十字。*——这些(1/3和1/6)中,哪个你第一次最有可能拿到1个有十字的筹码?——*这里(1/6),因为有十字的筹码多一些。*——有多少个有十字的筹码?——*1个。*——那么,你在哪个组中最确定能拿到有十字的筹码?——*这里(1/6)。*——为什么?——*因为有十字的筹码多一些。*"

问题7(比例性问题),1/2和2/4:"*这里(2/4),因为有2个有十字的筹码。*"

因此,李尔似乎要正确解决问题4和8,但是比较他的回答与随后的回答时,我

们发现他只是简单研究了肯定案例就做出了决定，而没有考虑到可能案例——问题9的回答证明了这点。

伯尔(4;8)　问题9(肯定案例中的相同可能性问题)，1/2和1/3："你最确定在哪组中拿到有十字的筹码？——*那个(1/2)*。——为什么？——*我不知道*。——试试看，你第一次最有可能在哪组中拿到有十字的筹码？"他选择了从1/3那组。

问题2(两个确定问题)："你最确定能从哪组筹码中拿到有十字的筹码？——*那里，还有那里*(正确)。——为什么？——*因为两组筹码中都有2个有十字的筹码*。——是不是一组比另一组更确定？——*是的，那里(右边的)，因为有2个有十字的筹码*。"

弗拉(4;9)　问题9(肯定案例中的相同可能性问题)，1/4和1/3："*那里(1/3)*。——为什么？——*因为有一个筹码有十字*。——这些(1/2和1/3)呢？——*那里(1/3)*。——为什么？——*因为……不，那里(1/2)，因为我已经太多次选择其他的了*。"

问题4(可能-确定问题)，1/2和1/1："*那里(1/2)*。——为什么？——*因为……*"

问题2(两个确定问题)，2/2和2/2："*那里(左边的)，因为有2个有十字的筹码*。"

罗斯(5;2)　问题9(肯定案例中的相同可能性问题)，1/2和1/3："*那里(1/3)*。——为什么？……"

问题4(可能-确定问题)，1/2和2/2："*那里(2/2)，因为有2个有十字的筹码*。——那些(2/2和2/3)呢？——*那里(2/3)*。——为什么？——(他犹豫了，而且准备试试其他组，然后又回到了2/3那组)——那些(2/3和2/2)呢？——*这里(2/2)，因为有2个有十字的筹码*。——这些(2/7和1/1)呢？你第一次最有可能在哪组中拿到有十字的筹码？——*这里(2/7)，因为有2个有十字的筹码*。"

卡伯(5;3)　问题9(肯定案例中的相同可能性问题)，1/3和1/2："如果你第一次就想拿到有十字的筹码，哪个是最有可能的？——*这里(1/2)*。——为什么？"

问题7(比例性问题)，1/2和2/4："*这里(1/2)，因为只有1个有十字的筹码*。——大一点的那组里有几个有十字的筹码？——*2个*。——那你为什么选择这里(1/2)？——*因为数量少的那个容易一些*。"(参见问题9)

问题8(肯定案例中的不同可能性问题)，1/4和2/4："*这里(1/4)，因为只有1个有十字的筹码*。"

问题4(可能-确定问题)，1/2和2/2："你第一次会选择哪里？——这里(1/2)。——两组中分别有多少个有十字的筹码？——*那里有2个，那里有1个*。——那么，哪个最容易发现有十字的筹码？——*最容易的是这里(1/2)*。——为什么？——*因为只有1个有十字的筹码*。——我们更可能还是不可能，从这里(2/2)拿到1个有十字的筹码？——*可能*。——那里(1/2)呢？——*可能*。——为什么？——*那里只有1个筹码有十字*。——你想试试哪里？——*那里(1/2)*。"

问题2(两个确定问题)，2/2和2/2："我们最确定哪里？——(他指着左边的那

组。)——为什么?——*有2个有十字的筹码*。——那里呢?——*2个*。——那么,你为什么选择这个?——*因为有2个有十字的筹码。*"

问题1(两个不可能问题),0/2和0/2:(他耸了耸肩膀)"*你赢不了的*。——为什么赢不了?——*没有有十字的筹码。*"

米尔(5;3) 问题2(两个确定问题),2/2和2/2:"你记得吗?——*那里有1个有十字的筹码,那里也有1个有十字的筹码;一个在这里,另一个在这里*。——哪个更容易选择?——*右边的*。——为什么?——*因为那里有1个有十字的筹码*。——但是那里到处都是有十字的筹码。你为什么不选择那里?——*因为已经满了。*"

问题1(两个不可能问题):"*什么也没有。*"

瑞(5;7) 与米尔相同的反应。

韦(5;9) 问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/2和1/3:"*这里(1/2),因为只有2个有十字的筹码。*"

问题7(比例性问题),1/2和2/4:"*这里(1/2),因为有2个有十字的筹码和1个有十字的筹码(即,少的那组)。*"

问题8(肯定案例中的不同可能性问题)1/4和2/4:"*那里(1/4),因为只有1个有十字的筹码。*"

盖特(6;2) 我们用袋子里装有1个红色、2个白色筹码的那组作为控制组:"如果你不看就拿出1个筹码,你最有可能拿到什么样的?红色的还是白色的筹码?——*红色的*。——这次呢(1个红色和4个白色筹码)呢?——*白色的*。——为什么?……"

问题8(肯定案例中的相同可能性问题),1/3和1/2:"你最有可能从哪组中拿到有十字的筹码?——*这里(1/3),因为这里只有1个有十字的筹码*。——那里(1/2)呢?——*一样*。——这里(1/2)更不容易拿到有十字的筹码吗?——*是的,是这里(1/3)。*"

我们看到:这不是夸张地用两组之间量化比较能力的缺失来界定子阶段1A,子阶段1A中的问题是决定哪组最有可能拿到有十字的筹码的问题。因为,此阶段的儿童既没有基本的逻辑运算(总结出整体中剩余的哪部分是可能的),也没有形成整体数字的算术运算。这点不足为奇。但是,除了这种逻辑和算术运算的缺失之外,这些观察还恰好使我们清楚地看到了另一个问题的出现:事实就是这里所使用的数字排除了知觉(或象征)数字,1到4或5,基本的可能性知觉可由这组数量少的筹码引发。因此,这种知觉的缺失非常有意思,甚至使我们希望为目前在阶段1的开始就观察的所有事实寻求运算次序的解释。

首先,我们注意到剔除作为控制组的问题1,3和5(不同的不可能性问题),问题2,

4，6到10都没有产生系统性的正确问题。任何正确回答都源于概率(我们通过比较每个实验对象给出的其他回答可以看到)，或极少的源于瞬间知觉，而瞬间知觉在子阶段1B和阶段2中才能真正得以普遍形成。

问题4(可能-确定问题)清楚地促成了恰当预测此阶段结果的第一个必要因素。例如，在展示一组筹码中的3个筹码全部都有十字，另一组筹码中的3个筹码只有1个有十字时，儿童普遍认为(参考金、弗拉和卡伯)：当他看到1/3那组时更确定了，因为这是一个只找到1个有十字的筹码的事。在1/3组中，*"更容易，因为只有1个筹码有十字。那里(3/3)3个筹码都有十字。当只有1个筹码有十字时，更容易找到有十字的筹码*(金)"。其他实验对象，例如李尔和罗斯，也确实第一次选择了2/2或3/3那组，但是提问了部分问题之后(尤其是罗斯)，我们没有看到他们质疑可能性的问题。

问题8(肯定案例中的不同可能性问题，例如1/4和2/4)产生了类似的言论：卡伯选择了1/4组，因为仅有1个有十字的筹码(不同于有2个有十字的筹码，2/4)，而李尔似乎回答正确，但是其剩下的话语并没有证实连贯可能性判断的存在。

问题9(肯定案例中的相同可能性和可能案例中的不同可能性问题，例如1/2和1/3)依次清晰地产生了消极反应。如果儿童有最少的量化可能性知觉，那么对他来说，甚至不用数就能很容易地理解，更容易从筹码数量少而不是数量多的那组中拿到有十字的筹码。但是，在回答问题7(比例性案例)时，他们经常更喜欢筹码数量少的那组，而实际上筹码数量的多少根本无关紧要(参考卡伯和韦)，子阶段1A中的实验对象没有感知到量化关系就回答了问题9。他们觉得这些可能性是相同的(因为肯定案例不那么像可能性案例)或者自相矛盾地选择了数量较大的那组，或甚至只是随意地做出了选择。因此，李尔做出了1/3的概率与1/4的概率相同的判断，然后是1/3等同于1/6，选择1/3是*"因为只有1个有十字的筹码*(金为问题4给出了相同的原因)"，后来又选择了1/6，*"因为筹码更多"*。但是，罗斯和卡伯的选择是随机的。弗拉做出了相同的选择，然后又做出了截然相反的选择，*"因为我已经很多次选择了其他的"*。就好像可能性是完全不确定的。韦似乎回答正确，但是是在后来提问与系统性知觉的存在相反的问题之时。最后，盖特的反应就好像他的期望只是确保其选择的正确性。

在这些条件情形中，问题10(肯定和非肯定案例中的不同可能性问题)超出了实验对象的水平，问题7(比例性案例)也是如此。但是，还是问了最后这个问题，而且儿童的回答也证实了我们此前的结果。在肯定案例中，儿童不是(李尔，2/4，*"因为有2个有十字的筹码"*)因为筹码数量最多而选择最大那组(完全凭感觉)，就只是因为只有1个有十字的筹码而选择筹码最少的那组(卡伯和韦)。*"因为只有1个有十字的筹码。"*卡伯在回答问题8(肯定案例中的不同可能性)时这样说。

因此，这些不同反应排除了从肯定案例和可能案例的关系视角寻找两组筹码之间的逻辑或数学或量化比较。简单地说，儿童根本就不关注可能性案例，而只考虑肯定案例的数量，就好像有绝对值似的。他极少关注类似问题2(双确定)和问题6(相同组成，

也即是肯定案例和可能案例中的相同可能性）所描述情境中的可能性案例，儿童（除了开始时的伯尔）普遍没有做出两个相同组之间的比较，而只是随意选择了其中的一组。

那么，如何解释这些事实？除了我们已知的所有详细事实之外，运算次序（甚至与之紧密相关的）的两个基本特征似乎主导了儿童关于概率和可能性的初始反应：首先，处理这种分离是有难度的；其次（从不同观点的视角而言是相同的），缺少了部分与稳定整体之间的关联。

例如，让混合集合B由红色筹码（我们称第一个子集为A）和两个白色筹码（这是子集A的补充，我们称之为A'）组成。我们可以以任何次序将整个集合B中的部分A和A'以并运算（$A \cup A'=B$）的形式加以组合或使用补运算（$B-A=A'$或$B-A'=A$）。正是运算的可能性确保了整体的保存得以维系，B不是并的结果（$A \cup A'=B$），就是继续充当补集的相关集合（$B-A=A'$或$B-A'=A$）。

此外，让我们把命题"x是A中的一员"叫作p，把命题"x是A'中的一员"叫作p'，最后，把命题"x是B中的一员"叫作q。如果集合A是集合B的一部分（包含），集合A'也是集合B的一部分（完全包含），那么"x是A中的一员"意味着"x是B中的一员"，"x是A'中的一员"意味着"x是B中的一员"。也即是：若p，则q；若p'，则q。假设袋子中的筹码混合之后，我们知道只有x是B中的，而不知道其是否还属于A或A'。我们将在如下案例中看到这种情形："若q，则p或p'。"也即是"若x是B中的一员，则x在A或A'中"。这就是与集合的并运算（$A \cup A'=B$）相关的，被我们称为分离的反向运算（p或p'）。

因此，由子阶段1A的反应所形成的心理问题决定了儿童是否理解补集的并运算（$A \cup A'=B$）以及命题的分离（若q，则p或p'），这似乎形成了可能性的任何逻辑发展和量化之前所需要的条件。

例如，让我们从只包含1个红色筹码（A）和2个白色筹码（A'）的一个集合开始，并自问儿童如何从分离的视角（只是集合合并之后）推理。对他而言，要理解拿到1个白色筹码比拿到1个红色筹码更有可能，这似乎有必要假定以下两种运算：既然整个集合包含两个子集（红色和白色筹码），那么我拿出来的筹码不是红色的就是白色的（分离）；但是，既然有1个红色、2个白色筹码（数量上的比较），那么两种颜色筹码的选择就是不等的了，而且我更有可能拿到白色的筹码。事实却是与之相反的情况出现了，就好像儿童既不关心实验中集合的合并，也不关心集合的分离，只是对自己说："*他们要求我拿1个筹码，1个红色的筹码。既然正好只有1个红色筹码，我敢说我能拿到，而不用牵扯到白色筹码*（参见盖特的案例，他一直以这种方式推理，直到有4个白色筹码）。"现在，如果我们让儿童比较两个集合，一个是3个筹码都有十字的集合，另一个是6个筹码中只有1个有十字的集合，他会对自己说，就像金那样，要在第一次拿到有十字的筹码，我们必须选择第二组，因为正好有1个筹码有十字，不是3个筹码都有十字！换言之，这里没有分离，因为实验对象只是不让自己为不同的可能案例烦恼，也即是这样的整体或其所提供的选择。他直接选择了肯定案例，而忽略了其他案例。

这样的反应使人立即联想到关于理解不是/就是命题的著名事实：这些儿童永远不选择——他们不是立刻选择两组，就是想到一组而忘记了另一组。例如，面对呈现一只狗或猫的照片，实验对象(2;10)说这是一只狗，*"因为它是灰色的"*。[①]就好像灰色四足动物的事实并不准确意味着分离(不是狗就是猫，或甚至几个其他可能)。

分离的困难(非常普遍的困难，超出了概率问题的范畴)表明儿童思维的基本特点以及关于可能性知觉的重要性：儿童不能根据可能性做出推理。他没有在几个可能性之间做出选择，而是直接选择了他认为正确的那个(或只是预期的那个，也即是能实现的那个)，他不明白的是几分之一的可能性，就排除了其他的优选项。实际上，儿童分离推理的缺失以不能理解可能性的概念而结束，因为这个概念必定意味着要考虑到几个可能性，那么有人可能会说这是本质上的分离吗？当儿童选择了(几个不同筹码中)只有一个预期筹码的那组时，我们因此可以用他不仅不能用分离比较来推理，而且不能理解可能性案例和可能性本身的概念来解释他的反应。他错误地将一个可能案例——即相对于其他可能案例变成了确定或不确定案例——完全想象成唯一情况而且独立于所有的可能性。形式观点视角上分离推理的缺失，模式观点视角上可能、真实、必要三者之间的微小差异以及偶然和可能的不理解是紧密相关的三种现象。

实验对象主要反应的第一点源于更为深刻且普遍的思维方面，这正是将部分合并成稳定整体的困难(因此，也不能将整体分离成部分)。

即使儿童缺失了可能性和必要性的模型概念，实际上，他依然可以理解更容易在2个筹码而非3个或4个筹码中找到某一特定筹码，选择第一个的原因仅仅是预期筹码在整体中的比例更大。实际上，儿童确实偶尔求助于似乎形成了部分与整体之间的基本关系的观点。例如，李尔比较了1/3和1/6，然后选择了1/3，*"因为只有一个筹码有*(十字)"，而不是1/6，*"因为*(有十字或没有十字的)*筹码的数量多一些"*。尽管儿童在案例中援引的原因刚好表现出，部分合并成整体或在所有可能案例(有十字或没有十字的筹码)中总结出肯定案例(有十字的筹码)的系统困难。换言之，这不只是因为这是一个儿童在思考肯定案例时没有考虑到整体的可能案例的问题，即能够拿出仅有的那个或其他有十字的筹码，而且还甚至主要是因为他不知道如何建构部分合并进整体的可逆合并(相对于补充)。正如我们在前面所看到的，甚至是恰好因为他不能理解合并而导致他既不能进行分离运算，并因此也没有可能性的概念(可能不是这个就是那些)。

实际上，当儿童似乎要提及部分与整体的关系时，我们非常迅速地注意到他实际上只认为两个数字中只有一个是可行的，不是这部分(肯定案例)中的一个，就是整体中的一个(所有筹码的集合，但是没有准确分离，因为他没有能力形成部分与整体之间的关系，因此这个情形并未被视作所有可能案例)。例如，起初根据部分与整体之间的关系做出推理的李尔(他喜欢3/3胜过2/3，喜欢2/3胜过1/2)，在回答问题9时表现出根本不

① *See La formation du symbole chez l' enfant*(Paris：Delachaux et Niestlé)，p. 246.

是这样的：对他来说，1/3与1/4似乎是一样的，*“因为这里有1个有十字的筹码，那里也有1个有十字的筹码”*。有时候选择1/3而非1/6，而有时候又是相反的，因为李尔在考虑第一个案例中的部分，第二个案例中的整体。罗斯觉得2/7的可能性比100%的确定性大，因为在第一组中*“有2个筹码有十字”*。相反，面对1/2和2/4比例的卡伯相信，*“在数量少的那组中更容易拿到有十字的筹码”*等。简言之，儿童有时候考虑到部分，有时候考虑到整体，但是永远没有考虑到将部分整合在一起的关系。

我们很容易就能理解这种失败的原因及其对分离、对判断模式的影响。其原因就是儿童思维的不可逆性。关于儿童思维的不可逆性，我们已经在第一章中重点研究过了。既然不能通过任何表征来想象行为的两个方向，他们也就不能领会并运算（$A \cup A' = B$）及相对补充（$B-A=A'$ 或 $B-A'=A$）的必要互惠性；A 部分（例如，A）一旦被思维从其补集 A' 中分离出来，整体（B）就不再被视作两个集合之中的一个可能集合。正是这个原因，儿童将其注意力转向了筹码集合中的一部分，说这当中包含有十字的筹码，他忽略了整体，因而没有建立起部分与整体之间的任何关系。另一方面，我们在第一章中已经看到，同样是运算可逆性的普遍缺失致使阶段1中的儿童不能理解不可逆性，而不可逆性适用于随机混合。因此，也适用于概率概念。最后，显然可逆集合运算的缺失解释了儿童为什么不能处理分离，因而也就缺失了可能、真实、必然之间的差异。因为实验对象不能记住整体（B）是子集的永久合并（$A \cup A'$），他们也就不能看到固定证据，即如果有个筹码在 B 中，如果只知道有个筹码在 B 中这一事实，那么这个筹码不是在 A 中就是在 A' 中，也即是整体（B）是所有可能案例的合并。

第三节　子阶段1B：阶段1和2的中间反应

正如我们之前已经注意到的，儿童可能只有通过提及合成、可逆运算才能想到可能性是非合成的、不可逆的。现在，可以补充当这些运算依然缺失时，儿童不只不能获得任何概率的概念，而且甚至不能获得任何可能性的概念。因为这些概念中必须包含对肯定案例与所有可能案例关系的理解。

在前面的案例中，盖特认为找到与两三个白色筹码混合在一起的红色筹码比找到白色筹码更容易，但是当增加了第四个筹码时，他翻转了其决定。在某确定点上，白色筹码数量的增加使其觉得相对于唯一的1个红色筹码，他可以更容易地拿到白色筹码中的1个。这种知觉规则正是儿童发展中子阶段1B的特点。

艾森（6；1）　问题9（肯定案例中的相同可能性问题），1/2和1/3：“这里（1/2），*因为我马上就能拿到有十字的筹码。——为什么？——因为筹码的数量少一些。*——这些（1/5和1/6）呢？——*这里（1/5），因为筹码的数量少一些。*”

单一组(1个红色、2个白色筹码):“如果你拿出1个筹码,你最可能拿到哪种颜色的筹码? ——*红色的*。——为什么? ——*我能拿到是因为,这当中只有1个有红色的筹码*。”

问题7(比例性问题),1/2和2/4:“*这里(1/2),因为有2个筹码*。”

问题10(两个不同可能性问题),3/4和1/2:“*这里(1/2),因为筹码的数量少一些*。”

问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/4和2/4:“*这里(2/4),因为有2个有十字的筹码*。——为什么那个最有可能? ——*因为有2个筹码有十字,还有2个没有*。”

布鲁(6;2)　问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/2和1/3:“*这里(1/3),因为有1个筹码有十字*。——那个(1/2)呢? ——*也有1个筹码有十字*。——哪个概率更大一些? ——*这里(1/3),哦,不,这里(1/2),因为只有2个筹码*。”

单一组(1个红色、2个白色筹码):“如果拿出1个筹码,你最有可能拿到什么颜色的筹码? ——*红色的*。——为什么? ——*哦,不,白色的,只有白色筹码的多一些*。”

问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/4和2/4:“*这里(2/4),因为有十字的筹码多一些*。”

问题10(两个不同可能性问题),1/2和2/5:“从哪组拿到有十字的筹码的概率大? ——*这里(2/5)*。——为什么? ——*因为有2个筹码有十字*。——这个呢? ——*不,这里(1/2),因为有1个筹码有十字,另一个没有,总共就只有这么多筹码*。”

问题7(比例性问题),1/2和2/4:“*这里的概率大(2/4),因为有十字的筹码多一些*。”

问题2(两个确定问题),2/2和2/2:“*那里(左边的),因为有2个有十字的筹码*。——这个呢? ——*那个也是,一样的,容易*。”

西(6;6)　问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/2和1/3:“*这里(1/2),因为数量少一些*。——什么的数量? ——*筹码*。——所以呢? ——*更容易一些*。”

单一组(1个红色、2个白色筹码):“如果你拿出1个筹码,你最有可能拿到什么颜色的筹码? ——*红色的*。——为什么? ……(我们重复了问题。)——*红色的*。——这个呢(2个红色、1个白色筹码)? ——*红色的……不,白色的*。”

问题6(相同组成的两个问题),1/2和1/2:“*一样的*。”

问题7(比例性问题),1/2和2/4:“*这里(2/4),因为有4个筹码*。”

博韦(6;7)　问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/3和1/4:“*这里(1/3),因为总共就3个筹码*。”

问题6(相同构成的两个问题),1/6和1/6:“*任意一组*。”

问题7(比例性问题),1/3和2/6:“*这里(1/3),因为总共就3个筹码*。”

问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/4和2/4:“*任意一组*。——为什么? ——*因为两组都是4个筹码*。”

问题2(两个确定问题),2/2和2/2:“*任意一组*。”

单一组(1个红色、2个白色筹码):(安静,没决定)

查恩(7;6) 问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/2和1/3:“*这里(1/2),因为更容易一些*。——这个呢(1/2和1/5)? ——*那里(1/5)*。——为什么? ——*因为有1个有十字的筹码。不,这里(1/2),因为筹码的数量少一些*。”

问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/4和2/4:“*那里(2/4),因为有2个有十字的筹码*。”

问题7(比例性问题),1/2和2/4:“*那里(1/2),不,这里(2/4),因为有2个有十字的筹码。不,这里(1/2)更容易一些*。——这个(1/3和2/6)呢? ——*这里(1/3),这个概率更大一些*。”

问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/4和1/5:“*那里(1/4),因为筹码的数量少一些*。”

要恰当注意到我们问到了两类不同的问题:实验中同时包含了两个变量的问题——问题7、问题10,这三个问题的肯定案例和可能案例中所涉及的变量不同。儿童没有解决这两个问题,最少是没有系统地解决。直到阶段2,儿童才解决了这两个问题。其他所有问题只包含了一个变量,因此这些问题看起来是同等难度的。现在,阶段2和子阶段1B的差异在于:在阶段2中,儿童系统化地解决了所有包含单一变量的问题;而在阶段1B中,儿童只解决了部分问题,还有些问题没有解决。那么,要明白的问题就是,为什么正确问题的分布会出现随意性?

当相同逻辑难度的问题产生了不同寻常的解决方案时,往往是因为解决方案并不是基于运算推理的,而是简单的知觉。当情境比较简单,可见或幻想出来的格式又充分有效时,儿童就能明白解决方案;但是当情境比较复杂,这些解决方案不容易归纳时,儿童就不能明白了,因为他们缺少逻辑运算。

当我们考虑到每个特殊案例时,就很容易看到这种解释是正确的。儿童在肯定案例(如子集A)和整体可能案例B的关联上,以及在子集A和整体B或子集A及其补集A'的详细(数值的)量化比较上存在困难。现在,因为不能用有效运算的方式(即动态、可逆运算)来建构这些关联及量化,子阶段1B中的实验对象就获得了一种知觉,这种知觉标志着超过子阶段1A的明显进步:筹码数量越多,可能性也就越多,因而第一次拿到预期筹码的概率也就越少。然而,这只是知觉。即,这基本上是基于可见或幻想出来的集合结构的,并非是基于可推广至所有案例的集合的合并和分离。

在其他事实中,在这点上有个重要事实:特例少一些时,单一组的问题(即当从有2个白色、1个红色筹码的集合中拿筹码时,我们更有可能拿到红色的还是白色的筹码?)就比在有两个组的实验中问到的类似问题(当我们分别从由2个筹码、3个筹码,且每组当中只有1个有十字的筹码构成的两组筹码中拿筹码时,哪组更可能拿到有十字的筹码?)更难。从逻辑上说,这两个问题是同等的。但是,从表征性知觉的视角而言,我们

立即看到了它们之间的差异：当呈现两组筹码时，两组筹码比较的唯一事实使儿童更容易脱离部分与整体的关系，因为第一组中的关系不同于第二组中的关系。相反，在单一组案例中，单一可见整体中元素的合并阻碍了实验对象同时思考整体与部分。实际上，面对像1/2和1/3或1/4和2/4这样有单一变量的两个实验组，儿童立即注意到了第一组中2个筹码与3个筹码或第二组中1个筹码和2个筹码的差异。正是这种差异独自左右了儿童的判断：1/3比1/2中的不可能性更多，2/4比1/4的可能性更多。但是，另一方面，在1/3(3个筹码中有1个红色筹码)组成的单一组中，要比较可能案例(1)与不可能案例(2)，他必须看到两种筹码都是整体的组成部分。即，他必须比较1/3和2/3，这就要求更多的抽象思维，因为整体是单一的：仅比较部分(1)和部分(2)，而没有看到每个元素被拿到的概率是相同的(没有将所有筹码看作一个整体)，他陷入了只拿1个筹码的观点之中，他会拿到红色筹码，因为只有1个红色筹码。

然后，我们明白了这个阶段出现的某些错误的原因。当实验对象比较两个组时，它们想到了(肯定案例，也即是部分；或可能案例，即整体)不变项，而不是将注意力集中在变化项上，这样就每次被愚弄了。因此，博韦判断出1/4和2/4的概率是相同的，因为他想到了筹码(4)整体，但是布鲁选择了1/3的概率比1/2的概率大，查恩选择了1/5的概率比1/2的概率大，因为他们想到的都是只有1个有十字的筹码。在这些只有1个有十字的筹码特殊案例中，实验对象实际上表现出来的是：他们还不能通过系统分离将肯定案例(部分)关联为可能案例(整体)的集合。他将自己局限于两种可感知的预期：当可能案例的数量相同时，他将注意力聚焦于肯定案例并选择了筹码数量多的那组。当肯定案例的数量相同时，他认为是非肯定案例并选择了筹码数量少的那组。这就是我们在子阶段1B中发现的发展的局限性。但是相对于第一阶段1A中儿童的反应，这还是有意义的，而且是阶段2中运算总结及分离的前期准备。

第四节　第二阶段：单一变量比较的普遍成功，子阶段2A：比例问题的系统失败

一旦习得了第一逻辑数学运算，即大约在7岁，儿童就不会在肯定案例(集合A)与非肯定案例(A')关联成整体(B)上存在困难。A与A'组成B被视作可能案例的集合且使多种分离成为集合A与A'的函数。相反，包含了两个变量的问题涉及了比例的概念，解决这种问题需要只有在阶段3中才出现的更复杂的运算，尽管这种运算在子阶段2B已经有所发展。

以下是子阶段2A中的部分案例(以中间状态的实验对象开始，其所有回答都正确，但其推理就像子阶段1B中的实验对象那样)。

吉尔(6;6)　问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/2和1/3:"*这里(1/2),因为有2个筹码。*——这个(1/5和1/6)呢?——*那里(1/5),因为有5个筹码,不是那里(1/6),因为有6个筹码。*"

问题4(确定-可能问题),2/2和1/2:"*那个(2/2),因为有2个筹码;是的,那个确定*(耸了耸肩膀)。"

问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/4和2/4:"*那个(2/4)更确定,因为有2个有十字的筹码。*"

问题10(两个不同可能性问题):1/2和2/5:"*这里(1/2),因为有2个筹码。*"

问题7(比例性问题),1/2和2/4:"*这里(2/4),因为这当中有2个有十字的筹码。*——两组筹码中的可能性不同吗?——*是的,这里有2个有十字的筹码,那里只有1个*(感觉到了比例)。——这个(1/3和2/6)呢?——*这里(1/3),因为有3个筹码。*——两种情况中的比例相同吗?——*不同。*"

皮尔(7;8)　问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/2和1/3:"*这里(1/2),因为有1个有十字的筹码。*——这里(1/3)呢?——*这里有2个没有十字的筹码。*——那么,为什么这个(1/2)的概率大?——*因为总共就只有2个筹码。*"

单一组(1个红色、2个白色筹码):"*我们更有可能拿到白色筹码,因为这当中有2个白色筹码。*——这种(每种颜色的筹码各有2个)呢?——*拿到红色或白色筹码的可能性相同。*"

问题10(两个不同可能性问题),1/2和2/3:"*这里(1/2)更确定,因为只有1个筹码没有十字,而在那里总共有3个筹码。然后,我可以从那里选择,但是一个也拿不到。*"

问题2(两个确定问题):"*我们可以立刻从两组中拿到有十字的筹码。*"

苏(8;3)　问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/3和2/3:"*这里(2/3)更有可能,因为有2个有十字的筹码。比那组多1个。这里(2/3)我可以拿到2次,那里(1/3)只能拿到1次。*——这个(4/5和3/5)呢?——*这里(4/5),因为有4个有十字的筹码,而那里只有3个。*"

问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/5和1/4:"*这里(1/4)更确定,因为只有4个筹码。比起有5个筹码的那组,这组失手的次数更少。*"

问题7(比例性问题),1/2和2/4:"*这里(1/2),因为如果我拿不到,我只失败1次。*——这个(1/4和2/8)呢?——*这里(1/4),因为我确定失败的次数少一些。*——失败多少次?——*3次,另一组是6次。*——在1/4组中,你能赢多少次?——*1次。*——那个呢?——*2次。*——所以呢?——*我更喜欢这个(1/4)。*——这个(2/6和4/12)呢?——*这里(4/12),我会赢更多次,但是我也会失败更多次。但是,我更喜欢这个(4/12),因为我会更经常赢。*——另一个呢?——*我会赢2次,失败4次。*——第二个呢?——*赢4次,失败8次。*——所以呢?……"

问题10(两个不同可能性问题)1/2[①]和2/3:“*这里(2/3)更确定,因为我可以赢2次,只失败1次。那里(1/2)我会赢1次,也会失败1次。*——这个(4/9和2/5)呢?——*这里(2/5),因为我失败的次数会少一些。*”

阿德(8;6)　问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/3和2/3:“*这里(2/3),因为有2个有十字的筹码。*”

问题9(肯定案例中的相同可能性问题),2/3和2/4:“*这里(2/4),有2个没有十字的筹码。这里(2/3)更容易,因为只有1个没有十字的筹码。*”

问题7(比例性问题),1/2和2/4:“*那里(1/2)更容易,因为只有1个没有十字的筹码。*”

问题10(两个不同可能性问题):2/3和3/4:“*这个(3/4)更容易,因为有3个有十字的筹码,那里(2/3)只有2个有十字的筹码。*——有多少个没有十字的筹码?——*分别是1个。*——然后呢?——*在这里(2/3)有1个没有十字的筹码。不,相同的。*”

拜(9;3)　问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/3和2/3:“*那里(2/3),因为有十字的筹码多一些。*”

问题7(比例性问题),1/2和2/4:“*这里(2/4),因为有十字的筹码更多。这个更简单。*——这个(1/2和3/6)呢?——*这里(3/6),因为有十字的筹码更多。*”

问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/2和1/3:“*这里(1/3),不是那里(1/2),因为这里(1/3)有很多没有十字的筹码。*”

问题10(两个不同可能性问题),1/2和2/5(长时间犹豫):“*或许(1/2)。*——为什么?——……(不能回答)”

艾(9;6)　问题8(肯定案例中的不同可能性问题),1/3和2/3:“*那里(2/3),因为这当中有2个有十字的筹码。*”

问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/4和1/5:“*这里(1/4),因为有3个没有十字的筹码,而那里(1/5)是4个。*”

单一组(1个红色、2个白色筹码):“*我们更可能拿到白色的筹码,因为这当中有2个白色筹码。*”

问题10(两个不同可能性问题),1/2和2/5:“*这里(2/5),因为这当中有2个有十字的筹码。*”

里昂(10;7)　单一组:“*1个白色筹码,因为有2个白色筹码。*”

问题7(比例性问题),1/2和2/4:“*这里(1/2),因为只有2个筹码。*”

通过与子阶段1B比较,进步是显而易见的。所有关于单一变量的问题,包括单一组的问题立即得到了解决(皮尔、艾和里昂)。儿童的论证甚至同时考虑到了肯定案例

① 英译版为1/3,根据问题10与孩子的回答推测,应为1/2,应是英译版错误。——译者注

(*A*)、非肯定案例(*A'*)及全部的可能案例(*B*)。因此,这个阶段的每个实验对象立即解决了问题8和9(肯定案例或非肯定案例中的不同可能性)。而在子阶段1B,儿童只能解决其中的一个问题,其他的仍不能解决。因此,一个案例中的论证看起来与其他案例中所用的论证是相同的。例如,苏喜欢2/3胜过1/3,因为他"*在这里可以赢2次*(2/3)"。而他选择了1/4非1/5,"*因为有4个筹码,我失败的次数会比有5个筹码的少*"。毫无疑问,我们在此已经建立了*A*和*A'* (非肯定案例)与整体*B*(四五个筹码)的关系。此外,有两个变量问题的推理尽管因为缺少比例性而不正确,但儿童依然表现出相同的执着。因此,苏已经明白了为什么2/3比1/2大的关系:"*这个*(2/3),*我会赢2次,失败1次。那里*(1/2)*我会赢1次,失败1次*。"

根据(合并的)可逆格式将整体分解成关联子集的能力立即引发了分离(*B*中的某元素可以在*A*或*A'*中)和多种可能的发现:一个人"*可以赢*",也"*可以失败*",就像苏所说的。实际上,这个阶段的所有实验对象都能区分出阶段1(当可能就是必然时)中与真实情形没有差异的两种方式。阶段2中的儿童的言论已经使我们清晰地知道了"*我可以,这是非常确定的*(吉尔)"等等。

仍然需要知道的就是,为什么儿童习得了这些新运算方法还是不能解决包含两个变量的问题,即比例可能性问题(问题7)或甚至更复杂的案例(问题10)。相关原因有两个:第一个原因是包含一个变量的问题可以借由简单地加上或减去一个数字(分数)或乘上(几何比例)来解决。其中,乘上(几个比例)的难度自然大一些。实际上,在这点上,这是一个同时根据两个体系来做出推理的问题,这个问题还需要形式运算。

这就引出了第二个原因。我们更容易地看到了儿童只有在阶段3中才能理解与大数字法则相关的问题,因为这些问题尤其意味着需要用到比例。规律性会随着大数字增加,但是规律性的问题是相对的(差异或差距与实验中的数字大小成比例),而非绝对的。在此,我们发现了一个类似的问题:实验对象必须要明白概率数字与可能案例整体大小的次序相关,没有绝对值。如果一个人说,相对比例因为没有共同元素(*A*,*A'*或*B*)而不能以简单方式进行比较,那么我们就有了两个必须要整合到一起的不同体系,每个体系都有其自己的可能性和比例。难度与整合大数字一样,因为这超出了具体运算的范畴,需要假设-演绎推理。

第五节 子阶段2B:比例问题的逐步经验性解决

在形成系统性解决方案之前,儿童都是通过经验摸索的方式逐步解决包含两个变量的问题。

拉姆(9;9) 问题9(肯定案例中的相同可能性问题),1/3和1/4:"这里

(1/3),我们可以更容易拿到有十字的筹码,因为只有2个没有十字的筹码。"

问题7(比例性问题),1/2和2/4:"这里(2/4)。不,这里(1/2),因为只有1个筹码没有十字。——你为什么说另1个?——因为有2个有十字的筹码。——那么,2个有十字的筹码比1个有十字的筹码更容易吗?——1个没有十字、2个有十字……一样,因为有2个有十字的、2个没有十字的筹码(2/4)。——2个筹码中有1个有十字的那组更容易吗?——不,一样的。但是,我们更确定这里(2/4),因为有2个有十字的筹码(非常困惑)。"

凯尔(10;2)　问题7(比例性问题),1/2和2/4:"这里(1/2),因为筹码的数量少一些。不,这个(2/4),因为有2个有十字的筹码。——一样吗?——不一样,这个(1/2)无论如何都更确定……不,还以为这里(2/4)有十字、没有十字的筹码各是2个,这里(1/2)有十字、没有十字的筹码各是1个。——非常好。现在解释一下。——因为那里(2/4)每种筹码各是2个,这里每种筹码各是1个;然后,我们可以拿到1个有十字的筹码,但是每次我们也可能拿到1个没有十字的筹码。(换言之,在1/2或2/4关系中,每个有十字的筹码都对应于一个没有十字的筹码)。"

问题10(两个不同可能性问题),2/5和1/3:"这里(1/3)更确定,因为筹码的数量少一些。——那里(2/5)有十字的筹码更多吗?——是的,但是没有十字的筹码也更多。"

问题7(比例性问题),1/3和2/6:我们将2/6组分成两个1/3组:"两组中的任何一组(1/3或2/6),因为是一样的。在每组中,1个有十字的筹码对应着2个没有十字的筹码。——现在,如果我拿走1个没有十字的筹码(这就形成了问题10的情形,2/5和1/3),更容易从哪组中拿到有十字的筹码?——现在是这里(1/3),筹码数量少的那组。——这个(1/3和2/6)呢?——这里(1/3),没有十字的筹码数量少一些。——有多少个有十字的筹码?——哦,一样的。——现在(2/5和1/3)呢?——这个(2/5)难度更大(他再次被愚弄了)。——这个(2/6和1/3)呢?——数量少的那组更容易,因为筹码的数量少。——(我们将2/6那组分成两个1/3组)——一样的。——如果我们将其混合起来(混合成2/6一组)呢?——更有可能在这组中(1/3)。——但是,你刚告诉我是一样的。——是的,是一样的。现在是一样的。——为什么?——这里(2/6)有十字的筹码多一些,没有十字的筹码也多。这里(1/3)两种筹码都少。"

迈(11;1)　问题7(比例性问题),1/2和2/4:"这里(2/4)更可能,因为有2个有十字的筹码。——但是也有2个没有十字的筹码呢?——好吧,那就是一样的。——你选择哪个?——选这个(1/2),因为只有没有十字的筹码。——但是这里(2/4)你告诉过我有2个有十字的筹码,是相同的吗?——不,我还是认为是那里(2/4),因为有2个有十字、2个没有十字的筹码。那里(1/2)每种筹码各是1个。我们拿到有十字的筹码跟拿到没有十字的筹码的概率是相同的。——那么,是一样

的吗？——*是的，因为有4个筹码，我们刚好也可以拿到2个没有十字的筹码。*”

问题10（两个不同可能性问题）。2/5和1/3：“*相同，因为那里*（2/5）*有3个没有十字、2个有十字的筹码，这里*（1/3）*1个筹码有十字，2个筹码没有十字*。——这个（1/3和2/6）呢？——*我更喜欢这个*（1/3）。——观察。（我们把2/6分成了两个1/3组）相同吗？——*是的*。——如果恢复原样呢？——*我更喜欢这个*（1/3），*因为我更有可能拿到有十字的筹码*。——但是，这里（2/6）有2个有十字的筹码呢？——（长时间犹豫）*那么就是相同的*。——好的，现在这个（1/3和2/5）呢？——*这个*（1/3）*更肯定，因为有1个筹码有十字，2个筹码没有*。（我们让1个有十字的筹码对应着2个有十字的筹码，2个有十字的筹码对应着3个没有十字的筹码）看。——*哦，剩下的筹码中没有十字的少*。——如果混合（2/5对应着1/3）呢？——*这个*（2/5）*更可能*。”

佩（12；2）　已经在类似1/2和2/4这样的简单比例性问题上（问题7）表现出适用于阶段3的反应。“*两组一样，因为这里有2个，另一组包含了两个这样的组。两组一样*。”

“如果我们一边有这个（1/3），另一边是2个有十字的筹码，我们必须加上多少个没有十字的筹码，两边的概率值才能一样？——（他认为2/4等同于1/3）*像这样，我们每边都有2个没有十字的筹码*。——如果我摆成1/3和2/6呢？——*哦，现在概率是相同的*（他以相同的方式发现了2/3等同于4/6，2/3等同于6/9）。——为什么？——*我们需要3倍数量的筹码*。”

比斯（12；2）　甚至更接近阶段3。问题7（比例性问题），1/2和2/4：“*在两种情形中，风险与概率相同，一样的*。——如果我把这个（1/3）放在这里，2个有十字的筹码放在那里，我们需要在那里放多少个没有十字的筹码，才能使两边的概率相同？——*我们需要4个，因为有2个没有十字、1个有十字的筹码。是相等的*。”

但是，对于2/5和6/13（问题10），他认为：“*一样，两边的风险是相同的。这里有6个有十字、7个没有十字的筹码，那里有2个有十字、3个没有十字的筹码*（因此，每边只是1个的差异）。——如果我们比较三组，1/2，20/21和100/101，哪个最可能？——*多了1/100的那组比多了1/20的那组的概率小一些*（长时间犹豫之后）。”

我们在这些案例中清晰地看到了，儿童在比例概率问题上存在困难的原因。肯定案例（*A*）和可能案例（*B*）的两个值是变化的，儿童回到了这两个数值上，或用某种波动甚至只是其在单一变量问题上成功完成的相同类型的错误归纳保持了这两个数值。要同时考虑到部分和整体，他以选择性推理肯定案例（*A*）开始，就好像整体（*B*）是不变的；然后，推理非肯定案例（*A′*），就好像（*A*）保持不变。此后，如果他觉得这些方法不够，他就有限地比较了两个子集，不是（*A*–*A′*）就是（*A′*–*A*），我们在此观察到从最简单问题（1/2等于2/4）到最难问题（不同比例1/3和2/5，类似的，最后2/3和6/7）的有趣发展。正是

这个原因，当涉及1/2单一非肯定案例及2/4两个肯定案例时，拉姆甚至来回比较1/2和2/4。然而，另一个极端，比斯立即就看到了1/2和2/4及1/3和2/6的相等性。但是，对于2/5和6/13，他推理出A和A'的差异就是两种情形都只是1的差异。

另一方面，如果我们将较大的组分解成大小相同的几个小组(例如，用两个1/3组替代2/6组)，实验对象通常立即就看到了相等的关系。在早期的案例中，他用这种相似的方法自己发现了正确的解决方案(参照凯尔)。但是，因为儿童遗失了他刚刚观察到的关系，我们接下来所有要做的就是用一种奇特的方式将此前分出来的几个小组再次合并起来，就好像这些不再有效了(例如，参见凯尔和迈)。这种情形恰恰就是有明显例外的复制，在简单相关实验中，我们在7岁以下儿童身上观察到：5到6岁的儿童能够看到两个同等集合中一对一的相关性，但只要元素不在其视线范围内，他就不再认为是相同的集合。[①]不过，在此早期阶段，儿童没有逻辑数学运算是可能的。但是，我们刚提及的9岁到11岁的儿童已经完全有了逻辑及数学运算。因此，显然，这只是必须要同时推理两组并比较产生了这种回到可感知状态的内部关系的事实。在包含了两个关系的情形中，比例需要形式运算，且在此之前，我们得到的只是知觉性的解决方案，非常类似于此前的具体运算。

现在，我们清晰地看到了这些困难和大数字法则的缓慢理解中所表现出来的困难的相似性。一方面，这要归因于这种理解也需要使用到比例性的事实。另一方面，是相同绝对差异的相对性事实的重叠部分(例如，比斯有1/2，1/20，1/100的非肯定情形)，用大数字来理解比用小数字来理解的难度要大得多。

第六节　第三阶段：两变量问题的解决

最后，在第三阶段，所有问到的问题普遍都很快得到了回答，没有出现在子阶段2B比例性问题中看到的摸索。

恩(10;2)　问题8(肯定案例中的不同可能性问题)，1/3和2/3：“*这个*(2/3)，*因为有2个有十字的筹码*。”

问题9(肯定案例中的相同可能性问题)，1/3和1/4：“这里(1/3)，因为这有3个筹码。——但是每组中都有1个有十字的筹码啊？——*这没有什么差别，这里*(1/4)*更容易，4个筹码当中3个没有十字，而这里*(1/3)*只有2个筹码没有十字*。”

问题10(两个不同可能性问题)，1/3和2/5：“(*思考了一会儿后*)*这里的概率大*(2/5)。——这个(1/2和2/5)呢？——*这里*(*1/2*)。——为什么是2/5，而不是

① See Jean Piaget, *The Child's Conception of Number* (New York: Norton, 1965), chap. Ⅲ.

1/3？——*因为这组(1/3)中有2个筹码没有十字，而这组中有2个有十字的筹码(2/5)。*”

问题7(比例性问题)，1/2和2/4：“*这里(1/2)。不，两组一样。*——这个(1/2和3/6)呢？——*一样。*——为什么？——*两组当中有十字、没有十字筹码的数量相同。*”

杜尔(10;3) 问题7(比例性问题)，1/2和2/4：“*一样，因为这组4个筹码中有2个有十字的筹码，另一组2个筹码中有1个有十字的筹码。*——什么意思？——*每组中筹码的数量是有十字筹码的2倍。*”对于1/3和2/3：“我们需要增加多少个没有十字的筹码才能使两边的概率相同？——*3个(因此是2/6)，因为这里(2/3)比这里(1/3)更容易。*”

伯斯(11;0) 问题7(比例性问题)，1/2和2/4：“*一样的。*——这个(1/3和2/6)呢？——*也是一样的。*——如果把3/6放这边，6个有十字的筹码放另一边，我们需要增加多少个没有十字的筹码才能使两边的概率相同？——*6个。*”

问题10(两个不同可能性问题)，1/3和2/5：“这个(2/5)*更容易，因为这组中有十字的筹码比那组(2/5)少1个。*”

卢特(12;5) 问题10(两个不同可能性问题)，1/3和2/5：“*这里(2/5)更容易，因为给出的是2比3的概率，那里是1比2。我们需要在那里增加1*[①]*个没有十字的筹码(因此是2/6)才能使两边的概率相同。因为这里少1个筹码，所以更容易。*——2/5和3/8呢？——(他数了数手指)“*一样的，不一样。*”(没有任何建议，他以一种使其能够做出正确决定的方式摆放了两组筹码)“*不，2/5那个更容易一些。*”

“现在(2/5和4/9)呢？——(他让2/5那组保留成我们刚才看到的那样，然后，他让4/9那组中1个有十字的筹码对应着1个没有十字的筹码，剩下1个有十字的筹码对应着2个没有十字的筹码)*现在概率相同了，因为每边都有1个没有十字的筹码。哦，不*(喘息之下做出了一些计算，但是没有摆脱困难)，*现在，我看到了，这里(2/5)的概率更大。*”

“1/3和8/17呢？——*8/17更容易一些。如果是相同的，就应该是8/24。*——哪个概率更大？——*8/17，因为这里(1/3)没有十字的筹码数量是有十字的2倍，而那边(8/17)不是。*”

“如果我们把2/3放这边，一个有十字的筹码放这里，你需要多少个没有十字的筹码才能使两边的概率相同？——*我们做不到。我们至少需要增加1个筹码，然后就会有很多可能*(即1/2比2/3大，不正确的回复)。”

因为处理分数时有一些困难，当比例或不成比例不能立即显现出来之时，实验对象

① 英文版为4，逻辑上应为1，推断应是英文版错误。——译者注

通过相关性体系来决定关系。但是，与子阶段2B中实验对象的反应相反，他们用这种方式发现的双关系被保持下来，即使是在筹码被混合在一起时。他们用这种通过将乘法关系整合在一起的方式获得了部分与整体之间的关系、分离的来源、分离机制允许的比例的量化。

（我们在此即将结束的）随机拿取筹码的研究以一种普遍的方式证实了，我们所看到的关于物理概率的东西更为清楚地表现出了，在概率和可能性概念发展中发挥作用的运算机制。因为这已经是物理可能性问题中的案例（比起简单概率问题中的因素，物理可能性问题中的因素相当复杂），因此，我们注意到基本可能性概念只有在形式阶段才能得以发展，我们开始怀疑为什么是这样的。

这个问题的基本原因是形式运算是第二能力或需要先前已学习过的运算的运算，即具体运算的心理运算。

形式运算的特点即是如此。首先，形式运算比儿童所依赖、习得的运算更抽象。因此，这是具体运算阶段的儿童不知道的假设-演绎能力。这就是为什么要在习得纯粹的可能模式之前习得，为什么是可能发展的必要条件，为什么对逻辑发展和可能性的量化而言是无关紧要的不同关系（分离，等）。

形式运算因此也包括源于其他运算的运算。一方面，这是在基本的具体运算时无法达到的、必然会影响到概率概念发展的某些运算机制的建立所必需的心理工具。大数字法则正是以这种方式（我们已经多次表明）假定：比例的应用及作为关系的关系需要介入到儿童的形式运算思维之中的比例本身——不管多具体，从逻辑的观点而言，比例依旧。总之，可能性概念的习得意味着使用组合运算——组合、排列、组合排列的能力。现在，我们将会看到这些运算形成了第二次序的运算，而且也需要形式机制、心理学解读。

第三部分
组合运算

第七章 组合运算的发展

之前的每个研究都使我们希望得到相同的结论：概率和可能性概念的形成绝对依赖于组合运算自身的演变。正是从根据排列和组合的运算格式来感知混合和干预的能力开始，儿童知道了所谓的随机混合概念，即概率概念。另一方面，儿童通过使用乘法而非简单的加法模式使影响混合集合的分离从属于所有的可能组合来建构可能性的概念。

可能性的概念和组合运算之间的关系在逻辑上是显而易见的。因此，我们在第一章中让儿童做实验用的弹珠的持续混合就被简化成一系列的排列运算。偶然混合与所遵循的相关运算之间的唯一差别，就在于混合中以具体方式完成的排列并未表现出某种系统次序，尤其是所展示出来的弹珠只是可能排列中的一部分。第二个限制甚至比第一个更重要，因为即使没有次序，完全知道所有可能排列就等同于完全可推断。尤其是，我们确定看到所有弹珠迟早都会回到起点，然后混合不再是不可逆的。但是，只有部分可能排列做到了，这就是为什么有概率性的或不可逆的随机混合。因此，理解概率的概念就意味着理解组合运算。其中，在组合运算中，偶然事实是所有组合结果中的一小部分。另一方面，因为只有一部分可能运算相互作用的事实，儿童一旦理解了组合机制，第二个概念就完成了概率的概念：这就是可能性的概念，即观察到的运算和可能运算之间的关系。混合正是以这种方式朝向最肯定排列的方向发展，这种可能性刚好存在于可能部分排列及所有可能性的关系之中。同样，在随机拿取筹码中，手伸入袋子中只能在所有可能筹码中发现确定筹码。在最后的案例中，可能性的判断存在于分解所有可能组合（加法分离，即一个接一个，或乘法，即乘以2，3或n个元素）及决定所观察到的组合及所有可能组合之间的关系之中。

但是，如果可能性的概念及组合运算两者之间的关系是显而易见的，那么就没有必要证明在真正的心理基因中（运算关系的实际基础），概率和可能知觉概念的建构是否确实需要组合运算的发展。总之，这正是理解儿童如何习得两种现实之间关联的问题。因此，就迹象而言，这两种现实源于不同的心理倾向。

记住我们已经以下述方式研究了这些问题。在就类似随机混合（第一章）或随机拿

取筹码(第五章)这样的概率问题提问了某些实验对象之后,我们并没有明示与此前实验的任何关系;接着,我们就要求他们用所有方式排列或组合那些数量少的筹码集合;然后,我们分析了儿童在这些组合运算中遵循的不同方法。通过建立以这些方法为特点的连续阶段,我们试图找到这些阶段与我们在可能性概念的形成中发现的几个阶段之间的关系。我们非常清楚地发现了这其中的关联。随机混合中出现的情形是在自发组合运算发展了之后根据概率概念而建构的。

在这章中,我们将描述第一组合运算系统的形成,即组合本身。在第五章中,我们只研究了从n个元素当中一次抽取两个元素形成($C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$)个组合结果的案例。我们记得第五章中所分析的证据,存在于从装有不同颜色筹码的袋子中拿取成对的筹码及预测作为模型分布函数所拿到的筹码颜色。另一方面,我们采用了下述实验来研究组合运算,在这种实验中,我们立即注意到了实验对象与先前实验对象的相似性。我们将筹码堆放在图表上(一堆是白色筹码,另一堆是红色筹码,等),要求儿童不重复已选定的颜色来尽可能地将筹码组对(在肯定案例中,我们确实认可同色筹码的组对:蓝色和蓝色等;其他时候,我们不认可)。

以下是我们获得的结果:在阶段1(平均到大约7岁)中,儿童只能凭经验发现组合,不成系统且仅仅是通过摸索(同样,他不能系统预测出每对筹码的组成或甚至在第五章的随机拿取简单元素的实验中也失败了)。在阶段2(从7岁到11岁),出现了方法体系的寻找。同样,可能性的判断标志着此阶段(第五章)系统量化的开始。比较阶段2中的组合反应及所习得的(从大约6岁或7岁开始)建构简单的相关性的能力非常有趣。显然,组合运算在发展上滞后于后面[①]的这些能力。只有在阶段3(形式运算,从11岁到12岁),儿童在引发相关性的学徒期阶段(从6岁到7岁)经过一些实践之后,才能有条不紊地掌握全部的组合。

第一节　第一阶段:经验性组合

之前,6岁的实验对象仍是通过简单摸索普遍成功发现了四五种颜色的所有组合。相反,年龄小的实验对象通常不能达到这种复杂建构,即使是经验性的建构。这有几个案例,这些案例以在我们的帮助下成功发现3种颜色的所有组合的实验对象开始。

利韦(4;8)　红色(R)、白色(W)和蓝色(B)。"这些是小男孩。告诉我怎样才能让他们在所有可能组合中一次走掉2个。看,就这样。试试看。——*R*和*B*。——

① 指阶段3的能力。——译者注

好的，然后呢？——*B*和*B*，*W*和*W*，*R*和*R*。——还有吗？——*R*和*B*。——还有呢？——*R*和*B*。——你已经说了那个。——2个*W*。——看，你已经有了。还有其他的吗？……W只和B一起。还有其他可能的安排吗？——*W*和*W*。——你已经说了，还有其他的吗？……如果我让R和W一起，可以吗？——*可以的*。——（所有的组合对都有了）还有其他的组合对吗？或者你已经有了所有组合，对吗？……你怎样才能知道你有了所有的组合对？"（他数了数）

罗斯（5;9） 白色（W）、红色（R）和绿色（G）：他把W和W、G和G、R和R放在一起。"还有吗？——*这个*（G和G）。——你已经有了。把两种不同颜色放在一起，像这样（G和W）。——（他把G和W放在一起，然后是R和G。）——全了吗？——（他看了看。）——*这个*（W和R）。——你怎么知道你是否已经完成了？"

我们增加了蓝色（B）。罗斯把B和B、W和W、R和R放在一起，然后是W和R、B和R，再然后是W和R（我们排除了这个），最后是W和G。"还有其他吗？——*没了，我把所有颜色全部安排好了*。——你把什么颜色跟蓝色放在一起？——*和R、W和B*。——你没有把蓝色跟哪种颜色放在一起？——*我把每种颜色都跟蓝色放在一起了*。——和G吗？——哦，不。（他把B和G放在一起）

沙查（6;3） 3种颜色，白色（W）、红色（R）和绿色（G）。他把W和W、R和R、G和G放在一起。"其他的呢？——*这个*（W和W）。——你还没有放那个吗？——*是的*（他拿走了这个，然后把R和W放在一起）。——现在呢？——（R和G，W和G，又是R和G。）——你已经有那个了吗？——（他拿走了第二组R和G。）——全了吗？——*是的，我们都有了。我们需要其他颜色*。"

我们增加了黄色（Y）。他把Y和G、Y和R、W和G、W和Y、W和W、R和R、G和G、W和R放在一起（每次都会比较最初的颜色对与他刚组成的颜色对）。"还有吗？——*是的*（G和R）（他停了下来）。——还有其他组合方式吗？——*没有了*。——你确定吗？——*是的*。——你怎么确定？——*看看就能确定了*。——与G配对的颜色多几种？——*4种*。——W呢？——*一样*。——Y呢？——*3种*。——然后呢？……这是不是有什么意思？——*没什么意思*（他没有看到。）"

佩（7;3） 蓝色（B）、白色（W）和红色（R）。他把B和W、W和R放在一起。"如果继续呢？——*W和W、B和B、R和R*。——接着呢？——*没有了。我们将只能重新开始*（他没有看到B和R）。"

"现在，如果我们加上绿色（G）呢？——（他把R和B、G和B、B和B、G和G、R和R、W和W放在一起。）——还有吗？——*B和W、W和G*。——还不全。——*不，全了*。——你怎么知道的？——*因为我再组不出其他样子了*。——再试试看。——（他把R和B放在一起，然后拿走了，再然后把R和G放在一起。）——你做了什么才发现那个的？——*我仔细看了看，然后看到还没有红色和绿色*。——（现在，我们增加了黄色和棕色，总共是6种颜色）你用所有颜色可以组成多少

对？——12对。——为什么？——因为有6种颜色。”

现在,我们看到了这些实验对象是如何进展的。只要是一个将两个相同色放在一起的问题(即,R和R、G和G,等),他们就能毫无困难地遵循既定颜色的次序,因此也就能够系统化地摆全可用颜色的组合。显然,尽管在这点上,在术语的恰当意义上不存在任何组合,只是每种序列选项的简单复制。另一方面,只要是让一种颜色与另一种颜色配对的问题,实验对象就不用寻找某种方法体系,而只是任意两种颜色的简单随机配对,然后他们随后试图看看是否还有其他组合可能。

之前3种颜色的组合已经给出了有意义的数据。例如,用白色、蓝色和红色的利韦只发现了红-蓝,然后是蓝-白,他自己没有发现红-白。7岁3个月的佩同样忘记了3种同色的配对。

对于4种颜色配对的组合,所有实验对象都没有成功做出一种颜色与其他3种颜色,然后是另一种颜色与其他2种颜色等的系统化排列。当他们将1种颜色与其他两三种颜色按顺序放在一起时,就像罗斯确实把红色和白色放在一起,然后是红色和蓝色。这只是简单的坚持,而不是有意程序。因为在这些案例中,一些相同的配对(白色-红色)在儿童没有注意到他已经配对过的情况下再次出现了。甚至更明显的是,所有实验对象自己都没有成功发现4种颜色可以配成6对。这就充分说明他们的方法依然是经验性的,即是杂乱连续配对,而没有用到规划。规划即使不周全,也能给出第一批组合。

因此,第一阶段与我们在本系列书的开头看到的一致。例如,在排列不同长度的小棍的案例[1]中:大约4岁到5岁的儿童不是建构所有小棒的等级,只是排列了由一长一短两个小棒组成的配对,而没有考虑到要比较不同的配对。但是,当他们习得了序列的概念(6岁半到7岁半),即当他们有了分组的运算概念之后,涉及三四个元素的组合运算对这个阶段而言仍然是前运算的,相当于本序列首次开始的水平。

第二节　第二阶段:方法体系的寻找

从8岁开始,实验对象要进行如下实验:由4种不同颜色筹码构成的集合被摆放在图表上,就像之前我们让儿童用自己的方式配对一样。然后,我们问他是否能发现一种更快、更准确的体系来配对,又不忘记所有的可能性。在第二次试验之后,我们给了他6种颜色进行配对,要求他不能忘记所有的可能来配对。

皮埃(8;3)　4种颜色(我们称作A,B,C和D)。他把AB,CD放在一起,过了

---

① See Jean Piaget, *The Child's Conception of Number* (New York: Norton, 1965). Chap. Ⅵ.

一会儿，继续把AC，AD，CD（他很快就拿走了），BD放在一起："全了。——你怎么确定的？——*我看了看这里，还有这里*（他做出的配对和那堆筹码）。*哦，还有这个，BC*。——你有多少个黄色筹码（A）？——*3个*。——多少个红色筹码（B）？——*3个*。——多少个蓝色筹码（C）？——*3个*。——多少个玫瑰色筹码（D，但是这次我们把筹码藏起来了）？——*4个*。"

6种颜色：他凭经验将筹码放在一起。"试试能不能发现一种不能漏掉任何配对的方法。——（他又开始了：AB，BC，CD，DE和EF。）——都有了吗？——*哦，不*（他把B和D放在一起）。——再试试。——（他再次把AB，BC，CD，DE和EF放在一起，然后继续凭经验）"

菲尔（8;6） 凭经验发现4种颜色可以形成6种可能组合：AB，AC，AD，BC，BD，CD。他试了更多种，并以相同配对结束。他总结说，"完成了。*我们不能再有其他配对了*。"

我们增加颜色E和F再次开始。配对如下：AF，ED，CB，FD，AC，EF，AE，CE，BD，BE，AD。"全了吗？——*我认为全了*。——你用了多少次黄色（E）？——*5次*。——红色（D）呢？——*4次*（他比较成堆的筹码并补充了CD）。——绿色（F）呢？——*3次*（他补充了BF，CF，AB）。——好的，现在你能发现一种确定你有了全部配对的方法吗？——（再次开始：他把EF，CD，AB，AF，BC，DE和AD放在一起，然后继续凭经验。）"

丹（9;6） 4种颜色：他把AB和CD放在一起，接着把BC和AD放在一起。"全了吗？——*不，不全*（他补充了AC和BD）。"

5种颜色："试着发现一种能确定你得到所有配对的方法。"（他把AB，CD，DE配对，然后凭经验配对并发现了AD）"你有多少个红色筹码？——*3个*。——多少个玫瑰色筹码？——*2个*。——多少个蓝色筹码？——*1个*。——多少个黄色筹码？——*1个*。——就应该是这种方法吗？——（补充了蓝色和玫瑰色，逐渐补全了所有遗漏的配对。）——现在，每种颜色的筹码有多少个？——（他数了数）——*4个*。——为什么？——*因为有4堆*。（他数了数）*不，有5堆*。——为什么你每种颜色有4个配对，且是5堆筹码？——*不知道*。"

"试着发现一种不能遗漏任何配对的方法。"（他以AE开始，然后是AB，BC，DE，再然后是AC，BD，CE，最后是AD）*我再没有其他配对了*。——*多少个玫瑰色筹码*？——*4个*。——多少个红色筹码？——*4个*。——多少个蓝色筹码？——*4个*。——多少个黄色筹码？——*3个，哦，是的*（他补充了BE）。"

切沃（10;0） 4种颜色：他把AB，BC，CD放在一起，然后把AC，BD，AD放在一起。"你怎么做的？——*首先是一个接着另一个，然后看看漏了什么*。——试着发现一种更简单的体系。——（他又做了一次，就像之前那样。）"

6种颜色：他把AB，FE，BC，ED，CD配对在一起，然后像之前那样跳过了，并继

续凭经验混合。“如果你拿走第一种颜色,并将其与其他所有颜色配对,会怎样?——哦,*好的*。”(他把AB,AC,AD,AE,AF放在一起,但是又回到了之前:FE,FD,FC,FB,FA。)“哦,*不。我已经有那个了*。[他拿了这个(FA)并跳过,然后继续]”

吉(11;0)　4堆筹码:他把CD,AC,AB,BC和AD放在一起。“你每种颜色的筹码各有多少个?——*3个玫瑰色(C)、2个绿色(D)、3个白色(A)、2个蓝色(B)*。——还能有其他配对吗?——*没有了*。——如果只有2个,你不能发现第三个吗?——(他看了看并发现了BD)哦,*是的,还有。那种方法每种颜色有3个*。——你一直在猜。没有什么方法可以什么都不忘记吗?——*是的,我们配对了3对蓝色、3对白色,等*。——试试看。——(他把AB,BC,CD,AD,AC,BD放在一起。)——试着找一种更好的办法。——(他把AD,BC,AB,BD,CD放在一起,忘记了AC。)”

6种颜色:首先把BE放在一起,然后是CD,再然后是EF,最后是AB,BC,DE和EF。“全了吗?——*哦,没有*。——试着从一边开始。——(他又做了一遍:FE,FD,FC,FB,FA,但是继续从另一边开始:AB,AC,AD,AE,AF,然后拿走了AF。)——全了吗?——*不,还有这个(CD),这个(DE)*。”

罗斯(12;0)　4种颜色:他把AB,CD,BD,AC,AD和BD放在一起。“找一种更好的办法。——(他把3个玫瑰色筹码排成一列,然后将其他3种颜色的筹码与玫瑰色筹码放在一起,但是没有以相同的方式摆放B,凭着经验结束了)”

6种颜色:他把AB,AC,AD,AE,AF放在一起,然后是BC,BD,BE,BF,再然后是FE,FD,FC,最后凭经验结束了。

我们看到了这些不同实验体系的好处,这当中的共同实验告诉了我们:为什么儿童(以及普遍的前科学思维)在理解组合概念及概率(困难甚至更多)中存在那么多的困难。实际上,其共同特点是始于并列的加法概念,而不是相交或干扰,即始于乘法关系。在最后分析的概念中,儿童发现了这个概念,但不是以此为前提。以乘法关系为前提的能力当然能够构建完整的运算体系。在这点上,应该尝试根据从最基本到逐渐接近正确方法的顺序给我们刚刚看到的不同体系排序。

阶段1中所使用的方法包括彼此相互独立的连续配对。实际上,这种方法的缺失在于潜在假设,这个潜在假设恰恰就是相信每对配对都是独立的,就好像每对配对是单独存在的。即每对配对是由被视作与其他配对没有关系的元素形成的。这正是在此阶段最基本案例中所发现的每对筹码的简单并列(尽管这种方法已经在阶段1中出现了):ABCD形成的AB、CD及其他配对是凭经验发现的(参见皮埃如何开始的)。

第二种方法表现出配对的相交概念的发展,但仍属于并列的概念。这是此阶段中最频繁的体系(例如,皮埃在第一个体系之后使用到了这个体系)。对于6种颜色,配对始于AB,BC,CD,DE和EF,其他配对都是凭着经验完成的,然后同样可以说这就是十字并列。

第三种方法放大了其自身的意图:该方法首先存在于配对两个极端上的筹码以标志完全关联的必要性,然后以十字并列继续配对。用过第一种方法之后,丹直接跳到了第三种方法:对于5种颜色的筹码,他以AE开始,然后配对了AB,BC,CD和DE,再然后通过每次跳过一种颜色的筹码来继续配对(AC,BD和CE),最后凭经验结束。菲尔选择了类似方法。

第四种方法,回答了整体关联的相同要求,但是没有提出并列。这种方法包括对称配对(例如,参见切沃):AB,FE,BC,然后是ED,最后是CD,其他配对是凭经验发现的。这种对称趋势在切沃(及其他很多实验对象)身上体现得非常强烈,以至于在接受了AB,AC,AD,AE和AF次序的建议之后,他继续FE,FD,FC等的配对,直至他拒绝他早已发现的FA的配对(参见提问最后部分的吉)。

最后,第五种方法的特点是不完全相交,这种方法引领我们接近阶段3。罗斯自主发现了AB,AC,AD,AE,AF的配对,然后是BC,BD,BE,BF;但是,他害怕继续这种方法,并返回至第四种对称方法。其他配对以类似方法开始,但凭经验结束。

我们看到这个阶段的特点无疑就是寻找关联方法,而不是驻足于单独配对。但是,他们仍没有发现一种完整的方法体系。此原因就是儿童在并列(AB,CD或AB,BC,CD)及对称配对(A→和F→)之间来回摇摆,因为他不能将其整合成一种直接相交的方法,这样每个筹码就能够与其他筹码连续关联起来(AB,AC,AD…和BC,BD…)。有趣的是,我们注意到这两种趋势(例如,简单的线性连续或对称)阻碍了实验对象掌握在组合上发现的可能性概念(参见第五章,第二节)。

第三节　第三阶段:方法体系的发现

从11或12岁(有时候,甚至从10岁)开始,部分实验对象就发现了不会遗漏配对的方法体系。这种方法体系与阶段2中仍然不完整且必须凭经验搜索才能结束的方法体系形成了鲜明对比。以下是以阶段2和阶段3的中间状态开始的部分案例。

斯通(10;7)　6种颜色的配对,首先是AB,AC,AD,AE、AF,然后是FE,FD,FC,FB,在配对FA前停了下来。他接下来配对了BC,BD,BE和ED,EC,EB(他拿走了这个),最后凭经验结束了配对。"你想再做一次,看看能不能做得更好吗?——(他把AB,AC,AD,AE,AF放在一起,接着是BC,BD,BE,BF,然后是CD,CE,CF,再然后是DE,DF,最后是EF。)"

卡德(11;2)　立即发现了将A与其他剩余颜色关联的方法体系,然后是将B与其他剩余颜色关联,关联C与其他剩余颜色的方法相同。"每种颜色有几个?——*5个红色、5个蓝色、5个绿色筹码。*——等一会儿(我们藏起了后面的那堆)。多少

个黄色筹码？——*也是5个*。——为什么？——*因为有5堆，不是6堆，而且我们把每种颜色都与其他颜色放在一起了*。”

劳(12;3)　使用4种颜色配对，像阶段2中的实验对象那样开始。“你能找到一种不会遗漏配对的方法吗？——*是的*。——(他把AB，CD，AC，BD，AD，BC放在一起。)——你刚才是在猜吗？——*不全是。我每种找了4个，然后看到3对就足够了。如果我们把黄色和黄色、蓝色和蓝色等放在一起，就是4对了*。”

6种颜色：“*每种颜色是6对，而不是5对*。”然后他把5个黄色(A)摆成竖列，并将其与颜色B，C，D，F中的一个放在一起，然后把5个蓝色(B)摆成平行列，将其于C，D，E，F中的一个放在一起；然后拿走了第五个：“*不，因为已经与黄色配对了*。”他把4个筹码(C)而不是第五个筹码摆成了第三列，然后将其与D，E，F中的一个放在一起。然后，他拿走了4个C，说“*哦，每次减少1对*。”他然后把2个D分别与E，F放在一起；再然后是把E和F放在一起：“全了。——没有列，你怎么做呢？——(他看了看)*哦，可以，就像这样*(AB，AC，AD，AE，BC，BD，BE，CD，CE，CF，然后是DE，DF，EF)。”

面对这些表现出完全理解问题(尤其是关于每组有几个元素的问题：5个A、5个B等)的简单情形，我们必须自问：为什么组合运算只能在形式运算阶段(假设-演绎运算开始于11到12岁)以这种方法得以解决，而不是出现于具体运算阶段(7岁到8岁)。

实际上，质性序列及相关性是在大约7岁习得的运算。卡德和劳习得的组合只是形成了后续相关性，而不是6岁或7岁之上的儿童可单独使用的一种相关性。这正是为什么从阶段2开始，实验对象试图寻找一种他只要能够具体运算就能推测其可能性的方法的原因。那么，为什么我们必须要等到形式阶段才能发现这种方法体系？答案显然就是：在组合运算案例中，这些相关性彼此之间并不是相互独立的，但是它们确实构成了先做什么决定后要做什么的唯一方法体系。要建构序列或相关性，就要多次充分重复并颠倒相同运算，这其中要考虑到所有变量(例如，B与A，C同时存在关系，B比A大，且B比C小)。相反，要建构只有一个变量的所有可能配对组合方法体系，就必然要协调几个不同系列或相关性，以在做出适当建构之前就获得关系格式。正是这个原因，这种方法体系认为形式运算之间是相互影响的。实际上，形式运算普遍存在于第二种能力运算中，即可以包括具体运算有关的其他运算。在组合运算的特殊案例中，这包含着一系列的连续相关性，且意味着我们正在研究将心理运算与形式运算关联起来的第二种能力的运算。

第八章　排列运算

我们知道n个元素排列可能产生$n!$种结果。这就是说对于2,3,4,5,6个元素而言,我们已经得到了2,6,24,120和720种排列结果。因此,儿童能毫无困难地发现排列公式算法的数学表达式。不过,另一方面,需要注意的是:不应该有什么能够阻止我们要求实验对象在面对几个实验物时,寻找一种能使其发现所有可能排列的方法体系。那么,这个问题就等同于发现形式运算本身,不同于公式。实际上,知道两个元素A和B只能形成两种组合,AB和BA,实验对象将会看到增加第三个元素C能产生3倍数量的排列,或$2\times3=6$,因为我们可以将C与每对排列(AB和BA)以3种方式(即CAB,ACB或ABC;CBA,BCA和BAC)放在一起。他们也会发现增加第四个元素将会产生4倍数量的排列,或$6\times4=24$,因为我们将D与上述6个排列中的任何一个以4种不同方式放在一起了。因此,实际上,他们将会发现$n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$;即使他们没有获得符号上的精确表达,他们至少看到了排列的运算机制。从可能性感知的分析视角而言,这对我们至关重要。

实际上,这种运算机制的形成对研究可能性概念的发展非常重要。在最后的分析中,混合总是排列体系。在描述儿童理解混合的本质上的困难时,我们已经看到了他们不能理解这些排列是可以断定的。显然,这并不是说儿童首先从摆放在图表上的物体中获得了排列体系,这样儿童接下来就能够发现任何混合中的排列机制。很有可能的是,儿童用自主掌握的物体间可观察到的且后来只能影响到发现有意排列的排列开始。但是,在这两种情形下,儿童只是将偶然排列视为系统性排列理解的结果。实际上,真正的排列产生于混合过程之中,而且仅在特殊案例融入所有可能排列的集合时才被理解为是偶然的。排列集合恰好就是由系统性排列构成的,而系统性排列源于此处所描述的运算机制。以下是概率的心理学方面的基本重要性。概率不是通过直接观察实验事实而获得的,概率概念需要建构,正如我们在第一章所看到的,这种建构始于观察这些实验事实,即使是最基本形式的实验事实。只有通过比较或类比的方式提及这些运算体系,实验对象才能意识到偶然现象的存在,并研究这些偶然现象来构建出概率和可能性的概念。在随机混合的特殊案例中,儿童没有理解什么可以被恰当地叫作混合,即,无序和不完整排列,除非是通过与有序排列的比较,即有意识的、系统性的、完整的排列。在此,我们聚焦于这些构成了运算体系的研究。

第一节　实验和结果

我们给了实验对象2个玩偶，并向他解释这2个玩偶正在并肩走路。因此，他们可以排成2种方式，AB和BA。然后，我们让儿童用两种不同颜色的筹码做相同的事情，将一个放在另一个下面，以形成2种配对AB和BA。然后，我们让他有3个不同的集合，这3个集合均包含每种不同的颜色，他从中可以获得组成排列ABC，BAC等的必要元素，而这些排列是我们要求他通过将必要颜色排成一列来获得的。如果他成功发现了6种可能排列，我们最后将会增加第四种颜色来看看我们是否能让他以相同的方式发现4种元素ABCD所能形成的24种排列结果。

从这些问题中获得的答案可以分成三个常见阶段：到七八岁，没有方法体系；从7或8岁到11或12岁，发现部分方法体系；12岁之后，继续发现配对法则。但是，与12岁时习得组合的运算机制相反，排列的习得至少要在15岁时。在11到15岁的20个实验对象中，我们只发现了6个实验对象能自主发现排列的方法体系。

第一阶段分为两个不同的子阶段1A和子阶段1B。在子阶段1A中，儿童在理解相同元素可以形成几个排列上存在困难，并要求更多不同颜色的筹码来继续排列。他在识别玩偶上观察到的筹码排列上存在困难，不能归纳他的经验性发现。另一方面，在子阶段1B中，出现了进一步的经验摸索以及某些规律的发现(配对中颠倒位置或相同色双倍开始的可能性)，但是没有实验对象从独立发现中获得清晰的方法体系。

在阶段2中，我们发现了儿童对寻找包括3个元素的方法体系的广泛理解，以及子阶段2B的特点是预期4个元素排列的相同可能性，但是没有发现此阶段这个数目的元素的排列体系。

最后，在阶段3中，实验对象逐渐发现了排列的方法体系，但是正像我们已经注意到的那样，当与组合比较时，方法体系的发现有一定的滞后，因为排列的结果随着元素数量的增加而快速增加。因此，我们可以将阶段3划分为两个子阶段。子阶段3A，儿童发现在正确的方法体系之前，在接受某些错误方法体系的过程中，除了作为连续问题的结果，没有发现正确的方法体系。在子阶段3B(开始于14或15岁)中，归纳是系统化的。

第二节　第一阶段：方法体系的缺失

与实验对象在组合中相当迅速地成功使用经验性摸索建构出三四个元素的大部分组合(尽管是没有方法体系的)相反，第一阶段中的儿童在掌握排列的原则上存在一定的困难。以下是子阶段1A的部分案例。

伊莱(4;4) 我们在第一章的第2节中看到了其对随机混合问题的回答。"你看这2个正在晃动胳膊的小人(AB)。你能把他们排成一种与现在走路方式不同的方式吗? 就像这样(BA)。——*是的*。——如果我们增加绿色的小人(C),它们可以排成怎样去散步? ——*像这样*(BCA)。——还有别的方式吗? ——*这样*(CBA)。——还有呢? ……绿色的小人可以改变位置吗? ——*不能*。——可以像这样(BAC)去散步吗? ——*是的*。——还有别的方式吗? ……像这样(ABC)? ——*是的*。——还有别的方式吗?"

秦(5;6) 给出了ABC和BCA,再次给出了ABC和BCA。"不可以以相同方式排在一起吗? ——*是的*。——看看这个(我们给他看ABC和ABC,然后拿走了后者)。这个(BCA和BCA),他们不是相同的吗? ——*不……哦,是的*。——(我们拿走了第二个)现在找一种新方法。"我们将筹码放回原位并再次开始。他再次排成了ABC和BCA并停下了。

奥(5;8) 把AB重新排成BA。"还有其他排列方式吗? ——*没有了*。——好的,现在这里有第三种颜色(C)。——*像这样*(他排成了ABC和CAB)。*我认为就这么多了*。——你认为没有颜色可以移动了吗? ——(他增加了BCA和ABC。)——你已经排了那个(ABC)。——(然后,他把A和B排列了,形成了BAC。)——已经结束了吗? ——*没有,我们还可以使用些红色的筹码*。——不行,只能使用我给你的颜色。——*我认为已经结束了*。"

提斯(6;10) 使用3个元素(通过移动A)能够发现ABC和BCA。"你还能以另一种方式改变元素的位置吗? ——*是的*(CAB,ACB和ABC)。——你已经有这个(ABC)了吗? ——*没有*。——再看看。——(他拿走了ABC。)——你还能组成其他的吗? ——*我已经全部做完了*。——你确定吗? 再试试。——(他组成了CBA和BCA)*不,不是这个*(BCA);*我已经做过这个了*。——你还能再组成其他样子的吗? ——(长时间的思考。)*是的*(BCA)。——你是否已经组过这个了? ——*哦,是的*[他用BCA(原文如此)替换了]。——那个在那里,你已经组过了吗? ——*哦,是的*。——你认为还有其他组合吗? ——*没了。没有了。我已经全部组过了*。——你怎么确定已经全部组过了? ——*我想再看看是否还有其他组合*(他变化了筹码位置,形成了CBA,BCA,CAB组合,他已经发现的3种排列。)——你看哪儿了? ——*到处都看了*。"

以下是子阶段1B的几个案例,在这几个案例中儿童通过摸索发现了大部分的可能排列及部分规律,但是没有找到完整的方法体系。

贝尔(5;6) 使用3个元素,首先简单排列A与B,得到了ABC和BAC。"好的,试试所有可能的方式。"(他发现了ACB,CAB,ABC和CAB)"说出所有你改变过位

置的颜色。——*蓝色和红色*(将ABC变成CAB)。*红色和绿色*(CBA)。*绿色和蓝色*(BCA)。*蓝色和红色*(BAC)。*红色和绿色*(ABC)。*绿色和蓝色*(ACB)。——好的,你调换了多少次颜色?——*4次*。"我们注意到在贝尔的这个解释中,每种初始颜色都与后续两个排列(CAB和CBA,BCA和BAC,然后是ABC和ACB)相关,但是实验对象自己并没有觉察到这种规律性。

格拉姆(6;7)　非常不主动地参与实验。在实验的整个第一部分中,我们必须迫使他在3个元素的每种排列之后发现下一种排列(至多2种可能排列)。"好的,现在你自己试试。——*那里*(ABC,CAB和BCA)。——你怎么确定已经得到了所有的排列?——*我们不知道。我看看*。——然后呢?——(经过长时间的停顿,他增加了BAC,ABC和ACB)——是否有已经出现过的组合?——*是的*(他拿走了ABC)。——你还能组出其他排列吗?——*不能了*。——我们能找到一种确保我们得到了所有排列的方法吗?——*是的*。——是什么?——*不知道*。"

格拉姆(7;3)　凭经验发现了3个元素的6种可能排列中的5种。"你认为还有其他的吗?*我想试试*。"(他重新开始并发现了相同的排列结果)"你发现其他的了吗?——(他想了一会,然后组出了一个他已经组出的排列。)——已经有了吗?——*哦,是的*。——还有其他的吗?——*我试试看*。"

在此,我们注意到没有一个实验对象能够发现使其能获得3种元素的所有可能排列的方法体系。因此,没必要提升至4个元素的实验,因为缺少了可以使我们研究最终归纳的运算机制。在子阶段1A中,儿童甚至不能通过摸索发现所有可能排列。在子阶段1B中,他随时能发现所有可能排列,但仍然没有有意的方法体系。即使最后已经发现了6种可能排列,他还是不确定他已经结束排列了。在某些案例(参见贝尔)中,通过集合筹码的行为,儿童成功发现了某些有效的规律,但是这并不是有意识的,且没有表现出系统化的意图。

因此,这些事实提出的第一个问题就是:要理解为什么(子阶段1A的)儿童在发现3个元素的所有组合上存在那么多的困难,而配对不同元素对他来说却是那么容易。答案很简单。既定序列形成的可觉察或可感知的整体相对紧凑且固定。排列这些元素预先假设了某种灵活性,而不是运算特点(阶段2),或至少是源于我们在整合知觉(子阶段1B)中称为去中心性的灵活性。在这种灵活性的缺失中,筹码的初始次序是个问题,因为这似乎是仅可能的次序(例如,参见秦连续3次重组了次序相同的3个筹码的排列),而组合是通过增加新元素形成的。从这个角度讲,组合是更为简单的活动。我们在儿童要求增加新元素来建构新排列的趋势中看到了相关证明,因为在既定排列的末尾增加新元素比变化元素的次序更为简单。

对于方法体系的缺失(在子阶段1B中依然如此),毫无疑问这是由于不可逆性引起的。其中,不可逆性是第一逻辑运算出现前所有阶段的思维的特点,而且一直延续了我

们刚才所说的与子阶段1A相关的固定性。凭经验发现不同可能排列的能力继续存在于被要求发生的变化之中,而寻找一种方法体系意味着总是回到起点并做出变化。实际上,方法体系就是两个方向上所有可能排列的合并(我们知道所有的排列包含了数学中的排列集合)。因此,关于初级运算的不可逆思维(涉及由排列的合并所形成的所有排列集合)自然是重中之重。

更有趣的是,比较这些反应与那些我们在研究随机混合(第一章,第二节)中所描述的那些反应。实际上,在此被问及倾斜盒子中弹珠的连续混合及排列运算弹珠的连续混合的实验对象是相同的,正是这些实验对象的两组反应使得我们能够研究第一章及第八章中的发展阶段。我们记得从随机混合的角度讲,正是在阶段1中儿童不相信真正的混合,并因此想象出倾斜盒子应该会立即将弹珠反弹回起点位置。相反,在当前的实验中,儿童自己没有意识到基本可逆性,而基本可逆性可能包括不是根据所有可能性形成的排列,就是从心智上可追溯所有确实发现用以开始方法体系的排列。但是,正如我们在随机混合案例中看到的那样,返回至儿童所假设的起点无疑就是可逆运算。相反,这只是初始次序的固定表达,其中初始次序与形成随机的偶然排列相反,儿童因为缺少灵活性及可逆性的概念而恰好回到了这种次序上。现在,我们已经获得了这种理解的佐证:儿童在一定程度上不能做出排列或发现关于实验中的排列的方法体系,他认为弹珠混合之后还可以复原。原因恰恰就是他没有把随机混合视作偶然排列的集合。当他在一定程度上将排列视作一种可逆运算的方法体系时,他就会理解随机混合中产生的不完全及随机排列的不可逆性。

第三节　第二阶段:部分方法体系的经验性发现

第二阶段出现了从认识最初级形式的规律到预测定义了第三阶段特点的有条理的方法体系的整体反应。

我们在那些自己没有发现方法体系,甚至未能发现部分方法体系的介于两个阶段的中间状态的实验对象身上发现了最基本的反应,但儿童一旦发现3种元素的6种组合就表明他对规律有了印象,也就是彪勒(Bühler, K.)意义上的规律意识。当我们让儿童根据图片每列上呈现出来的颜色清点筹码时。

韦伯(6;7)　使用3种颜色的筹码组出了ABC,CBA,BCA和CAB,然后(没有看到他已经组成了这些排列)又组出了BCA和CAB,并说“*那里,我们已经全部组出来了*”。“你怎么确定?……全了吗?——*没有,我还能组出其他的组合*(BAC和CBA,后者已经出现过了)。——那个(ACB),你已经有了吗?——*哦,没有*。——BAC呢?——*没有*。——还有其他组合吗?——*没有了,已经全了*。——你怎么

确定呢?——*我看了看每行。没了,已经结束了*。——但是如果你继续试试,你还能再发现其他组合吗?——*或许吧*。——我会帮你一起看看。第一条线中你放了多少次红色(我们指出6种排列中的第1列)?——哦,我知道了,*在这里*(第一列)*放了2次,这就形成了6次。蓝色也是6次,黄色也一样。然后,有3个小人,6条线*(6种排列),*因为我使用了6次*。"因此,韦伯确定获得了规律的印象,但是还不能归纳出4个元素的规律(在这个数量的筹码的排列上,他只组合出了几个排列,且都是摸索着组合出来的),也不能理解为什么3个元素能形成6种组合。[①]

接下来是关于恰好属于阶段2的实验对象的案例。

博尔(8;7)　凭经验发现了3个元素的6种排列,然后以相同的次序重新开始,首先被选出来的元素是A,B,C,然后是C,A,B。同样,对于4个元素,如果他只能发现8种排列,那么他似乎就已经根据重复性的原则发现了排列中的第一种元素:A,B,A,B,C,D,C,D。

乔斯(9;2)　迅速发现了3个元素的排列。"你还能发现其他的排列吗?——*我试试看*。——(他再次开始并发现了相同的排列,没有任何次序。)——现在试试4个筹码。"他发现了7种排列,但没有及时说。"*只有1个灰色的筹码*(第一列),*所以我们只能以1个灰色筹码再次开始*。"然后,乔斯发现了3个新排列,但是他并没有试着看看现在的颜色是否等同于4列中分布的颜色(他甚至没有再次看看第一列中的颜色)。

乔(9;6)　通过把A放在排列的头部、中部、尾部发现了3个元素的排列。"还有其他的吗?——*没了*。——再试试。"同样,他用B发现了BAC,CBA和ACB(颠倒第五个排列中C和A与颠倒第二个排列中C和A相同)。"你在看什么?——*这个*(他指着竖列,但是没有试着看看颜色是否正好等于竖列中分布的颜色)。——你再开始一遍,确定你已经做出了所有可能排列且任何排列没有出现2次。"他在第三个排列之后以相同的方式摸索着再次开始,在每次实验之后检查,但是没有清点颜色。

接下来是几个较高阶段的案例。在这些案例中,儿童在3个元素的排列中迅速发现了次序,但是没有归纳出4个元素的次序。

贝克(9;10)　发现了ABC,BAC和CBA,然后摸索着结束了。他遵循着第一个元素的次序再次开始:A,A,B,C,B,C,然后最后通过每次排列第二个和第三个元

① 参见后面斯通的案例(在关于3个元素提问的最后部分)。

素发现了次序A,A,C,C,B,B。但是,他没有使用4个元素归纳出这种方法。

斯通(8;4) 2个筹码:他把AB调换成BA。"还有其他摆放方式吗?——*没有了*。——用3个筹码试试。——(他组成了ABC,ACB,CAB,CBA和BCA。)——还有其他排列方式吗?——*没有了,就这么多了*。——确定吗?——*哦,是的*(他组出了BAC)。——有多少个排列?——*7个,不,6个*。——我们还能做出第7个组合吗?——不能。——我们能提前确定吗?——*我们还可以组成ACB*。哦,不,已经有了(他再次做出了几个排列)。*那个已经在那里了。那个也是,还有那个*。——第一列中每种颜色有几个?——*2个蓝色、2个黄色、2个玫瑰色。我们可以增加第4*[①]*种颜色,因为有3种颜色*。(他到处看了看)不。"对于3种颜色,斯通自己发现了方法体系A,A,B,B,C,C,但是起初并没有质疑,直至后来也没有注意到这种方法体系。

4个筹码:他通过颠倒前2个元素、中间2个元素,然后是外面的元素发现了7种排列。但是,没有发现,甚至没有找到任何规律。

基恩(10;2) 凭经验发现了:3个元素的6种可能排列。然后,再次开始,立即接受了第一个元素的A,A,B,B,C,C次序。对于4个元素,他还是凭着经验继续并停在第七种排列上。

阿普(10;5) 在类似的开始之后只发现了4个元素的3种排列。"你能用3个元素组出比4个元素多的排列吗?——*排列3个元素比4个元素容易一些。3个元素可以获得更多的排列*。——为什么?……5个呢?——*5个元素可以获得更多的排列,因为筹码的数量多。我错了,4个元素的排列比3个元素的多*。"接着,他发现了(4个元素的)7种排列,但是没有次序。在各种建议性的长时间提问中,最后我们让他自己发现了24种可能排列:"你仅仅是看了看颜色还是数了数?——*我看了看颜色*。——在每(竖)行中,颜色的数量相同吗?——*不,红色的多一些*。——数数看(第一列)。——*6个、6个、6个、6个*。——其他列也是相同的吗?——*是的*(犹豫了一下,然后数了数)。*是的,也是6个*。——为什么?——*因为每*(横)*行中,每种颜色的筹码各有1个*。"

当儿童开始用4个元素自主归纳出他在3个元素的排列中发现的规律时,子阶段2B就开始了。

瑞恩(10;6) 开始时认为4个元素的排列比3个元素的排列多,但是他将A分别放在开始、最后以及中间两个位置时只发现了4种排列。"*结束了*。——你怎么知道的?——*我在首位、末尾、第二个、第三个位置各放了1次绿色*。——4个筹码意

---

① 英文版为3,逻辑推断应为4,应该是英译版错误。——译者注

味着只能形成4种不同排列。——*没有其他排列了*。——4个元素还是3个元素的排列多一些?——*4个元素的排列少*。——为什么?——*如果我再次改变,绿色就回到相同位置了*。"后来,他发现了另外两种排列。"是新排列吗?——*是的,之前没有出现过*。——为什么?——*当我从黄色开始时,我就看看其他时间是否做出了相同的排列。我看到了第二个,然后是第三个,最后是第四个*。——你是怎么发现新排列的?——*当我从蓝色开始时,我仔细看了看这当中是否有相同的颜色(就像之前那个那样)*。"他逐渐发现了13种不同的排列。"还有其他的排列吗?——*我们还能发现一些*。——多少?——*5个*。——为什么?——*只是因为*。——你以绿色开始了多少次?——*4次*。——黄色呢?——*2次*。——蓝色呢?——*5次*。——那么,你会继续哪种颜色?——*黄色。如果我们可以用绿色4次,我们就能确定可以用黄色4次*。——如果你做到了4次,你还能做再多吗?——*不能了。会以相同的排列开始的*。——红色的呢?——*我认为我不能用刚才的那个得到所有红色筹码的排列*。"另一方面,他不担心有5个蓝色筹码的事实。

德里(10;5) 发现了3个元素的排列:ABC,BCA和CAB。"你还能发现其他排列吗?——*是的(ABC)*。——那个已经有了。以A开始还能发现其他组合吗?——*是的(ACB)*。——现在,找一种不能遗漏任何排列的摆放方法。——*哦(ABC,ACB,BCA,BAC,CBA和CAB)*。"因此,他在第一列中摆放了A,A,B,B,C,C。

4个元素:他以A开始发现了4种排列,以B开始的3种排列,然后发现了以A开始的第五种排列,以B开始的3种新排列,然后是以C开始的6种排列(因此是5个、5个、6个,但是他没有通过找到以A开始的第六种排列格式,且根本没有考虑到D)。

利(10;4) 用3个元素发现了以A,B,C开始的3种排列,然后发现了以相同选项开始但颠倒了后2个元素的其余3种排列。"如果我们使用第4种颜色,会形成多少种排列?——*8种*。——继续。"他摸索着开始,然后推断。"*我们可以组成4种绿色、4种红色、4种黄色、4种蓝色*(以4种不同组合开始的)*排列*。"但是,他凭着经验继续,直到最后每种起始色都能产生6种排列才看到这其中的规律。

杜克(11;6) 首先凭经验发现,然后系统性地发现了3种元素的排列。对于4种元素,他通过两两排列发现了11种排列。"还有多少种?——*不知道。至少9种*。"他再次开始,连续6次把放在A第一列,然后摸索着排列。"有可以做得更好的技巧吗?——*以相同方式摆放第二种颜色。我还没有想到这点*。"

瑞斯特(12;5) 对于4种元素,他试图在对角线上摆放相同的颜色:第一、第二、第三、第四行;然后,他以同样方式摆放了第二种颜色等。

赫特(12;6) "*我认为4个元素的排列肯定多一些*(他凭经验开始)。——有可以更好地发现排列的技巧吗?——*或许我们应该将那些以相同颜色开始的排列放在一起*。"他开始这样做,然后说,"*以红色开始的排列多一些。我想做红色的排*

列。"他做出了以红色开始的6种排列,然后以绿色开始。"我们用绿色开始的这组有多少个?——*与红色排列的数量相同,是一样的。*——我们可以用更好的方式建构这些排列吗?——*是的,我们可以以A(红色)开始,然后摆放上B(绿色),再然后是另一个B,最后就可以变化位置了。*"

奥姆(12;5) 凭经验发现了4个元素的19种排列。"你认为有更好的排列方法吗?——*是的,将那些以相同颜色开始的排列放在一起*(他数出了5个A、4个B)。*我应该能够做出其他排列*(他又发现了2个,这就产生了6个B)。"他再次做出了所有排列,每种颜色开始6次,但是他没有排列最后2种颜色的次序。

珍(12;6) 相同反应,但是他只发现了5个红色排列,并说:"*不是很可能,因为其他颜色排列的数量应该是相同的。*——可能是7种吗?——*不,因为有数量相同的筹码*(4个)*,还有排列方式的数量也是相同的。*"

珀基(13;5) 相同的反应:"*每种颜色排列的数量必须是相同的。*"

我们已经非常仔细地引用了这些事实。因为对我们而言,这些事实有一定的价值,且对广义的运算心理及概率概念有同样的价值。实际上,从只包括模糊且直观的预期(韦伯)的意识到意识是反身性且归纳的(珀基)的过程,这些事实使我们能够观察到,次序感知的缓慢持续发展及这些运算的规律性特点。

这使我们获得了关于这些事实及那些被相同实验对象视为与随机混合相关的事实两者之间关系的第一个结论。只要儿童像在阶段1中那样凭经验、没有感知到排列的任何规则(换言之,根据自己摸索的概率进行排列),他就将随机混合(即,是偶然排列的数量)归于与概率概念相反的相对有序的结构。另一方面,在产生怀疑的那一瞬间,他就在一定程度上发现了适用于有意排列的运算规律性,然后就明白了排列的偶然或不确定特点,而这是随机混合所固有的。但是,正如我们在前一节的结尾处所看到的,这种双重关系是相当自然的。在第一阶段中,当儿童通过偶然摸索建构排列时,他实际上是在猜测某种次序,而且认为已经获得了真正的次序,即使这种次序实际上依然是主观的。同样的,当儿童面对随机混合时,试图保留次序并预测出筹码返回其初始次序。但是,儿童运算智慧的发展使其能够在一定程度上部分地预测并发现有意构建出来的排列中的真正次序,他正是以这种行为理解构成了随机混合的偶然排列中的次序缺失。甚至,同样的,这种运算规律的发展在理解排列上是非常缓慢的,随机混合中概率理解的发展也相当艰难,因为儿童还需要很长一段时间才能获得潜在次序的概念(主观的,但是真实展现),他将此概念归结为弹珠混合中的运动轨迹。

鉴于上述观点,规律性连续感知中的机制是什么?我们如何详细解释与随机混合或概率相关概念的关联?在中间状态中,实验对象韦伯仅仅是观察实验员引发的事实的问题,但是实验对象通过要求使所有颜色筹码的数量相同的知觉预期获得了什么?一方面,在实验对象博尔、乔斯和乔身上开始出现3个元素组成的每个排列中第一个要

素分布或排列次序的规律性(例如,乔),且甚至表现出了开始向4个要素的迁移(但并不是有意识的概括)。这些次序的开始使乔斯注意到如果一组排列以某种颜色(例如,灰色)开始,其他组也必定如此。因此,在这个案例中出现了分隔上的对称性。在实验对象贝克、斯通、基恩和阿普身上,当凭经验构建出排列时,他们发现了3个要素的每个排列中第一个要素A,A,B,B,C,C的次序。在凭经验构建出排列之后,儿童再次组出了这些排列,但是这次找到了一种方法体系。尽管并不总是将这种方法体系有意归纳应用于4个元素的案例中。当排列3个要素时,非常碰巧地发现了每种颜色在垂直分布上的数量是相同的(参见贝克),但是并没有将这种发现应用于4个要素的排列上。例如,阿普在清点之前认为"*红色的多一些*"。最后,在子阶段2B,在3个要素上的发现被实验对象应用于4个要素的排列上。在这点上,我们注意到了两个相关过程。首先,实验对象不断觉察到对称性或分布的均等性。"*如果可以用绿色筹码组4次排列,我们就能确定也可以用黄色筹码组4次排列*(瑞恩)";使用绿色筹码"*与使用红色筹码相同,是一样的*(赫特)""*5个A、4个B,我肯定还能组出另一个排列*(奥姆)""*不是很可能*(5个和6个),*因为每种颜色筹码的数量是相同的*(珍)";最后,"*每种颜色筹码的数量总是相同的*(珀基)"。

第二,现在儿童开始发现排列的方法体系:首先是以相同颜色筹码开始的排列的数量是相同的(瑞恩、德里、赫特和利),接着是第二要素颜色筹码的重复(杜克和赫特或瑞斯特用到的对角线)。只有在阶段3,此处所描述的方法体系才会被儿童归纳出来。

在与概率发展的关联的视角上,规律性的不断发现极其重要。一方面,我们刚刚看到规律性的发现与运算规律相反。因为在随机混合中,相互影响的排列被认为是偶然的,因为这些排列并未遵循任何方法体系,而只是构成了彼此不相关的独立型变。另一方面,儿童能在一定程度上理解这些运算规律,被实验对象理解为整体的偶然排列必须以对称性和规律分布结束。现在,我们记住了:与像在钟形曲线分布中一样,儿童只能逐渐习得规律分布中(盘圆旋转、随机混合等)的对称性,然后才能逐渐感知到分布整体。现在,我们明白了:为什么对于被视为对称的或有规律的整体分布而言,必须要被同化进某种运算格式,且这种运算格式是解释补偿引发对称的唯一之路。换言之,儿童只有通过与对称性排列的比较或通过对称性排列才能理解奇特的概率、偶然排列;但是,儿童只有通过与这些运算排列体系的类比才能理解整体的可能性。尤其要注意的是,源于发展运算规律中的可能性判断,瑞恩宣称,他将用黄色筹码再次开始下一个排列,因为他已经有了2个黄色筹码、4个绿色筹码的排列。因此,当有大量筹码可供拿取时,他确实发现了以黄色、绿色筹码开始的新排列。

简言之,排列运算的发展解释了与随机混合相关的概念的发展,这是因为这些运算在实验对象难以解释的随机混合之中出现得非常晚。但是,现在我们必须要自问的是:儿童自己为什么那么难才能习得这些排列运算。排列是次序的变化。我们已经在其他地方看到了:次序是相对于定位运算而言的,次序的变化是相对于替换的反运算而言的

(即,运动被认为与测度无关)。[1]另一方面,在研究运动的概念时,物体的连续移动位置,如A→B→C→D,然后是D→C→B,再然后是B→C,最后是C→B→A,在这些案例中向儿童提问,两个方向之间的距离是否与筹码移动的距离相同,我们观察到了相同的困难,就好像四个物体(A,B,C,D)一直在变化地点,最后回到其初始位置(因此,等同于一个方向距离的总和,及相反方向距离的总和)。[2]然后,我们立即明白了这些排列运算之间存在的关系,以及随机混合中运动轨迹的表征,两个方向位移的构成。困难普遍存在于将几种不同位移体系整合进一种思维体系之中,这几种位移是连续且彼此之间可以相互比较的,就好像是同时发生的,或同时发生且必须是可以解释的,就好像是连续的。这就出现了混合(第一章)中运动轨迹自我表征的趋势,及所有运动轨迹都朝向一个方向的趋势(不是同时朝向两个方向)以及可视化三个或四个元素的所有可能排列的困难——即同时确定方向的位移体系,有些是朝向这个方向的,还有些是另一个方向的。

第四节　第三阶段:方法体系的发现

排列的问题比组合的问题更复杂一些。因此,在阶段3的一开始,即11到12岁,这个问题并没有得到解决;只有在子阶段3B,大约是14到15岁,这个问题才得到了解决。但是,在子阶段3A中,我们确实发现了越来越系统的解决方案,以下是几个案例。

莱(12;4)　正在移动3个元素A,B,C(没有呈现其他筹码,以避免经验性摸索)。"我们能预测出可以用多少种不同方式来排列这些筹码吗?——*3种筹码应该有6种不同排列方式,因为一个筹码可以变化两次位置。*——你是怎么发现的?——*我在头脑中排列了筹码。*——在纸上做一下。——*ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA。*"在第三个排列后,他想排列成CAB,但是他突然说,"*不,我必须按顺序来。一种颜色可以在一行中摆放两次。*——对于4种颜色,我们可以提前说出有多少种排列吗?——*3种颜色是6种排列,4种颜色或许是8种排列。*——确定更多吗?——*是的,元素越多,可能的排列也就越多。*——(他排列出了ABCD,ACBD,ADBC,ADCB,ACBD和ABDC)*看,有24种排列。*——你为什么这样说?——*很简单。我以同种颜色(A)开始形成了6种排列。因此,所有元素能形成24种排列,因为每种颜色可以形成6种排列,6乘以4是24。*"

雷姆(12;4)　凭经验发现了3个元素的6种排列。"还有吗?——*首先,我必须要看看我已经排列出了什么。*——(他看了看在我们看来没有方法体系的那些排

① Jean Piaget and Bärbel Inhelder, *The Child's Conception of Space*(New York: Norton, 1967).

② 仅在11到12岁的实验对象身上成功了一个实验。Jean Piaget, *The Child's Conception of Movement and Speed*(New York: Basic Books, 1969).

列)没有了。——那么,4种元素可以形成多少种排列呢?"他首先凭经验排列出了4种。"我们可以知道有多少种排列吗?——我们必须要计算一下。——(他总结出以A开始的排列是4种,然后是以B开始的排列。)——我们以红色(A)开始了多少次?——4次。——蓝色呢?——2次。——如果总是以相同颜色开始会怎样呢?——(他发现了以A开始的6种不同排列)24种排列,因为4乘以6会形成24种排列。——5种颜色会形成多少种排列呢?——每种颜色可能会形成8种排列,最终大约会形成40种排列。——你可以试试。——(他对称地以A开始,然后调换成以B,C,D,E开始)哦,我发现4种颜色可以形成24种排列,所以我可以排出5次的24次,也就是120次。——6种颜色可以形成多少种排列呢?——6乘以120种排列。——7种颜色呢?——7乘以6乘以120种排列。——你现在可以确定吗?——我们总是要乘以接下来出现的那个数字。"

哈特(13;6)　3种元素,"6种排列。——你怎么排列的?——我在头脑中调换了它们的位置。——4种颜色会形成多少种排列呢?——我认为是12种。——为什么?——因为多出来一种可以与其他所有颜色调换位置的颜色。——试试看。"他摸索着,然后说,"不,我们必须遵循一种颜色的次序,每种颜色形成了6种排列,因此总共是24种排列。"

以下是子阶段3B的案例,这些案例以处于两个子阶段中间状态的案例开始。

比尔(15;0)　开始凭经验发现了3种元素的第一批排列,然后又以某种次序继续。"全了。我们可以得到6种排列,这使我很吃惊,因为我预期能发现9种排列的。——4种元素能形成多少种排列?——我认为是16种,每种颜色可以形成4种排列。每种颜色可以调换4次位置(他以A开始完成了4种排列)。可能全了。我们来看看(他又发现了2种排列)。好的,可能是24种排列。——5种元素可以形成多少种排列?——3种元素是6种排列,4种元素是24种排列。将4个A放在第一个位置,可以得到6种可能。如果我将其放在第五个位置,那么我将再获得6种可能。接下来,我们必须增加,大约是50种可能(他做了这个实验并且以4个A开始)。我做得不对(他增加了2种排列)。或许是6乘以6总计36种可能。不,总计是120种可能。——6种元素可以形成多少种排列?——6乘以120是720种。——7种元素可以形成多少种排列?——7乘以720。8个元素,就必须用8乘以8种元素所形成的排列数量。"

韦(13;9)　"3种元素可以形成多少种元素?——(他排列出了ABC和ACB)1种颜色(A),可以形成1种排列。3种颜色可以形成6种排列。——4种元素可以形成多少种排列?——我所要做的就是每次在前面增加1种颜色。就是4乘以6,总计24种颜色。——5种颜色可以形成多少种排列?——(他将第五种颜色放在由4

种颜色构成的排列前面，并总结出是5倍的24)——6种颜色呢？——(他建构了一种新图式，在一列前放了6个F，5个E，以此类推，并说6乘以5乘以4乘以3乘以2。)

布莱斯(14;0) 排出了3种元素的前4种排列。"*哦，我已经看到了我可以把每种颜色在第一个位置上摆放2次。这就是6种排列。*——4种元素呢？——*我可以将新颜色放在第一个位置上6次，每种颜色都这样做一遍，这样就会形成24种可能。*——5种元素呢？——*120种。*——为什么？——*如果是2种元素就是1乘以2，如果是3种元素，就是1乘以2乘以3。如果是4种元素，就是1乘以2乘以3乘以4。如果是5种，那么就是1乘以2乘以3乘以4乘以5。我们可以以相同的方式继续。*"这是一个在提问之前不知道规律的学生。

我们注意到子阶段3A的反应形成了对已经在阶段2中发展起来的部分方法体系的简单归纳：在n个元素的排列中，实验对象如果知道以某初始元素(A)开始，可以与其他元素形成(n–1)种可能排列(例如，当A在初始位置时，3种元素A，B，C形成n–1=2种排列，ABC和ACB)，就可以将放在排列前面的元素的数量与这n–1种排列乘起来(因此，对于3种元素就是3乘以2等于6)。因此，自阶段2开始，他就已经知道每个起始元素会形成相同数量的可能排列。因此，子阶段3B中的陈述性发现就是：对于4个、5个、6个……元素，所有可能排列的数量仅取决于以3个元素开始的2乘以3种元素开始，再接着用4乘以5乘以6……当与颠倒方向进行的经验性摸索相比较时，此发现结果就像之前的结果那样：不是继续排列的问题，而是用n个选项的排列乘以可以放在排列前面的元素的数量的问题。以这种方式乘以这些数字，而不是驻足于累积这些数字。但是，在子阶段3B中，早期已经简述过的颠倒方向变成系统化的了，且使儿童归纳出一乘以2乘以3……即发现了排列的一般规律(参见韦和布莱斯)。

与随机混合和概率关系的理解无关，排列运算的发展从总体上为运算心理提出了一个有趣的问题。正如数学家的研究所表明的：排列形成了基本的运算集合。我们可以将2个排列变成3个，颠倒一个排列，以不同方式关联连续的排列，并识别出非排列。这组建构性运算存在于次序的变化之中，即存在于似乎被容易理解与实现的运算之中。另一方面，我们注意到：在第三阶段中，儿童通过简单的连续乘法(2乘以3乘以4……)发现了可能排列的数量。乘法本身是一种基本包括了相似性的简单运算。那么，为什么儿童只能在形式阶段(阶段3才能习得排列，而次序运算和乘法的相似性从具体运算阶段(7到8岁)就开始建构了？

一方面，此答案非常简单，而且证实了我们至此在形式思维上所看到的一切。另一方面，如果次序的变化自身是一种基本运算(或具体的)，次序变化的相乘就不再是一种简单运算。因为这已经是与其他运算有关的运算的问题了，即第二能力的运算。形式思维的特点恰恰就是第二能力的运算，或那些组织进以其内容存在的更高级的整体基

本运算之中的运算。这正是为什么排列运算出现得晚,且与一般组合运算同时出现的原因。因此,我们确实可以将形式运算视为是由逻辑命题构建的。而逻辑命题与分类逻辑相悖,且与源于内容而非纯粹的命题有关联。在这个案例中,形式思维有自己的关联标准(若 p,则 q),不同于集合运算(包含等)、关联(次序等)及数字(乘法等)。因此,排列似乎需要这些后来出现的运算,且不再是单纯的命题式的运算。但是,实际上,有两种关联形式:所有案例中界定了形式思维的命题之间的关联;构成了可简化成先前案例的特殊案例的运算之间的关联(即使个别案例的这些属性是以命题的形式表达出来的,甚至当全部案例的命题是以其内容表达出关于集合或关联的某种运算时,命题之间的每种形式关联就被视作体现为命题间运算的第二能力的运算)。因此,从这点来看,根据确定的数学关系,排列运算包含乘以次序变化的确定数值的发现意味着我们正在研究第二能力的运算。与此同时,我们还正在建立运算之间的关联,所有这一切都与形式思维完全一致,而且解释了为什么排列的方法体系发展得晚。

对于知道为什么排列的发现晚于组合的发现,并止步于这些标准,原因毫无疑问就是:组合仅仅存在于根据所有可能性发挥作用的关联之中,而数量更大的排列意味着根据相似性的动态系统发生关联的能力(改变变化的主要元素的初始次序)。而组合运算形成了乘法运算的简单归纳,排列丰富了关系的关系的真实原型,或与其他运算有关的运算。由此,我们可以认为子阶段3A仅是形式思维的开始,子阶段3B是这种模式的平衡阶段。

第九章　排列组合运算[①]

分析了组合与排列之后，或许研究将二者综合为一、被称作排列组合的运算是非常有趣的。[②]在两个选项A与B的排列组合中，形成的配对是AA，AB，BA，BB。实际上，同时出现了组合（AA，BB，AB）和排列（AB和BA）。但是，研究排列组合并不仅仅是一种组织我们在上述实验中所获结论的方法。这也会使我们获得似乎存在于组合运算与概率概念发展中的关联。在这方面，要充分研究伴随着儿童的偶然排列组合概念且由其做出的有意排列组合。例如，从随机混合的卡片中拿取卡片配成对。现在，分析的迫切性使我们更早分离了如下研究：组合运算的研究（第五章）、偶然组合的研究（第五章和第六章）、排列运算的研究（第八章）、偶然排列的研究（第一章）。以这些分析的视角，我们能够同时描述儿童对组合排列和偶然组合排列运算的反应。

第一节　实验与结果

用到的材料是一副78张的纸牌：其中有26张是数字1，26张是数字2，另外26张是数字3。对于那些还不知道由这3个数字中的2个数字可以组成不同数字的儿童，我们使用了另外一副纸牌，这副纸牌中，26张是火车头，26张是铁路客车，还有26张是货车。最后，发牌机使我们可以一次从这副纸牌或另一副已洗好的纸牌中拿到2张纸牌。

提问分成三部分。第一部分是排列组合运算：我们将每副纸牌分成三部分放在桌子上，并要求儿童用2个数字尽可能多地组成不同数字（或尽可能多地组成不同对的火车车厢）。

第二部分，我们在儿童的视线内洗牌，然后要求他从中抽取2张并预测出他会拿到什么。在抽取纸牌的过程中，儿童罗列了可能会抽取什么（火车车厢或数字）。

在实验的第三部分，我们分析了儿童的列表。在使其注意到分布的不等性之后，我们让他想想有一个装满了相同纸牌的篮子，并问他不等性是否会随着可抽取纸牌数量的增加而变大。

---

① With the collaboration of Marianne Denis-Prinzhorn and M. Laurent。

② 作者用“排列组合”区分“排列”或“组合”的意思是允许重复。例如，如果从1，2，3三个数字中抽取两个数字组成两位数字，会出现9种可能：11，12，13，21，22，23，31，32，33。从1，2，3中一次抽取两个数字，就只有6种可能，因为11，22，33是不允许的。——译者注

观察阶段与我们在此前章节中所观察到的是相同的。到大约7岁或8岁,儿童既没有系统性排列组合,也不能理解随机混合。但是,出现了单个拿取的虚假预测,即儿童不能意识到偶然排列组合。从7岁或8岁到11岁,我们观察到开始出现了运算的系统化,儿童开始理解概率,但是不能归纳大数字。在大约11岁或12岁,儿童系统化地完成了运算,他们认为在大数字案例中偶然排列组合被是相互补偿的。

第二节　第一阶段:经验性排列组合与不能理解随机混合

当与我们已经知道的那些反应做比较时,下述反应表现出新的方面:混合产生于纸牌的重叠,发挥作用的运算与组合和排列相关。因此,分析以下几个案例是有用的。

马斯特(5;5)　发现了火车头(L)、客车(P)和货车(F)的配对PF,PP,LL和PP。“有2个相同的吗?——(他拿走了PP。)——还有别的吗?——*PF*。——你还能组成其他配对吗?——*PF*。——你不是已经组了2次了吗?——*哦,是的*(他拿走了2个PF)。——你还能组成其他的吗?——(他再次组出了PF。)——你不能以其他方式组了吗?——*能*(FP)。——还有呢?——(他再次组了PF。)”

抽签:他抽到了FP。“有没有办法可以知道我们下次会抽到什么?——*有的,LP*。——(他抽到了LL)相同的还是不同的?——*相同的*。——(他抽到了LL。)——现在呢?——*会是FF*。——(他抽到了PP。)——现在呢?——*还都是客车*。”

贝尔(6;10)　也纯粹凭经验建构排列组合。他逐渐获得了8种排列组合。“全了吗?——*是的*。——你能找到发现所有排列组合的方法吗?——*我不知道*。——看看这边(第一列)。有多少个P在这里?——*3个*。——多少个货车(F)?——*3个*。——多少个火车头(L)?——*2个*。——火车头图只有2个不奇怪吗?——*不知道*。——在另一边(第三列),有多少个P,F和L?——*3个,3个和2个*。——那么,我们该怎么做?——*再加1个*。——(他发现了LF。)——现在都全了吗?——*我不知道*。”

随机混合:“抽牌之前,你能知道你会抽到什么吗?——*哦,不,我不能*。——我能吗?——*是的*。——为什么?——*因为你已经看到了*(他刚刚观察了洗牌)。——但是,不。我知道的不比你多(我们抽了几张纸牌)。现在,你认为我们会抽到已经抽到过的纸牌,还是没有抽到过的纸牌?——*会是那些*(已经抽到的),*因为那里已经有一些了*。——(我们继续:他抽到了3个PL)我们是不是会经常拿到相同的纸牌?——*不知道*。——还会是相同的吗?——*我希望不是*(他抽到了相同的纸牌)。——现在会是不同的了吗?——*是的*。——为什么?——*因为相同的那些已经有一些了,所以如果总是相同的纸牌就不对了*。——试试看。——(他

抽到了LF。)*那是因为这里只有1个LF。*——如果我有很多纸牌,这么一堆(手势),会抽到什么?——*如果发牌机确实发挥了应该发挥的作用,那么到处都会有其中之一,然后是其中之二、之三。*——如果发牌机没有发挥应发挥的作用呢?——*2个在那里,8个在那里。*"

皮尔(6;1) 摸索着得到了4对。"全了吗?——*是的,没有其他配对方式了。*——火车头还会带动什么?——(他发现了LP,这个已经出现过了,然后是LF等等,得到了9个配对。)——全了吗?——*不知道。*"

抽签:与马斯特开始的反应相同。"下一个会是什么?是我们已经有的还是不同的?——*会是已经有的。*——为什么?——*更容易出现。……我们会抽到LP,因为我们很容易就抽到了。我们已经好几次抽到了。*——你认为有些纸牌更容易出现吗?——*是的,这3个*(LL,PF,LP)*比其他的更容易出现。*"接下来几个出现得没有规律,然后,"*我们会抽到LP,因为更容易出现*"。但是几次新抽签之后,他总结出:"*最后2个会是FP,因为这2个不太容易出现。我们还没有抽到过。*——你确定还是不确定?——*确定,我确定还会是FP。*——为什么?——*是*(发牌机的)*盖子让它们出现的。*"

孟(6;6) *以像其他人一样的方式凭经验做出了几个排列组合之后,根据第一次观察到的频度预测出了抽签结果。*"*还是那2个*(LP),*因为这2个是最容易的。*——为什么抽到PL更难?——*抽到LP比抽到PL更容易,因为两者是相反的。*"

杰克(6;6) 数到了50。他使用数字配对发现了排列组合12,23,33。"还有其他的吗?——*我觉得全了。*——当你组成23时,你不能以其他方式排列这2个数字了吗?——(他把23颠倒成了32。)——12呢?——(他把12颠倒成了21。)——还有吗?——*我认为我不能再组成其他数字了。*——(我们给他看了22和31)现在还有吗?——*我认为都有了。*"

对于随机混合,他起初是任意预测,然后根据观察到的频度来预测,最后通过补偿来预测。"这取决于什么?——*我不知道。*——如果我把所有的数字1,2,3组合起来,会怎样?——*会出现像11,22,33这样的。*——如果只混合几个呢?——*我不知道会出现什么。*——是不是有一些更容易出现?——*3更容易出现,因为当我们把123颠倒过来时,3就是第一个了*(321)。"

卢克(7;3) 可以数到100。他首先发现的排列组合只是13,33和32。"用1,2,3这3个数字可以组成多少个两位数?——*大约50个。*"他逐渐发现了6个两位数,然后是8个,最后是9个。"我们可以找到一种确保找全所有数字的方法吗?——*是的,组成很多数字,然后拿走相同的那些数字。*"

随机混合:相同的反应。他开始认为相同的配对以某种偏好可能性出现,然后他注意到了频度的相等性。"如果我抽很多,很多对纸牌,比如说100对,会怎样?——*差异会越来越大。*"

在研究这些排列组合运算时,我们看到第一阶段的实验对象摸索着进行,并未推测出方法体系:儿童任意抽取了一张纸牌,然后将其与其他任意一张放在一起,然后简单看了看这个配对是否已经出现在板子上了。在这个阶段的开始,组合新元素比变化元素的位置更容易,尤其比同时考虑到组合和可能的排列更容易一些。

对于混合,儿童再次因不能理解混合的作用,及认为洗好的纸牌中存在着潜在次序,而表现出排列组合中方法体系的缺失。抽签揭示出来的潜在次序有时候是基于观察到的重复,有时候是基于公平意义上的补偿(正如贝尔所说的,“*那就不对了*”)。对于建立在既定频度上的预测而言,这或许就是感知经验性重复(马斯特)的问题,或因为频繁抽到的纸牌“*更容易出现*”(孟和皮尔)的观点。对于数字的排列组合,儿童有时候自己会做出稀奇古怪的预测,这些预测确凿地证明了儿童不能理解随机混合。例如,杰克认为数字1,2,3总是会组成11,22和33。而且,杰克还认为不充分的混合将会形成不可预测的结果;除非数字3出现得更频繁,因为“*当我们把数字颠倒过来,3就是第一个了*”。因此,杰克认为不完全混合等同于排列。

因此,我们理解了以下原因:为什么当实验对象缺少了与随机混合的不充分概念类似的组合体系时,他随意建构自己的排列组合,而否认排列组合中实为偶然的概率的作用。在两个案例中,儿童都不能理解大数字的可能性,而这正是为什么在第一个案例中,儿童只能做出几种排列组合;而在第二阶段中,他认为所观察到的频度中有潜在次序。

第三节　第二阶段:方法体系的寻找与概率概念的开始

像组合和排列的案例那样,在第二阶段中,我们看到了儿童系统化排列组合的逐步发展,同时还有儿童对由混合形成的偶然排列组合越来越正确的理解。以下是几个介于阶段1和阶段2的中间状态的案例。

邦(6;10)　一个接一个地组出了12,13,11,32,23,31,22和33。“你还能组成其他数字吗?——*是的*(他组出了21,然后是31,他拿走了31,因为已经出现过了)。——还有吗?……你必须要做什么才能知道你没有遗漏?——*我不知道*。——你总共组出了多少个数字?——*9个*。——我们还能组出其他数字吗?——*不能*。——你能排列得更好吗?——(犹豫了一会,他按次序排列了这些数字:12,13,11,32,31,33,23,22,21。)——你还能做得更好吗?——*是的,像这样*(11,12,13,31,32,33,21,22,23)。”

混合:几次尝试后,他预测出最可能抽到的配对将会是那些还没有出现过的,“*因为相同的不能总出现*(因为混合过了)。”然后,注意到某些重复之后,他继续预测抽到还没有出现过的配对的可能性小一些:“这次最有可能抽到什么?——*我们*

已经抽到过的，因为抽到过的比没有抽到过的多一些。”此后，他拒绝再预测，即使是20对的最后分布，尤其是100对的最后分布。

迪斯(7;10)　立即组出了11,21,23,31,32,然后犹豫了一下。——你知道总共会有多少吗？——*可能是*……(他补充了22,13……)*8个这样的。是的，我知道还能组出33。我数了数我已经组出的数字。哦，是的，我还能组出12。*——我们如何确定？——*我看了看这些数字。*——你只是看了看就能确定吗？……按照次序再组一遍。——*那里，11,12,13。*哦，*我忘记了21,23,22也漏掉了。还有31,32,33。总共是9个。*——你还能组出其他数字吗？——*不，不能了。*——如果我让你使用数字4呢？——*那么我就可以组出41,42,43,44。*——就这几个吗？——*我们可以将4放在不同位置：14,24,34。*——会组出多少个数字？”迪斯还是不知道乘法表。但是，通过连续加法，他发现了16种排列组合。使用类似的程序，他甚至能够发现使用5个不同的数字可以形成25个两位数的排列组合。

米特(8;10)　“使用3个数字，可以组出多少个不同的两位数？——*3个，不，超过3个。我觉得是6个*(在12、21、33、11、22、23、32、13和31后，他又组出了1个，然后继续到处看是否已经组出了所有的数字)。——还有吗？——*是的，还有几个。*——如果你是这样想的，你能知道是否组出了所有数字吗？——*不能，哦，是的，我可以看看是否有*(相同数量的)*1,2和3，我们是否得到了所有的配对。*”他数了数所有1,2,3的数量。“*是的，全了。*”

随机混合：“我们可以猜出来吗？——*不能。*——你认为12会最先出现吗？——*不会，因为数字是随机出现的。*——(他抽到了23。)——你能告诉我为什么23出现了吗？有原因吗？——*抽到23没有什么原因，因为你洗过牌了。*”接着，他认为最有可能出现的是“*那些还没有出现过的*”。同样，他说最有可能抽到的配对是那些已经出现过的，“*我几乎认为它们再也不会出现了，因为已经出现得太频繁了*”。因此，最后结果并未证实补偿概念，即不是有规律的。米特总结出如果我们再做一次，“*结果会非常不同*”。但是，我们不能确定地预测，“*因为我们把所有纸牌都洗过了，你不可能知道的*”。儿童没有感知到大数字法则。

韦伯(9;6)　组出了21,31,22,33,12,然后通过颠倒31组出了13。“*我组不出其他数字了。哦，我看到了还能再组出1个*——11(看到了他组出的22和33)。——你怎么知道组出了所有数字？——*因为我们有3个数字，每个数字出现了3次。*——会组出多少个数字？——*9个，但是我们只有7个。*——你怎么发现了一种确保所有排列都有了的方法？——*通过看。*——在你组出的数字中，有多少个1？——6个(没有数)。——多少个2？——*3个。*——多少个3？——*3个。*——看看。——哦，*每个都出现了6次*(他补充了32和23)。哦，*我看看。如果每个数字的数量不同，就不对了。*”

随机混合：“*一起得到2个数字*(例如，22)*的可能性小，因为已经混合得很好*

了。——如果只混合了一点呢？——*如果只混合了一点，就不可能是2个数字一起了。*”直到实验的结尾，13也没有出现，而他预测出了这点。“你确定能得到13吗？——*这要取决于混合方法。如果有更多纸牌，得不到13就更不可能了。*”但是，他还是没有归纳出大数字法则。

杜姆(10;8) “你认为用数字1,2,3可以组出多少个数？——*80个。*——好的，试试看。”他组出了8个。“怎样确定你组出了所有数字？——*用3,2,1试着配对，然后看看是否已经配对出这些数了*(他把8对数按序排起来)。——以1开始的数字有几个？——*3个。*——2呢？——*3个。*——3呢？——*哦，是的，用3还可以再组出一个数*(他发现了这个数)。——还有更好的排放次序吗？”他摆出了11,12,13,一个比一个大，然后是21,22,23,最后是31,32,和33。

混合：“*纸牌是混合的，所以我不能知道会出现什么。*”在实验的最后，他预测出会出现还没有出现过的数字，“*因为所有数的数量是相同的*”。但是，也可能出现有些数字不出现的情况，“*不是*(像规律那样)*那么确定的*”。因此，这就出现了对大数字法则的理解，但是并没有从小数字法则中归纳出真正的大数字法则。“如果我们用那样的几堆数字配对，得到的数字会比这些更规律还是更不规律？——*更规律。哦，不，如果有很多纸牌，会更不同。*”

莫尔(10;8) 开始的反应相同。对于大数字实验，认为差异保持相同：“*一样的，因为我们经常玩。*”

在排列组合的这些运算中，我们在实验对象身上发现了对规律的逐步感知及逐渐的系统化，而这均与我们已经在组合和排列实验中观察到的相同。例如，韦伯和杜姆立即确定了：如果我们发现n个排列组合以1和2开始，那么以3开始的排列组合也必然是n个。同样，当儿童已经发现11和22时，他立即概括出了33。对于发现不同可能排列组合的方法，实验对象起初总是停留在经验层面，但是这个阶段的实验对象立即明白了可以根据每个排列组合中的首位数字(1,2或3)的次序来发现组合。只有这样做了之后，儿童才有了将第二位数字以相同次序(11,12,13)摆放的观念。某些实验对象甚至根据3个元素配对成的排列组合的数量是3^2而凭着经验理解了法则。但是，这只是经验发现(尤其是迪斯，他还不知道乘法，却依然概括出4个和5个数字能排列组合出多少个数)，且这个发现是由要排列的元素是数字，且其特点是能够排序的事实促发的。

对于随机混合和概率概念，我们在与组合运算逐渐系统化的关联中发现了儿童能够理解由混合造成的偶然排列组合。这可以在下列情形中看到：当米特立即宣称如果能抽到23，而非其他数字，那么“*这是没什么原因的，因为纸牌已经洗过了*”。但是，如果从此之后单个案例被认为是无法预测的，那么儿童也就意识到了整体分布是有规律的：“*每处会有相同的数量*(*频度*)。”杜姆说。尽管这仅限于理解我们早些时候称为小的大数字的案例，即可以从物体的集合看到并处理。一旦我们试着让他们归纳包括了真

正的大数字的法则,儿童就会抵制:“*如果有很多纸牌,差异就会更大。*”例如(已经10岁8个月的)杜姆说。但是,他缺少感知形式推理及感知比例性的能力。处于阶段3边缘的莫尔甚至说“*一样的*”,但是尽管如此,儿童却并不承认补偿会继续随着抽取次数增加。

第四节　第三阶段:理解排列组合方法体系及趋于大数字的随机混合法则

有趣的是,我们再次在这个实验中注意到:11岁到12岁的年龄标志着概率概念发展及组合运算理解的转折点。但是对于排列组合,就像对于(排列组合中包含的)排列一样,将阶段3区分为两个连续阶段是依然正确的:子阶段3A,在这个过程中,儿童成功发现了既定数量的元素(n等于3或4)能形成元素数量的平方种排列组合(如果我们将自身重复出现的数字也计算在内,例如11,排列组合的数量因此就是n^2)。但是,他还是不明白这其中的原因,因此也就不能成功地从这个数量到那个数量的元素中做出建设性的归纳,而仅仅是经验性归纳,然后也只能是在某些确定案例中做出归纳。另一方面,在阶段3中,儿童理解了原因,而且激发了归纳。

格尔(10;8)　我们以两个元素1和2开始。格尔立即发现了12,21,11和22:“多少个?——*4个*。——你怎么知道都有了?——*有2个不同的数*(12和21)*可以颠倒*。——你能在我们试之前就说出3个元素有多少个配对吗?——*6个*。——为什么?——*有3个不同的数字,而且可以颠倒两次*。——试试看。——*那里*(他组出了13,31,12,21,32,23,11,22和33)。*组出了9个数*。——可以排成不同序列码?——*是的*(他根据颠倒序列的不同摆放了这几个数)。——你能提前说出4个数字可以组成多少个数吗?——*是的,16个*。——你怎么数出来的?——*通过4乘以4。我们有4个数字,我们可以以4种不同方式排列这4个数字*。——你怎么想到这个的(实际上,是通过类比3乘以3等于9)?——(他计算了一下)*12个数*(12,21,13,31,14,41,23,32,24,42,11,22,33,44)。——都有了吗?——*哦,不是,还有43和34。这就是12加4*(11,22,33,44)等于16。——如果是5个数字呢?——是30个,因为有5个数字,5种可能颠倒方式,然后又是5个。——试试看。”他发现了25个配对,但是不理解为什么。

对于随机混合,他拒绝预测单个案例,因为“*纸牌已经洗过了*”。对于特殊数字,“*可能不会出现*”。但是当被问道,“如果我们全抽到了,会怎样”时,抽到每个数字时的“*差异会变小*”。“*不确定,但是我们抽到所有数的次数是相同的*”。“如果有3倍的纸牌,会得到什么差异”“*差异会变小。如果纸牌的数量很多,就没有什么差*

异”。

阿拉(12;7)　开始就表示两个数可能会出现4个配对。“用1,2,3会得到多少数?”他组出了11,22,33,12,13,21,23……“总共是多少个? ——*12个*。——为什么? ——*以1和2开始的一系列等等,3乘以4就是12。哦,不,18个,3堆6个的,然后就是9个数*。——现在,试试4个数字。”他组出了11,12,13,14,22,23,21,24,33,31,32,34,44,43,42,41。“全了吗? ——*是的。我以1开始与所有数字配对,然后以2开始,以此类推*。——5个数字会组出多少个数? ——*20个*。——为什么? ——*每列是5个数字,4列,哦,不,25,因为是5列*。——6个数字呢? ——*36个*。——为什么? ——*又多了一列,每列有2个6*(他通过15,16,25,26,35,36以此类推来理解)*那就是6乘以6,等于36*。——好的,如果是7堆数呢? ——*49个数字*。——8个数字呢? ——*64。现在,我知道了。因为我们用数字乘以数字本身*。——是的,但是为什么呢? ——*一个数字可以与所有数字的任意一个放在一起。6个数字,每个可以放6次;7个数字,每个数字可以放7次*。”

对随机抽签的反应:与之前的实验对象相同。

因此,我们看到:除了引领着我们到达子阶段3B起点的阿拉的最后发现之外,实验对象确实发现了平方的法则,但是没有发现这其中的原因。因此,这是持续发现的问题,且因为用于做出连续排列组合的方法体系而越来越全面。正是这个全面的方法体系刻画了形式思维的第二能力运算。但是,使用第二能力运算的能力并没有像我们已经注意到的那样使儿童理解了发挥作用的运算原因。因此,格尔依然将颠倒(12和21)从数字的重复(11或22)中分离出来了,而没有明白这就是建构排列组合的唯一原则问题。

子阶段3B中的实验对象迅速地从他们的第一次实验中归纳出了原则。

马特(12;11)　使用两个数字:“*我可以从同一组集合中抽出2个数字吗?* ——可以。——*好的,那就形成了*11,12,21,和22。——使用3个数字呢? ——*组成6个数*。——为什么是6个? ——*首先,我们可以组成数字11,22和33,然后是12,13,21,23,31和32。出现了9种可能*。——还有其他的吗? ——*没有了,我们不能以其他方式排列了*。——4个数字呢? ——*12个*。——为什么? ——*因为4乘以4是12,哦,不,16*。——但是,为什么是4乘以4? ——*每个数字都可以与4个数字中的每个数字组成一个数。1和1、和2、和3、和4,以此类推*。——好的,那么6个数字呢? ——*36,7个数字就是49*。”

吉拉(13;3)　凭经验发现了3个数字两两可以形成9种排列组合。“如果我给你4个数字呢? ——*16种排列组合*。——为什么? ——(他笑了)*因为每个数字都和其他3个数字都可以有4种排列,第二个数字的情况也是这样,以此类推。总共就是16种了*。——6个数字呢? ——*36种,因为每个与其他5个数字都可以形成6*

种组合，总共是6个数字。——7个数字呢？——49种。”

在这个阶段，法则的发现几乎立即伴随着法则原因的理解。显然，这种理解本身就是实验对象完全掌握了用于穷尽所有可能排列组合的方法系统中的内在关系。换言之，这并未形成既是反省性的也是预设性的格式。子阶段3B的发展存在于以比例性原则的方式从形式方法体系中抽取真正形成的排列组合之中。其中，比例性原则描述了建构原则并决定了可能归纳。

第五节　基于排列组合的可能性量化①

我们拿出了一个装有20个红色弹珠和20个白色弹珠的袋子，并从这个袋子中连续成对地拿取弹珠。知道了可能的排列组合(RR，RB，BR和BB)的实验对象会明白他最有可能拿到的弹珠会是5对RR、5对BB，然后是混合的10对RB和BR吗？换言之，他是否能感知到了与著名的孟德尔法则(例如，杂交)相关的简单可能？我们似乎有兴趣就这个问题提问这50个实验对象。我们首先在排列组合运算中提问过这些实验对象了，这样可以使我们研究建立在这些运算基础之上的量化可能性的案例，而非仅仅是此前部分中所涉及的抽取纸牌的量化可能性。

首先，我们让儿童注意到蓝色弹珠与红色弹珠的数量相同，然后我们将这些弹珠装入袋子中并晃动。用3个空盒子以接收红色弹珠组、蓝色弹珠组及混合弹珠组(我们将其标记为M)。然后，问题就是，了解在一次拿2个弹珠，拿完所有弹珠之后，最后是红色弹珠组多，还是蓝色弹珠组或混合弹珠组多。我们可以在实验开始就问最后的结果，也可以让实验对象提前预测每次会拿到什么样的弹珠。我们主要是在寻找为什么会有特殊分布的解释。

这个案例的下述反应通常可以被划分为三个阶段。在第一个阶段中，儿童明显表现出相信RR弹珠或BB弹珠会比混合弹珠出现得更频繁。在阶段2中，这种信念很快就被翻转了，但是没有在数值上量化出M出现的最大频度。最后，在阶段3中，儿童在法则的量化形式中发现了法则。以下是第一阶段的部分案例。

兰(4;10)　立即预测出他会拿到RR和BB，但是没有预测出会拿到混合弹珠M，就好像这些混合弹珠是我们在起初的5个实验中随机拿到的。第六次拿取：“*现在呢？——红色弹珠和蓝色弹珠。——为什么？……试试看。——*(他拿到了BB。)*——现在呢？——2个红色弹珠。*”他继续预测会是红色弹珠对或蓝色弹珠

① Done in collaboration with Gaby Ascoli。

对,直至实验结束。

万特(5;6)　“会拿到2个什么弹珠?——*2个蓝色的或2个红色的*。——你能拿到其他样的吗?——*不能*。——我们来看看(RR)。现在呢?——*2个蓝色的,因为我们已经拿到2个红色的了*。——拿吧。——(他拿到了混合对,然后惊讶了。)——你没有想到会是这样的吗?——*是的,没想到*。——这次呢?——*不知道*。”

尤尔(5;9)　同样立即预测出了RR和BB,没有想到会是混合对M,然后很快被实验证明其预测结果错了,但是并没有从中总结出什么。“如果我们已经清空了整个袋子,我们会最经常拿到什么——红色对、蓝色对还是混合对?——*我不知道*。——猜猜看。——*红色对或蓝色对*。”

这些反应符合全部已知实验,而且揭示出了年龄小的儿童在随机混合上的有趣态度:对他们而言,非混合对RR和BB出现的可能性似乎比混合对M出现的可能性更大。更准确地说,可能会出现混合对的概念甚至似乎根本就不曾吸引他们,尽管我们在他们面前确实混合了弹珠。就好像实验对象认为袋子中出现的自主混合引发了相似元素而非混合元素的结合。

但是,在第二阶段的一开始,我们就看到了混合弹珠的可能性,且其出现的可能性很快就被认为高于非混合弹珠(RR或BB)的可能性。

阿尔(8;10)　“你可以拿出其中的2个弹珠。这两个会是什么颜色的?——*2个红色弹珠或2个蓝色弹珠,或1个红色弹珠和1个蓝色弹珠*。——最有可能是哪种?——*或许是2个红色弹珠,因为或许没有与其他弹珠混合在一起*。”我们再次晃动了袋子,阿尔拿到了2个红色弹珠。“现在呢?——*可能会是其他样的,因为已经混合过了:2个蓝色弹珠或1个红色弹珠和1个蓝色弹珠*。”又拿了几次之后,“这次呢?——*红色弹珠和蓝色弹珠更快地混合出现*。——为什么?——*因为弹珠混合得更好了*。——如果我们再做几次,还会是一样的吗?——*不,这要看概率了*。——100个弹珠呢?——*比较容易拿到混合对*。——40个弹珠,我们会拿到多少个混合对?——*不知道,但是会比其他弹珠多*。”

贾(9;4)　“*两个红色弹珠或两个蓝色弹珠或1个红色弹珠和1个蓝色弹珠混合的*。——最有可能是哪个?——*我们不能知道*。”几次拿取之后:“*我们更经常拿到混合弹珠*。——为什么?——*因为一起拿到2个红色弹珠或2个蓝色弹珠更不寻常*。”

洛尔(9;4)　在第一次拿取中预测出了2个蓝色弹珠(结果正是如此),然后是1个红色弹珠和1个蓝色弹珠(这个也得到了证实)。“接下来,我们最有可能拿到什么?——*2个红色弹珠和2个蓝色弹珠,混合弹珠比较容易拿到,因为是随机混合*

*过的。——*为什么？*——有时候混合弹珠出现，有时候不出现，但是比较不容易拿到2个红色弹珠或2个蓝色弹珠。*”实验逐渐证明了确实是如此。“*是的，混合弹珠的盒子总是满一些，因为袋子中所有弹珠都混合了，这样我们就会更经常拿到混合弹珠。*”

德里(9;10)　首次拿取：“我们会拿到什么样的？*——或许是2个相同颜色的，或许是每种颜色1个。——*我们更经常拿到什么样的？*——每种颜色1个，因为我们已经混合过弹珠了，它们不可能都在相同位置。——*40个弹珠，会有多少对混合的？*——我不知道，但是混合对要多一些。*”

因此，我们从一开始就看到了混合对的可能性，而且儿童经常在第一次实验中就知道了混合对的频度较大。从第一次拿取中，儿童就断定了这种可能性，而且在儿童眼中，这种可能性是增加的，但是这种可能性没有得到数值上的量化。

在第三阶段中，法则得以形成。

格拉夫(12;5)　*在每次拿取之前就预测出了他会拿到什么：*“*2个红色弹珠、2个蓝色弹珠，或1个红色弹珠和1个蓝色弹珠。——*最有可能是什么？*——一样的。我们不知道会拿到什么。是混合弹珠，因为有半数蓝色弹珠和半数红色弹珠。我们可以拿到20次混合弹珠，但是蓝色弹珠对只有10次。*”几次拿取之后，“*红色弹珠对总是会多一些。——*为什么？*——因为每种颜色的弹珠都是一半，我们更有可能拿到红色和蓝色混合在一起的弹珠。*”

玛(12;6)　*在任意一次拿取之前：*“*我们会拿到2个蓝色弹珠，或2个红色弹珠，或1个红色弹珠和1个蓝色弹珠。——*最经常拿到哪种？*——1个蓝色弹珠和1个红色弹珠。——*为什么？*——因为是随机混合了弹珠，我们最有可能拿到混合弹珠。——*20对呢？*——或许是10对混合的。——*其他的呢？*——每种5对。——*你确定吗？*——可能会稍微不同，但是不经常。*”

甘(12;6)　“*混合弹珠总是会多一些。——*多少？*——或许是一半；一半混合弹珠，然后是5对红色弹珠和5对蓝色弹珠。*”

康吉(13;3)　“*更可能是混合对。——*为什么？*——因为我们装了40个弹珠，因此我们更有可能拿到混合的，一半的概率。——*我们会总是拿到混合的吗？*——那就相当奇怪了。——*如果我们玩很多次呢？*——10对混合的，5对红色的和5对蓝色的。*”

尽管在第三阶段中并没有明确提及排列组合，但我们依然看到了实验对象如何根据5对RR加5对BB再加10对M(RB和BR)的比例迅速量化了可能性的问题。这就是最更吸引人之处，因为没有区分BR或RB次序的关系，实验对象准确预测出了实验中的

数值关系,而不是认为每种配对(RR,BB和M)的可能性都是1/3。这是组合运算发挥关于概率和可能性概念的建构作用的新案例。

第十章　结论：概率、可能性和运算

逻辑和数学运算构成了以严密方式相互关联，且总是可逆的行为体系，其中的可逆方面使推理成为可能。相反，概率性发生的变化并没有以严密的方式相互关联，其最有可能形成的方法体系基本不可逆。而逻辑和数学运算导致了并结束于分组的建构，或群组的偶然变化仍然不可简化成这种结构。最后，归纳存在于运算性推理与不可排除的偶然变化之间：归纳包含了那些使个体可以在实验中将偶然变化从可推理的变化中筛选出来，同时也为推理本身做好了准备的步骤。

要理解本研究中获得的不同结果并做出总结，就要合理探讨这些与我们在智慧的运算发展研究中产生的所有结果相关的结果。通过比较这些运算，我们已经不断地看到：儿童逐渐发现了概率，最后通过与运算结构的恒定关系理解了概率并形成了可能的方法体系。

第一节　概率概念的三个发展阶段

当将儿童的反应视作其年龄的结果之时，第一个事实就立即显现出来了：这就是概率及可能性概念的形成与我们正在研究心理发生的不同运算的形成之间的关联。

实际上，从基本逻辑-算术运算的基因观点视角而言（分类、关系、集合、分数），我们可以区分出三个主要的发展阶段。第一阶段是7岁或8岁之前，其特点是所谓的运算（即一种可逆组成）的缺失。此阶段使用的推理仍然是前逻辑的，而且只受知觉规则体系的制约，既没有层级网络也没有整体守恒，更没有可能推论的缜密性。但是，出现了逐渐引发运算阶段的、日渐清晰的知觉关系。从7岁或8岁到11岁或12岁是第二阶段，特点是逻辑次序的运算性归类的建构、数字集合，但基本是具体层面的，即关于能被看到或能被以其实际关系处理的物体。最后，第三阶段开始于11或12岁，特点是形式思维，即同时将一个或几个具体运算的方法体系整合起来的可能性，并将其转换成假设-演绎命题的形式，即转换成命题的逻辑形式。

我们可以以这种方式用本书第七章到第九章所给出的必要迹象，来解释组合运算的进化。在第一阶段（7岁到8岁之前）中，儿童甚至没有怀疑方法体系的可能性，这种方法体系使其能够不遗失任何一个两两成对的组合而发现所有的组合。其中，所有排列与所有两两成对的排列组合都可以由几个元素形成。此失败不足为奇，因为此方法

体系需要特殊的乘法运算,而实验对象甚至还没有掌握加法或简单的乘法运算。在第二阶段(7岁到11岁)中,儿童明白了存在这种方法体系的可能性,但是只能凭着经验去发现,且是不完整的,因为这些方法体系需要同时结合几种具体运算。最后,在第三阶段(11或12岁之后),形式思维的开始使得儿童发现了数量较少元素部分完整的组合方法体系。

双重运算发展以相当准确的方式与我们在概率和可能性概念的研究中所看到的汇聚在一起。实际上,我们所采用的实验仪器要聚焦的是儿童对概率的反应,已经发现了与逻辑-算术运算及组合运算紧密相关的三个连续阶段的存在。

在三个阶段中的第一个阶段(7岁或8岁之前),儿童不能从必然中区分出可能,因而直接转向了向远离概率那样远离了运算自身的行为层面。儿童的思维在可预测与不可预测之间摇摆,但是对他来说,没有什么是肯定可预测(我们用这个词区别于必然)或完全不可预测的(即,偶然)。因此,我们不能将儿童的预测视为源于较大或较少主观确定程度的可能性判断,因为这种确定仅仅是不能区分出感知预测性和反复无常的实际概念的结果。然后,在这个年龄,既没有概率也没有可能性,因为缺少了基于推理运算的相关方法体系。

在大约7岁或8岁时,逻辑-算术运算出现了,这开启了概率概念开始发展的第二个阶段。实际上,一方面,推理或运算必要性的发现使得实验对象通过综合而感知到了单个和偶然变化的不可推理性特点,并以这种方式区分出了必然和简单可能。另一方面,将补充部分并入整体的合并运算(例如,将A与A'并入B)导致了具体结合:[①]如果x是B中的一个元素,那么它可能在A或A'中;这种具体分离正是通过这个事实导致了可能性判断中存在的两个或多个可能性的观点。简言之,概率存在的发现实际上是源于与运算必要性建构的比较,可能性关系结构的开始归因于感知到由可量化部分形成的作为整体的混合元素的可能性。而且,像这样的混合,即概率的最简单的物理表达始于被视作真实的混合,而不仅仅是掩盖了潜在次序的明显无序。此原因就是儿童成功看到了偶然组合、排列或排列组合(实际上,是所有混合的条件)的可能性,而在第一阶段,看见实际混合并没有撼动实验对象将概率排除在想象次序之外的信念,而这是真的,因为他们不能理解组合或可能排列。

但是,只有在第三阶段(11或12岁之后),可能性的判断以概率的反弹运算组成了其常规方面。从这种观点的视角来看,我们可以通过下述将其与前两个阶段进行比较的方式来界定第三个阶段:第一个阶段没有什么是可以推论、什么是不可以推论的区分,因为知觉预测仍然介于运算及概率自身之中。在第二个阶段,出现了这种区分及概率和运算之间的对照。后者决定了可推论的范畴,而概率因此界定了非组合及不可逆的范畴,总之就是不可预测性(这点参考怀疑标志着阶段2开始的相关段落:例如,参见

---

① 即基于分开或分离类别A和A′的存在,而不是基于比例逻辑。

第三章)。相反,在第三阶段,出现了概率和运算的综合,后者使得偶然分布的范畴通过一种与偶然性的同化类似的运算建构于可能性的体系之中。两个相关过程共同实现了此结果。一方面,组合方法体系的建构(以发现使用少量元素来建构所有可能运算的方法为标志)使实验对象将随机混合视为无序完成的变化结果,且儿童只意识到了整体可能性中的一部分。另一方面,建构了这种组合方法体系的形式思维也使实验对象发现了比例。将比例性关系应用于这些相同组合运算中的大数字法则使实验对象在(在比例上变得更规律,且因此在整体而非细节上是可理解的)分布的意义上将偶然变化的可能性组成的合理性想象成了合理预测。

因此,这就获得了概率概念的个体演化,基于大数字的可能性暗示着运算与偶然性的综合。这种综合出现于对照之后,而这基本是在第二阶段的开始,其标志也是不能区分可能和必然,而不能区分是第一阶段的特点。

第二节　第一阶段:不能区分可能和必然

毫无疑问,我们已经勾勒出主要特点的三个阶段中第一个阶段的最普遍特点,那就是区分出了适用于这种心智阶段的判断模式。从表面上观察这些,我们已经有印象:小孩子甚至是婴儿能从必然中区分出可能。当吃母乳的孩子听见门后的声音又不确定是谁时,他希望出现的是他的母亲。实际上,我们可以说他认为母亲的出现是可能,而不是确定,或甚至是一定程度的可能。这种解释可以使我们将可能性的判断视作非常原始的,甚至先于概率的准确概念,或与不确定或不可预测的知觉概念相关。

在此,像其他地方一样,我们必须知道如何避免绝对错觉,这种错觉存在于将最复杂的概念划归至初级阶段,就好像这些概念已经包含于初始感知之中了,还要知道如何避免非连续的错觉,这种错觉可以使个体承认尚处于形成之中的虚无结果。在这个案例中,就像在其他所有案例中那样,机能连续性及结构变化是发生的两个基本条件。因此,从生物学角度来看,所有动物都要进食、繁衍,因此,这是营养供给的一贯机能,但是这种机能是由结构不同的器官加以利用的,而试图在原生动物身上找到胃或小肠的类似物却是非常荒谬的。同样的,从心理学角度来看,刚出生那年感觉运动的适应出现了与逻辑思维一样的协调与归纳机能,个体因此可以从机能上把感觉运动格式比作某类实际概念及其与某类判断或甚至是推理的相互同化。但是,从这些机能性的类比中提取结构性认同,及将母乳喂养的婴儿的运算结构划归为可推论或可能性的,并没有什么意义。

在智慧的感觉运动阶段,此时真正思维的前概念是什么?其开端是什么?实验对象确实获得了基于实际同化或复杂表征的感知,而且他非常清楚地知道:他的预测有时候是不正确的,因为现实并不总是与我们对现实的期待相辅相成。对于智慧和前运算

感知的经验性感觉运动而言,现实因此依然介于规律(由于同化)和将预期格式限定为不同顺化的不可预期之中。但是,同样凭知觉感知到的规律也没有使儿童掌握必要的逻辑运算,不可预期(儿童仅仅注意到了与可预期规律的比较)也没有与不可预测混淆在一起,即与感知到的不可能简化成可能推理的变更。实际上,不可预测起初被视作是幻想或武断的表现,因此也被解释为动机的心理或有意模式,而不是非组合和不可逆的逻辑或物理模式。

因此,关于判断模式,实验对象并不准确知道可能和必然之间的差异(第二阶段亦是如此),因为他缺少运算推理的内在必然性概念。从机能性观点的视角来说,此时确实出现了发挥可能作用的概念,这正是未来是由不能确定预测出来的事件构成的观点。但是,从结构观点的视角而言,这种不确定性并没有像逻辑不可预测性那样的结构价值,即没有像有别于必然性的概念那样的结构价值。只要实验对象不确定A会等于$B-A'$,A'会等于$B-A$,如果我们让$A \cup A'=B$(儿童7岁之前没有习得这种确定性)[①],那么就不能把可能性叫作:源自当儿童面对由两个元素X和Y组成的混合物时,想知道会拿到什么但又不确定的特点。实际上,如果第一个案例中没有感知到必然性,第二个案例中必然性的缺失依然没有得以区分,这就意味着:在这两个案例中,儿童依然不能区分出必然性和可能性。

简言之,我们可以通过表现出了介于动机与非动机之间所有变量现实感知的常规方式来界定第一阶段。因此,第一阶段宣示了演绎运算,第二阶段则是概率。但是,从两者结构的观点来看,因为缺少了逻辑合并的恰当建构,两者依然是相互分离的。然后,我们就明白了这种复杂性的原因,而这种复杂性在此前章节中被我们划归为第一阶段。

第一,儿童并不怀疑随机混合的真实性,并不断试着发现这其中的无序,他认为这种无序只是表面的,但实则隐藏着混合发生之前基于要素共同属性等的某种次序。我们在第一章和第五章就注意到的这种常见反应实际上只是奇怪,而且对那些已经具有推理次序思维的儿童而言,他们依然无法理解,因为混合似乎刚好与这样的次序相悖。但是,对于那些依然不知何为推理的实验对象而言,无序能够掩饰隐藏的半有序是很自然的,因为他们认为推理次序本身就是这种类似知觉的结果。当试着推理性运算时,他们实际上只知道如何在最终只是部分次序的隐藏次序上做出猜测,而不是组合运算。在这两个案例中,第一阶段的儿童只是凭知觉成功计算出了大约的次序。其中,年龄大的实验对象看到了如何比较可推理的次序与无法进行任何推理的无序。

第二,同样的原因,第一阶段的儿童还不能理解作为偶然过程特点的不可逆性,尤其是界定了随机混合的不可逆性。他们还没有发现运算的可逆性,没有这种可供参考的方法体系,因此也就不知道如何认识不确定性和偶然过程的不可推理性中所牵涉到

---

① 与如果$A=B$,$B=C$,则$A=C$的确定性一样,以此类推。

的附加了非组合成分的不可逆性。实际上，他们很轻易地就确定了混合中的元素会回到其始点位置，即未混合前的位置。正如我们在第一章所看到的，这并不是真正的可逆性的问题，而只是初始次序的观点，而这个观点已经被偶然的瞬间扔进了无序之中，且这个观点有自己再次显现出来的趋势，因为实际上这种观点还没有停止成为某种行为。

第三，当这是一个预测单个偶然案例的问题时，实验对象的反应并不只是基于相似性、初始次序等，而且还基于经常出现、初看似乎是某种概率论特点的关系：补偿关系。例如，如果我们有两个可能性事件 *A* 和 *B*，*A* 发生得更频繁，实验对象就会一直赌 *B*，因为 *B* 已经跳过了。但是，也正如我们已经看到的，首先这并不是某种引发了逐步规律及大数字法则的统计学补偿情境，而是一种可由本阶段的前运算特点来解释的知觉概念，就像前面的观点那样。与所有知觉概念一样，这种观点包含于无区别状态的某一主观或与某种客观观察的自我中心结合之中。其意义有时候就像游戏中“*每个人都会轮到*”、分享、基于公平的社会性组织，也像好坏天气的自然交替。因此，这种补偿就是某种先于概率概念的事物次序的显示，而非事件的概率性组合的显示。其中，这种事件只要是偶然性的，就有可能以像另一种方式的某种方式发生。

第四，作为我们在像钟形曲线这样的以中间值为中心的分布的案例中所研究的证明，第一阶段的儿童还没有怀疑两个相对值之间对称性的必然性（参见第二章）。这种对称性恰好是补偿性的表达，而补偿性是某种统计学次序，与“每个人都会轮到”所表达的补偿性形成了对比。

第五，当儿童不能成功根据其对补偿性的回答来预测出单个偶然案例时，他经常会根据截止至当时所观察到的最经常出现的情况开始做出预测。在两个概率性事件 *A* 和 *B* 中，如果抽到 *A* 比抽到 *B* 更频繁，实验对象就会选择 *A*。如果没有客观原因使我们相信 *A* 实际上更可能，显然我们在此再次获得了通过频率来显现自身隐藏次序的观点。

第六，从结构性观点的视角而言，我们不能根据频度将第一阶段的一个实验对象用演绎推理做出的这些推理关联起来，即使这些推理所表现出来的就是与推理一起发挥作用的归纳。实际上，所谓的推理是同时具有推理运算和概率本身的知识，因为演绎推理恰好存在于从偶然中筛选规律，将规律组织进分类方法体系及能够被演绎处理的关系之中。因此，当问第一阶段的儿童，关于哪个解决方案中隐含着归纳规律和偶然分布（例如像第三章中，旋转能够影响停留位置的有、无磁铁的指针）之间的分离问题时，我们注意到儿童并没有寻找这种分离。因为他们认为指针并不会停在偶然位置上。因此，他们必须试着通过注意到指针停留位置的颜色、次序和颜色次序等的相似性来对此做出解释。同样，他们通过火柴盒的颜色等来解释指针被控制停在装有磁铁的火柴盒之前，或甚至根本不试图解释这种规律性，而是将其视为对我们而言可以归为概率的事实。要解释这点，我们可以说这个阶段的一切依然是归纳性的。因为此阶段既没有概率，也没有推理，而只有对现实的感知或想象出来的规律性。不过，显然，此时归纳这个术语失去了所有意义，且与简单的前逻辑或个体自我中心归纳相冲突。

第七,因为儿童缺少运算性推理及概率的概念,他也就丝毫不惊讶于当预期出现一面是十字、另一面是圆圈时,而出现了所有筹码都是十字所创造出来的奇迹(第四章)。原因就是缺少了推理运算及概率的概念,对他们而言,一切都是不同程度的奇迹。只有当我们有理性思维时,才会提出奇迹的问题,因为奇迹与自然规律或偶然波动相悖。相反,对于古代人,奇迹(语源学意义上的"奇迹"或"奇观")是自然之事。而对于原始人,实际上,一切均是奇迹。这正是第一阶段的实验对象所表现出来的相同反应及相同原因。

第八,运算合并的缺失以最清晰的方式出现于概率量化的问题之中,因此也就是严格意义上的可能性(第五章和第六章)。当给出由1个元素A和2个元素A'形成的集合B时,经常出现的是儿童判断出:如果他要抽取1个元素就会更确定抽到A,因为只是抽取1个元素,而混合中只有1个A元素。我们已经看到这种行为只能用儿童不能形成部分与整体之间的关系来解释。因为不能总结出加法$A \cup A' = B$,实验对象也就不能自己说出B中的某个元素不是A中的,就是A'中的,在这个案例中,拿到A'的可能性就更大一些,因为子集A'是由2个元素表征的。相反,他认为子集A是独立给出的,他没有考虑A'或整个集合B就选择了A。因此,如果运算的缺失可以解释儿童不能理解所有的非组合、不可逆事件,那么运算合并的缺失就能以自己的方式解释儿童的预测还没有出现任何可以将部分(偏好部分)与整体(可能案例)关联起来的概率性结构。然后,这就是其他因素中某个特殊因素的问题,但是依然还没有像这样的预测的量化,因此也就没有数学可能性的判断。

第九,因为更强劲的原因,我们还没有在此阶段发现与分布的整体范畴(大数字等)相关的任何推理。

总之,第一阶段的主要特点确实形成了同质性的整体,该整体在所有细节上都可以由儿童的前运算阶段,基于此处的儿童知觉的无差异特点来解释,在其他范畴中,就是可以由儿童恰当的、即时活动来解释,而不是可逆运算中的协调行为。

第三节　第二阶段:像非组合事实那样的与运算对立的概率发现

在6岁到8岁之间,及在介于两者之间的7岁时,时-空及逻辑-算术知觉在表现出由于此前阶段末尾的重新适应而引发的逐渐清晰之后到达了运算状态,此状态在明确界定的集合中是可逆的且是可组合的。正是在这个阶段,概率概念获得了与这些运算相对的、非组合的、不可逆的事实意义。更准确地说,正是在这个阶段,概率现实被认为是某种事实,不再可以简化为推理运算。

因此,如果我们转到运算的起源,就很容易解释儿童意识了到概率的存在及其作为

非推理过程的渐进解释。通常,如果我们将知觉视作内心行为的表征,那么知觉一旦是可逆的,即一旦发挥作用的关系可以被充分确定可被逆转时,运算就源自知觉了。相反,当当前环境依然不确定时,概率概念就被从两个截然不同的视角提出来了:通过与时-空运算(物理概率)的比较,或通过与逻辑-算术运算(盲目从集合中抽取元素,或逻辑-算术概率)的比较。

从时-空观点的视角而言,当我们考虑到运动时,概率概念的起源就极其明显了。在7岁到8岁之前,位移只能产生动态因素与影像思考混合在一起的整体知觉。例如,儿童会否认移动上坡的斜线*AB*等同于反向路线*BA*。另一方面,从第二阶段(7岁到8岁)的开始,儿童就能将部分运算应用于运动。例如,他成功测量了所发生的路径及持续时间,但是没有归纳出速度的概念,能够比较同时发生的(整体或部分)运动的速度,因为相同时间内,运动路径的长度不同。或反之亦然。因为掌握了这些运算关系(在此前阶段中并未习得,尽管明显很简单),实验对象从一开始就将会明白,当运动轨迹规则时,球的运动就确定了,不用推理任何如果球与其他球碰撞就会改变运动轨迹、速度或持续时间的可能。在知觉阶段,这种不确定性没有任何问题,因为规则运动本身在儿童眼中就是不确定的,而且改变了复杂环境的碰撞与相互作用依然是不可感知的。然而,一旦儿童发展了时-空运算,不确定性对那些已经能够推理出决定性要素结果的实验对象而言就是至关重要的了,而且能使实验对象意识到分离范畴的存在:不能预测出不充分确定还是不确定的偶然事件的范畴。

简言之,在一定程度上,某些因果事件使个体领会了推理思考,物理概率以库诺特所描述的独立因果事件的形式出现了。在这点上,倾斜盒子中弹珠的随机混合(第一章)是重叠(叠盖)了两个运动的典型案例,每个独自发生的运动都能形成可能推理,但是因为部分间的相互作用而被表述成不确定的。沿着斜板滚落金属球(第二章)与此相同。在旋转指针案例(第三章)中,不能确定停留位置的是枢轴的摩擦和气流,而实验对象可能会根据起始推动而认为是速度决定了指针的停留位置。一旦几个因素相互作用,那些已经能够推理的儿童就会考虑到指针停留位置的不确定性,那么此发现就是概率概念的源头。实际上,不确定的运动被儿童视为是非组合不可逆的,简单地说就是简化成运算分类,并因此形成了一个分离范畴,不确定性。

从逻辑或数值整体观点的视角而言,情境是完全相同的。当儿童刚发现了运作的运算被用于根据某种逻辑次序(即,分类法则)来实现充足数据的结果时,运算就引出了实验对象认为是必然的结论。但是,当因为缺少充足数据,或新运算介入并干预到没有必然联系的分类运算,而发挥作用的运算仍然部分不确定时,就出现了结果的不确定性,即获得不同结果的可能性。其中,不同结果使实验对象认为获得其中之一是一种偶然事件。最好的案例就是使用了3个筹码的案例。3个筹码的其中之一是白色筹码(*A*),另外两个是红色筹码(*A'*),3个筹码共同组成了一个集合(*B*)。处于此前阶段的儿童不能总结出*A*和*A'*形成了永久整体*B*,而当前阶段的实验对象非常清楚地知道如何

以$A\cup A'=B$的形式合并A和A'。但是，紧接着要考虑到A或A'，他发现他被迫继续相反的运算（在此，运算思维的新意在于不同于感知思维）：$A=B-A'$和$A'=B-A$。现在，我们要求他选择一个属于B的元素，而我们也没有进一步明示这个元素。在此，我们就获得了一个不确定运算的案例，或新运算的案例，此案例无关于种类合并的分类，且意味着他能从整体B中剥离出其部分中的一个或另一个。实际上，此运算不再包含根据分类运算中的一种（例如，$A=B-A'$）从B中推理性地抽取一个运算，而是通过从B的最中间抽取一个元素而继续下去。那么，元素抽取的结果依然无法确定，即不确定。而能确定的集合形式之一，可能就只能至少始于其他形式中的两种（例如，$B=A\cup A'$；$A=B-A'$；$A'=B-A$；等），从B中抽取任何元素并未满足这种条件。这就是为什么我们既不能把这种运算视作不充分不确定的加法、减法分组运算，也不能将其视作引发了干预到适用于此方法体系的运算的新运算。

结果来自具体逻辑-算术运算的建构，两种模式之间的基本差异是：必然性（或推理形成的运算）和可能性（或不确定性），但没有涉及切实的数据。当具体运算被转换成此阶段的儿童还不知道如何做的形式运算（或两者交迭的运算）时，儿童就明确获得了必然性和可能性之间的差异。但是，正如我们已经看到的，他已经成功从合并集合$A\cup A'=B$中抽取了元素，这可以被称作具体分离："如果x是集合B中的一个元素，那么x不是在A中，就是在A'中。"这种初级分离的具体形式隐含着必然性（"如果x在B中，那么x就必然在A或A'中"）和可能性（"如果x在B中，那么x可能在A中，也可能在A'中"）。可能这并不意味着这种具体分离与我们上述提到的随机抽取元素的分离相同，因为分离在一个集合中合并了两种可能性（当所有子集合并成一个整体时，整个部分就合并成一体了），而随机抽取只是从没有补充确定性的整体中提取一个元素。但是即使是具体分离，分离依然给出了可能性和必然性的双重证据，而这在集合的合并中依然是无关联的。

简言之，通过与运算确定性的比较来界定概率的不确定性的发现（是时-空还是逻辑-算术），将两种模式或现实——可能性与必然性分离开来，而在知觉阶段，两者依然不能以现实或存在来区分。但是，一个新问题出现了，这个问题能支配整个第二阶段，且只能在第三阶段发现其解决方案：这就是样本空间的问题，尤其是可能性的比例问题。

样本空间和比例包含两种情况，一种是加法，另一种是组合。例如，当这是一个从由部分子集合并成整体且确定的集合中抽取一个或几个元素的问题时（我们已经在从$A\cup A'=B$的集合中抽取一个或几个元素中看到了这个情境），第一种情况就出现了。那么，可能的样本空间就直接由决定了所有可能案例的加法运算$A\cup A'=B$形成了。因此，这些可能性的比例（即其可能性的建立）就只是建立肯定案例与所有可能案例之间的关系。因此，对于A，$A=B-A'$，在数值数据案例中（例如，当A有一个元素，而A'有两个元素时），A的可能性就是1/3。另一方面，也许可能性的样本空间是由不同元素间的组合、排列或排列组合决定的。例如，当这是一个从包含了几个既定变量的集合中有序或无序地抽取成对的元素的问题时，样本空间及可能性的比例出现于有乘法特点的第二种

情况中，而这需要用到组合运算。

因此，我们注意到如果概率的发现源于从必然性中分离出可能性，即从确定性的运算中分离出不确定性，可能性的分析就需要在不确定的范畴内再次引入运算。因此，在过了明显对抗运算性与偶然性的阶段之后，新综合迟早会在运算和概率中被影响，而这种综合将会以一种与简单意识到偶然性和不确定性截然不同的方式来定义可能性的概念。但是，可能性的概念将所有可能案例的分析视作一个整体，而不只是孤立的案例。因此，只有解决了组合分析的问题时，儿童才能意识到运算与概率的综合，直到那时其对立面还是因为缺少了所有可能性的运算组合而依然不可简化。

鉴于这种情况，我们现在看到的发展中的第二阶段是由因可能性和必然性的区分而引发概率的发现、不确定性与操作上的确定性的区分而界定的，也是由任何基于我们将会在第三阶段看到的那种基于系统性和组合性分析的概率性组成的缺失而界定的。这就是为什么第二阶段通常开始于怀疑阶段，在这个怀疑阶段中，儿童没有同时想到或能够考虑到所有的可能案例及观察到的案例，尤其是作为可能性的唯一来源的可能案例而预测出单个案例。接着，他确实成功在部分案例中看到了所有的可能性案例，但只是与上述所界定的两个变量中的第一个变量相关的案例，即与不同于组合组成的简单加法组成的相关案例。第二阶段的儿童可以进行的，可能性的唯一判断，即运算概率的唯一综合，实际上是那些基于简单静态考虑到不同于比例和变化组合的整体部分的合并。正是此原因，在第六章的问题中，实验对象知道了如何预测可能性（当肯定案例与相同数量的可能案例出现差异时，或在可能案例中的不同案例中）。同样，在部分不等的案例中（例如，在第五章中，1个*A*、2个*B*、4个*C*、10个*D*），他知道如何将其判断为量化的结果。但是，还是在后面这个案例中，当他已经抽取到预期要素时，他就不再成功考虑到每次抽取之后都不同的整体已经发生了变化的组成。因此，他只是考虑到了初始组成，而没有考虑到变化的比例，即加法组成，而不是乘法组成（分数和比例）。

简言之，从必然性中区分出可能性之后，第二阶段的实验对象还是不能形成可能性的彻底分析。这可再次被解释为运算发展的结果。实际上，与可能性有关的思维就是形式思维，而形式思维的特点是假设-演绎，及关于对当作假设的简单可能性运算。因此，显然，发现了可能性之后，第二阶段的儿童首先就会通过与真实情境有关的具体运算的类比来凭感觉想到可能性。首先，他没有找到一种比他初次在处理真实情境中所发现的运算技术更适用于新模式的推理技术。为了达到这点，他需要7年的成长。实际上，形式思维只能在10岁到12岁之间才能得以发展。因此，只有在这个年龄，儿童通过使用作为中间步骤的假设将推理必然性应用于介于可能性的范畴之中的关系上。

现在，对于概率，一旦可能性已经被从观察到的可能性及必然性中区分出来，这就明确是描述样本空间的问题，即所有可能性。这样，一方面，案例整体数量的分布就是可预测的了；另一方面，每个单个案例都获得了作为整体的部分表达的可能性。但是，要达到这个阶段，首先要满足两个条件，这两个条件都源于我们此前所说的乘法构成。

首先,实验对象必须建构组合运算;其次,他必须能理解比例性,即他必须能立即看到两个相互关联的方法体系之间的关系。到目前为止,我们已经通过能同时推理几个方法体系——也是通过组合运算和比例而习得的能力来界定了形式思维,而现在我们将形式思维界定为与理解可能性有关的具体推理。但是,我们立即就看到了形式思维的这两个特点同样需要可能性,根据可能性推理总是要同时使用到几个方法体系。

总之,我们明白了当前阶段的缺陷:如果此阶段的实验对象已经可以只基于加法合并来做出可能性判断,那么他们就会败在任何需要比例和组合运算的问题上。在这点上,如果我们再次使用第一阶段提出的九点,那么就可以总结如下:

第一,儿童全部习得了随机混合的概念,但是不能根据排列和排列组合的模式来理解运动的内在多种可能性,也没有理解大数字的作用(第一章)。

第二,儿童理解了不确定机制的不可逆性,依然排除与大数字相关的不确定机制的不可逆性。

第三,单个案例之间的补偿不再是不同类型的"每个人都有机会",并获得了统计学意义,但是再次排除了大数字形成的集合(因为不能理解不同的比例性)。

第四,开始在中心性分布(钟形曲线分布)中发现了对称性,但是仅对小数字而言。

第五、第六,纯粹经验性预测的减少,包含了规律性分布与偶然分布的区分的结果表明开始出现演绎推理。

第七,儿童意识到极其不可能出现的分布意味着奇迹,并归纳性搜索解释出现这种分布的原因,而不是通过概率来解释这种分布(例如,第四章中的固定筹码)。

第八,在两个元素中的一个保持不变时,简单的运算合并使儿童根据整体与部分的关系来判断所有的可能性成为可能。另一方面,儿童依然不能比较两个成比例的集合,或整体与部分同时变化的集合。

第九,儿童还没有能力将所有的分布相互关联起来,尤其是在大数字案例中。

因此,第二阶段的这些实验再次形成了完全可以用运算发展来解释的同质性整体:具体运算的出现通过与演绎必然性的对照来解释了概率的发现,而形式运算的缺失以概率性组成的方法体系的形式解释了综合概率和运算机制的缺失。

第四节　第三阶段:概率组合、概率和演绎运算的综合

一旦儿童发现了概率是不能由运算方法组成的不确定性关系,且与所有运算、不可逆性相反,儿童的思维就会尝试同化在发展推理之路上出现的不可预期的障碍。只有一种方法可以理解并解释这点:根据运算方法体系的模式对发挥作用的关系进行分组。如果瞬时概率不适用于推理,那么迟早都要通过解释概率来进行推理,这样做的唯一办法就是认为概率好像是可组成的、可逆的,至少部分是这样的,即就像个体不顾一

切来试图确定概率。

基于此需求,已经在第二阶段的开始就描述出来的概率性构成就出现了,但是直到第三阶段才得以习得。理由很简单:如果单个或个别案例是不确定或不可预测的,反之,这样的整体亦是有多种可能性而确定的,那么整体的组成就会包含再次将部分(个别观察到的案例)与已确定的整体(所有可能案例)整合在一起。

这就是儿童自第二阶段的一开始就在整体是由几个元素的简单加法而形成的案例中所明白的。例如,如果$B=A\cup A'$,我们就不知道抽到的元素是集合A还是集合A'中的,但是我们确定会抽到一个或另一个集合中的元素,因为我们是在从集合B中抽取元素。但是,一旦提出不仅仅是要预测出是否会抽取到混合要素集合中的一个要素,而是要抽取两三个元素,或甚至是预测出抽取的次序,或同时预测出次序与数量等时,问题就更综合了。在此,这就是组合分析与要考虑到必然会介入的比例。

在此,我们既没有必要再追溯第七章到第九章中所研究的组合运算的起源,也没有必要追溯他处所研究的比例的起源,[①]因为两者都不是概率发展的必然结果。另一方面,我们当前的问题是要明白一旦儿童习得了这些运算,这些运算将如何作用于概率,即为了同时同化概率与运算,实验对象将会如何使用运算来理解构成了概率的相对确定性。

这些事情都很容易理解。其原理仅仅(正如我们已经提示到的)存在于将不确定性机制视作好像并不是不确定的,即就好像不确定性机制只不过是变化的结果。其中,每个独自发生的变化都是可运算的。最瞩目的案例是随机混合案例中的一个。没有什么比倾斜盒子开始的运动中12个弹珠可能发生的相互碰撞的次数及由碰撞决定的运动轨迹更加难以不可预测与不确定了。然而,一旦儿童已经学会了排列运算,他就毫不犹豫地仅仅将混合视作包含了12个元素以所有方式进行排列行为的结果,就好像他可以自己排列出来似的。实际上,他确实可以在绘制运动轨迹时做到这点。但是,因为概率并不是运算体系,我们知道不可见排列依然是偶然的,即(a)不受系统次序的影响,凌乱地在各个方向上运动,尤其是(b)是不完整的,只能够获得某种可能性。但是,结果是可以比较的:系统性计算同时提供了所有可能性,概率只实现了某种可能性,但是却没有形成新的可能性,且在推理出来的可能性范围中依然是必要的,其唯一起源是无序且不完整的。同样,从装有几种颜色弹珠的袋子中拿取成对的弹珠(第五章),可以根据所有两两成对的组合来完成:运算预测出了所有可能性,其中一部分案例已经随机出现了,这就是可以观察到的案例,但是这些案例肯定也在初始的所有可能案例中。简言之,不是让概率保持其不可预测性这样难懂的特点,思维将其转化成不完整的、不受次序影响的运算体系的形式。因此,概率得以存在,但是已经倒向其获得可理解性的操作层面。以绝对的方式说,概率不再是非组合的了,它与一组运算一起被同化了,且根据概率以

① Jean Piaget and Bärbel Inhelder, *The Child's Conception of Space* (New York: Norton, 1967), chap. XII.

有限数值自我影响。因此,概率就可以完全媲美那些系统生成的运算了。

从这点开始,儿童发展了独特的可能性构成。关键案例依然是随机混合案例中的一个,因为混合是不可逆过程,而与此相反,通过类比关联起来的排列运算体系在一定程度上是完全可逆的,这样排列就形成了典型的数学分组。在这点上,第三阶段的儿童完美地表现出了有实质性意义的观察:真实的随机混合可以回到其出发点(年龄小的儿童称之为分离),但是要做到这点,我们需要做大量的实验,因为“*非常罕见*”,“*几乎不可能发生*”,等等。换言之,描述了所有可能性的样本空间的运算建构以相同方式使儿童想象出了肯定案例与所有可能案例总和的关系。

因此,可能性的判断只是比较概率、不可逆、非组合的结果,因为它不完整地实现了可能性、组合、可被部分同化的可逆运算。那么,可能性的判断就是概率和运算的某种综合——部分的,但只要有可能就被推进的综合。运算确定了所有可能案例,即使每个案例仍然因其独有的实现方式而不确定。可能性存在于通过与整体比较的单个案例之中。因此,整体是由部分决定的,赋予单个案例完成的分数系数。因此,比例与其实际定义一样,都是部分确定。

这些机制的解释界定了第三阶段的两个发展:引发大数字法则的整体建构,作为整体结果的单个案例的可能性。这就是概率性构成的两个相互关联的实验。

关于第一点,比较第三阶段与第二阶段的实验对象,就出现了迥异的反应:面对物理概念问题(随机混合,种子从漏斗中滚落到斜面上,指针旋转等),或随机抽签问题,第二阶段的儿童以普遍怀疑预测的态度开始(“*随机的*”,因此我们不能预测)。这是因为刚好与概率和运算之间的发现相悖。在第三阶段,儿童起初试图看到并建构整体分布(随机混合案例中所有的可能排列,种子案例中形成高斯曲线的钟形曲线分布,旋转的指针可能停留位置的不规则分布,随机抽签中数字的量化分布等)。

整体的建构或整体分布的发现在心理学上是真实的,而且是可能性的唯一基础。当第二阶段的实验对象做出了可能性的判断时,他们已经借助于整体分布的知觉预测(那时候的预测是根据此前经验做出的,而不是根据组合格式做出的)做出了这样的决定。这就是在第三阶段中于整体的关键建构中发现了平衡点的知觉,而且只有在第三阶段,推理机制才明朗起来。整体结构被延伸为某种可能性的判断,我们可以说概率性构成存在的标准就是理解大数字法则。第二阶段的实验对象一旦凭知觉预测出了可能性,他们就已经发现了我们所谓的小的大数字法则,但是还不能归纳出超过了20或30个要素的法则。相反,真正的大数字法则标志着概率性构成的平衡点。正如我们所知道的,这个法则只是意味着相关频度的极限等于可能性。当实验对象明白了大数字法则时,这就清楚地表明他已经很好地领会了可能性的特点及整体分布中可能的组合成分。例如,当劳(13;0)在旋转指针(第三章)时说通过重复实验“*就总是会更相等*”,显然这就表示他正在判断指针在每种颜色上的停留次数所呈现出来的相等分布。反之,如果每次独自出现的指针停留都是偶然的,那么整体部分自身就简化了。

通过与此分析的精确相关性，单个案例的可能性就具有了普遍意义，而第二阶段依然缺少这种普遍意义。实际上，直至现在，个别案例的预测只是基于此前有补偿性元素干预的抽签的反思。其中，补偿性元素被认为会形成多多少少有些规则的分布。但是，问题就是要协调这些连续知觉与著名的约瑟夫·贝特朗（Joseph Bertrand）原理，“概率既没有意识，也没有记忆”。概率概念一旦出现在儿童思维中，此原理就会被怀疑。然而，对于建构整体分布，单个案例获得了整体的部分的精确意义，不再被束缚于儿童所观察到的案例，但是与所有的可能案例都有关联。其中，可能案例被儿童逐渐视作大数字法则的结果。

此外，与此相伴的是在可能性易于成为这样的命题阶段，演绎推理正好因为那个原因而成为系统性的。因为真正的事实总是概率和以确定的运算形式表达出来的变化合成体，演绎推理就是什么限定了这两个范畴并根据其相关部分将这两个范畴结合起来。例如，在钟形曲线分布（第二章）中，儿童的归纳考虑到了从漏斗嘴中滚落下来的小球，但没有考虑到从最大频度点开始的统计学对称分布。然而，在磁铁案例（第三章）中，儿童的归纳聚焦于与偶然停留点分布的比较中对称因素的作用。

因此，我们看到了第三阶段中概率性构成包含了什么。这就是与可能相关的形式运算与概率自身的综合，儿童意识到了概率的非组合、不可逆特点，而组合运算的特点是组合的、可逆的，及可能性完全可推理出确定性的作用。这些可能性只有在大数字标记出来的极限上才能被意识到，而实际概率仍然是不同程度的不确定，每个个别案例只是确定性的一部分，不管其依然是完全偶然的（确定性被简化成设想出来的案例与所有可能案例的比较），还是部分偶然的（即由概率和运算变化的相互作用形成的归纳确定性）。

第五节　概率和可能性

概率和可能性概念起源的心理学研究带来了很多值得从广义的运算思维观点视角进行研究的课题。

推理一旦被习得，即就像在思维的平衡状态中所出现的推理那样，那么就总是可演绎的，而且推理依赖于逻辑-算术体系或包含了部分集合与分类的时-空运算体系。这就涉及，更准确的是借助于集合运算的对照，概率的概念在智慧层面上的应用。我们用概率这个词表示相对非组合的、不可逆过程。因此，相对于推理确定性，概率就是不确定，这种相对不确定可以发现于三种形式中。

1.从逻辑-算术运算观点的视角而言，当某种新运算干预到生成基本运算所依据的建构次序时，就出现了不充分的确定性。我们已经在具有逻辑性的案例中看到了这点。当新运算存在于从集合B中选择任意元素时，当形成B的基本运算是类别的相加

$A \cup A' = B$时，A与A'就借由减法得以发现，$B - A' = A$及$B - A = A'$（至少是三项的运算）。在这个案例中，以某些方式从集合B中选出来的元素x依然是不确定的，因为此元素可以在A中，也可以在A'中。著名的相同干预案例发现于对数的第七位小数中。例如，我们随机抽取给定的数字，可以发现10种可能性0，1，2，…，9，每个数值出现的频度近似等于1/10。然而，没有什么比特定对数的第七位小数更好确定的了。但是，仅从形成对数的运算的观点视角（算术与等比级数之间的一致性）而言，第七位小数显然是确定的。相反，另一方面，新运算相互作用，此新运算包括随机选取一个对数，每次都提取第七位小数位置上的数字，然后就会出现两种独立运算之间的相互干预（例如，刚才没有完成集合的合并或补充就从集合B中选取任意元素）。从这种新运算观点的视角而言，第七位小数位置上的数字是确定的。即，我们得到了组成了这些数字的数字不确定分布。因此，这些数字无疑就形成了概率效果。

通常，由于独立的逻辑-算术运算引发的概率，因此可简化为由直接或更准确地说是推理的不可组合性的概念来表达出来的逻辑不确定性。从这个观点的视角而言，归属于逻辑实体的每个品质都可以被视作未由其自身表现出来的偶然。例如，天鹅的概念意味着脊椎动物的品质、鸟的品质等，但并未注意到天鹅的偶然品质，因为还有黑天鹅。从运算观点的视角而言，我们甚至可以说，毫无疑问，某种关联的不可传递性特点（不同于传递性和多义传递性[①]允许的分裂）表达出了概率的一部分："A是B的朋友，且B是C的朋友，但是A并不是C的朋友"的事实表达了友谊形成中的偶然因素，而"A等于B，B等于C，那么A等于C"表达出了不同于概率的推理次序。

2.另一方面，从时-空或物理运算观点的视角而言，不充分确定性案例中有概率。在这点上，这不再是两种相关运算之间相互干预的问题了，而是两个独立因果事件之间的相互干预，然后我们就发现了由库诺特给出的概率定义。我们也必须注意到这个新案例恰好平行于此前的仅有一个差异的案例，在这个案例中，概率在此便不再可以简化为逻辑上的不牵扯或非组合性，但在下述意义上却是真正非因果性的：适用于事件A（例如，沿街走路的男人）的因果性并不一定包含原因事件与结果B（例如，风吹落瓦片）两者之间的相互干预，及相互排斥。

3.最后，同时出现的逻辑-算术和时-空上的双重不确定性引发的概率。根据普朗克（Planck）的说法，标志着相对于宏观物理学的微观物理学的极限的不确定性的临界值无疑就是第三类形式的特点。低于临界值，客体概念就失去了其意义，而在我们测量现象的范畴内，客体同时还是逻辑-算术运算的出发点（集合就是客体的总体）及时-空运算的到达点（与客体自身的组成有关）。我们可能只注意到了在逻辑-算术和时-空的双重不确定性案例中，概率不再被视作因独立的逻辑或因果事件的相互干预而引起，每种事件在各自方向上都可以很清楚地确定下来。反而，在这点上，是源于因物理活动的局

---

① 我们将多义传递性称为某种关联的多义传递性。例如，我哥哥的弟弟可能是我哥哥或我自己。

限性及与客体局限性交迭的逻辑-数学运算的局限性引发的更基本的不确定性。

但是,如果在这三种类型的案例中,概率可以被简化为不确定性,那么不确定性就是双重相对的了。首先,在不确定性永远不完整的意义上是相对的,因为分布的考察使得个体将每个事件划归为某种可能性的系数,即确定性的分数。此外,在第二个观点视角——思维达到仅与成熟运算体系相关的不确定性意义上,也是相对的。因此,我们永远不知道偶然事件本身就是不确定的,还是只是与所用到的运算相比才是不确定的,从心理学上讲,只有这种关系重要。对数的第七位小数的案例正是以这种方式相当明确地表现出了介入了一个特殊案例概率的相对性特点,尤其是因为这个小数位置是明确确定的。然而,那个时候的哲学家将不确定性的概念拓展至了绝对。例如,雷蒙(Reymond)提出所有可能性的判断等同于所有可能案例的可能性。可能性的相等性是与决定论[1](甚至是宏观决定性)相悖的真实偶然性。但是,我们在采用这些论据时遇到了一些困难,因为可能性的相等性是其总是相对于所倡议的运算的。另一方面,数学家不再根据相同的可能性概念来计算可能性,并直接开始根据分布的观察(或假设)来计算可能性。对于微观不确定性的临界值,我们自然试图也从现实的反决定论(趋于根据微观不确定性不包含任何潜在可能性来判断唯物论者自己的论述)的意义上来对此做出解释。从思维运算心理学观点的视角而言,同样正确的是:不确定性的阈值证明了我们的日常选择及宏观表征格式在超越某一行动范围时确保现象可解性方面存在的不足。因此,概率和微观物理不确定性确实告诉了我们有效活动的极限及活动局限性的知识效应。因此,要等待恰当的时机建构适用于新范围而非预测出我们知识教学的无限不足的新思维过程。

从心理学观点的视角而言,适用于概率的不确定性可以被简化为特定客体上的可能运算的相对独立性及我们在普遍客体上常见运算的极限值。相对独立性及这些变化的极限值比其自身所表现出来的真实意外性或非意外性更明确地说明了思维连续顺化的特点。因此,从物理概率的实验情形中,实验对象的心理特点使我们获得了认识论而非形而上学观点。[2]

另一方面,在相同的心理学视角下,认知过程中概率的介入呈现出与操作性活动的局限性有关的决定性重要性,因为概率总是部分与此活动有关。非组合的、不可逆的,概率形成了与分类关系点相反的点。然而,借助于此事实,概率定义了一类情形,在此情形中,因为加法组成的缺失,整体不再等于部分的总和,但却遵守其自己的平衡独特情况的法则。从客观观点的视角而言,混合以这种方式根据多种干预事实中的加法组成是非组合的。然而,儿童确实遵守基于平衡考虑的整体结构的法则,此案例中平等被儿童定位于最可能组合的方向。与整体等于部分总和的机械性组成的规则相反的是,

① Reymond, A. *Philosophie spiritualiste* I: 364-366.

② See Our *Introduction à l'épistémologie génétique*, chap. Ⅵ. (Paris: Presses Uniersitaire de France, 1950).

统计学平衡认为连续变化的部分是整体的结果,恰好是因为概率出现了。例如,封闭体系中热量的转移取决于整体热平衡。新物体的介入能够改变所有的其他部分,但是没有改变任何其他部分的热量依然等于此前的热量。从主观观点的视角而言,这同样正确,因为概率以与介入物质世界相同的方式介入心理过程。实际上,以相同方式,就像被应用于客体的不确定性运算表现出了我们考虑某种物理现实情形下的物理概率,也像从主观观点视角应用的不确定性运算(实验对象不能成功协调这些运算,因为他缺少充足的运算机制)表明了内部或心理概率。相比之下,更有必要考虑后面这种事实,因为发挥作用的机能更基础,从理性知识中迁移得更远。适用于心理现象的概率源于意识永远不可能将所有的数据整合进统一的范畴,除了精确整合进逻辑或推理范畴的事实。通过围绕由一时兴趣刺激形成的中心点的连续中心性,意识得以继续,但是在其应用上多少有些偶然。因此,在多少有些不确定的点上有数据的交叉。根据集合法则,沿着建构的可逆机制,正如我们在知觉机制中发现的,一旦可逆机制达到了其动态平衡状态,心智活动中就出现了不可逆、类似关联、运动习惯等这样运算的非组合机制干预。也是在这些机制中,整体不再是部分的总和,尤其是遵循格式塔规律而非分类规律的感知机制。就像我们试图通过分析一定数量的感知结构,尤其是源于韦伯(Weber)法则的错觉所表明的,恰恰是因为这些感知结构形成了部分概率,而且遵循基本统计规律,现在的感知机制形成了可被简化成加法组合及操作性知识的概率。

依然在知识的范围之内,不可逆概率与运算可逆机制的矛盾最终结束于概率自己转化成运算语言。这就是我们在研究概率性构成的起源、概率与组合运算的综合中已经注意到的。思维过程甚至更为普遍,而且与所有不可逆系统相关。因此,物理学中根本不可逆的热力学现象只能用相关的可逆机制来解释,而且这些热力学现象自身可以被转换为可逆的。例如,我们可以想象成这个过程是以无限速度发生的,而且形成了持续平衡状态。实际上,持续平衡状态是不可能的,但是却可以使我们以可逆语言描述出(自然是以有限速度发生的)不可逆的变化。类似的,在微观物理学上,尽管纯粹基本的不确定性可被认为相悖于确定性,状态的计算与变化起初受制于运算体系。这些体系将观察者行为的可逆性引入了被观察到的最不可逆客体的最中间状态,甚至是达到创造出了运算组成与实际组成之间相同共生关系的地步,就像在热力学中,是根据物理知识的基本原则上的新范畴而建构的。

然而,必须要恰当地理解我们这样所说的概率性构成决不能与广义上的可能性计算相混淆。实际上,我们仔细区分了可能性的数学或单纯运算理论及其独自形成了我们在此所谓的概率性构成的应用。

可能性的数学理论是基于公理结构的推理,就像每个单纯的理论那样,并因此形成排除了形式或假设-演绎运算的方法体系。例如,我们会定义$-x$与$+x$之间的不确定变量的可能结果,也会研究这个结果的不同组成。在可能性只是单纯的运算体系的程度上,可能性源于加法组合(参考,介绍了两个可能性相加的整体可能性的理论等),上述做出的关于包

含了概率的物理系统中整体与部分的关系的评论因此也就不再适用于可能性的数学理论。推理单纯性的类似物就是所建构出来的理论只涉及数学抽象表达出来的可能。

另一方面，应用于真实世界的可能性理论表现出了总是包含近似值范围的基本特点，即忽略那些太小的可能性。这就等于说从理论上可能的整体案例体系过渡到来自于完全加法组成的实际上能被认识到的案例体系，可能性本身的范围被限制了，因此要放弃加法整体的概念。例如，波莱尔（Borel, M. E.）指出，在人类规模上，可忽略的可能性是 10^{-6}，在地球层面上，可忽略的可能性是 10^{-15}，在宇宙层面上，可忽略的可能性是 10^{-50}。这就意味着如果事件可能发生的可能性小于 10^{-50}，我们就将其从现实的范畴中排除。[①]正是通过忽略这些极其不可能的事件，个体就从物理学意义上相信了随机混合的不可逆性，而在数学意义上，返回到出发点总是可能的。因此，从物理学观点的视角，熵数的增长（库诺特-克劳原理）就是必然不可逆演变的模型；而从数学上讲，热量从低温物体到高温物体的运动中，个体确实会获得可赋值的可能性。因此，仅从应用于现实世界的可能性的观点视角而言，我们可以对比概率性构成和操作性构成，并寻找前者在整体比加起来的部分更有特点的事实中的标准。因为只有最可能的组合被意识到了（排除了近似值范围以下的组合），真正相互作用的体系就是不可逆的了，即使组合运算允许我们对此做出分析并确定当前的可能性，而且也是可逆的。

这就给我们带来了单个事件可能性的值的问题，这个问题毫无疑问是应用可能性的中心理论。心理分析似乎能通过确定出最基本的可能性感知中简洁包含了什么来帮助我们解决这个问题。

某些关于可能性的公理或逻辑著作，如冯·米塞斯（von Mises）和赖欣巴哈（Reichenbach）的著作，试图表明所有的可能性必然与事件整体有关，因此，也一定与分布或起初产生的频度体系有关。现在，不仅这些概念使我们避免了可能性相等的伪问题，而且开始怀疑单个事件的可能性概念的价值。另一方面，波莱尔试图通过借助一定数量的案例来保留这个概念，在这些案例中，可能性的判断对他来说似乎与此前的统计无关。这方面的案例就是医生根据表现出罕见疾病的肺结核病人来判断可能的死亡率，类似这类“可简化为唯一案例的限度”，[②]或表现出一个普通行李箱重量的可能性判断，即判断出超过1公斤，少于50公斤。[③]

从心理学观点的视角而言，对于分布或频度的体系中，在每个可能性的判断中没有看直接或间接的相关性是极其不可能的。实际上，我们已经注意到了：可能性知觉对儿童来说不再是初级的了，而且只开始于发展了考虑到整体分布的那一瞬间。在此发展的第一阶段，也就是7岁或8岁之前，确实有一些判断与频度的考虑无

---

① M. Emile Borel, *Valeur pratique et philosophie des probabilities* (Paris: Gauthier Villars, 1939), pp. 6–7.

② 同上，p. 88.

③ 同上，p. 93.

关的单个案例。[①]但是,在这点上,我们不能说这就是他们对可能性的判断,因为这出现于任何概率概念之前,而且他们以随意、主观性判断未来事件的发生,而不是根据可能性的考虑来对此做出判断。概率概念一出现(第二阶段的开始),儿童就开始否认这些他早就给予虚幻值的单个预测的可能性。然后,他重获了信心,但是这次是有动机的:可能性的真正知觉开始了,但是恰好是使单个预测从属于整体频度体系的运算综合的结果。因此,分布体系的发展无疑就是可能性知觉的前期心理条件。

从这个观点的视角而言,如果我们再看看波莱尔提出的案例,这些案例显然同样吸引了与先前知识的整体无意识比较,及实验频度的间接分布表。然而,这些案例在数学发展中却是初步的。在罕见肺结核病案例中,医生什么都预测不出来。如果他宁愿做出可能性的判断,冒险诊断,那必定是通过与其他某些实验的类比,即使两者之间部分不同,即在考虑到更普遍案例的情况下合并特别案例。对于行李箱的重量,很难相信个体确定的 1 到 15 公斤重量范围的判断不需要借助于此前在这样情形中所做的实验。因此,分布表几乎确定是实验对象根据其实际习惯写出来的,即使分布表只包含了诸如经常、通常、很少、几乎或几乎永不等这样的量化。

然后,单个可能性的问题比这些允许我们想象的平庸反思更为复杂。实际上,有两种方法可以分析新的、奇特的案例。第一种方法是参考此前经历,及类似案例的直接或间接统计。第二种方法包括案例中蕴藏的要被评估关系的逻辑或数学建构。达摩斯(Darmois)[②]用这种方式按照三个步骤描述了第二种分析过程:(a)适用于被研究现象的格式化;(b)分析导致当前所有可能性建构的可能性;(c)考虑所有可能性的集合。这两种方法之间的真正区别在于:在第一种方法中,整个频度集合是提前给出的,而且是外延的;在第二种方法中,频度集合是根据新案例建构出来的,就好像是根据内涵来分析的。[③]但是,两种情形都提及了展示所有可能性是必要的,因为我们既不能图示化新现象,也不能建构我们不用根据此前给定的多少有些普遍的格式就能形成且自身包含了频度体系可能性的质性或量化表。

简而言之,孤立概率冲突和分布概念的首要性使人想起概念在内涵和外延上的逻辑冲突。现在,同样地,个体的定义特征之间的内涵关系总是与外延上的结合联系在一起,这允许我们将这个个体置于一个整体的分类体系中。因此,我们对表面上最孤立或最奇异事件所进行的概率判断,总是与我们成功地将这些事件与其他(类似或不同)事件进行比较的扩展类相关。因此,概率判断总是依赖于分布表。一言以蔽之,在内涵上,必然对应于外延上的始终或全部;可能的不同程度也同样对应于外延上频率的不同值。

---

① 除了考虑到补偿的前意识概念,实际上,前意识概念意味着实验对象确实有了某个频度概念,即使他的理解还是主观性的。

② Borel, M. E.著作的注释。

③ 外延(Extension)和内涵(Intension)是形式逻辑的术语。外延指的是一个术语包含的所有类别,内涵指的是术语本身的意思。——译者注

术 语 表

以下术语代表了皮亚杰著作中的关键概念或技术工作。此处给出简明定义和案例对初读皮亚杰作品的读者有一定的帮助。

中心性(Centration) 儿童前运算思维的特点,中心性使儿童关注他或她看到的一个因素,而排除了其他同样重要的因素。例如,当儿童看到从一个又矮又宽的容器中将固定容量的液体注入进又高又细的容器中时,可能会认为液体量已经增加了,因为他或她只关注新容器的高度,而忽略了宽度。

去中心性(Decentration) 表示同时考虑情境中几个方面的能力,即避免中心性的能力。

集合(Group) 这是一个数学概念。集合是包含了元素和运算的代数结构。关于元素,运算是封闭的,且是联合的;集合中有单位元素,每个元素又都有反元素。一个简单的案例就是整数和加法集合。加法在整数集合中是封闭的,因为任意两个整数相加就是另一个整数。加法是结合的,因为对于所有整数$(a+b)+c=a+(b+c)$。零是单位元素,因为对于所有整数a+0=a。每个整数都有个反数(称为负数),这样对于所有反数$a+(-a)=0$。对于皮亚杰而言,此术语的重要性是他用数学模型描述了数学结构,而集合是最重要的数学结构之一。

分类(Grouping) 这是一个混合数学模型或结构,由皮亚杰从著名的集合和点阵这两个数学概念中首次演化而来。在皮亚杰的理论中,他把分类用作认知结构的基本模型。因此,分类比集合更复杂,因为此概念融合了点阵概念和集合概念(点阵[①]通常被定义为部分有序集合L,在此集合中,每对元素都有最大下限和最小上限。不幸的是,除了对那些学习过高等数学的人而言,此定义的价值非常有限,因为点阵是一个抽象的数学结构,该定义本身包含了几个术语。或许此概念有助于说明点阵的例子就是某些全集的所有子集的集合,而部分顺序就是子集的概念;任意两个子集A和B的最大下限是$A\cap B$,最小上限就是$A\cup B$。)

运算(Operation) 这可能是皮亚杰著作中最基本的概念,他将此概念进一步区分为形式运算和具体运算。首先,皮亚杰用广义运算表达的是被紧密组成强大结构的认知行为。例如,将物体根据共同特点(颜色、大小、形状等等)分成几个子集就是一种运

---

① See Simmons, George F., *Introduction to Topology and Modern Analysis* (New York: McGraw-hill, 1963).

算。集合的合并或相交是其他类型的运算,这都是普通算术的常见运算。弗拉维尔说,"作为相关行为有条理性网络完整部分的任何表征行为都是运算。"①

具体运算就是由儿童表现出来的马上出现且可观察到的运算。具体运算确实涉及具体或实际。

另一方面,形式运算指的是可能或潜能,而不是真实或实际。形式运算涉及实际上是命题性的假设-演绎思维。形式运算是运算之上的运算,或正如皮亚杰有时候说的,"对第二能力的运算。"

可逆(Reversible)这个术语指的是运算的属性。可逆运算(在集合的数学意义上)有反运算。例如,用5乘以一个数就是可逆的,因为结果可以乘以5的乘法反数1/5来撤销。可逆运算的另一案例就是把一个泥球切成几部分。这是可逆的,因为这几个部分可以一起缠起来恢复成最初的那个球。另一方面,有些行为是不可逆的,例如燃烧一张纸或随机撒一把草籽。

① John H. Flavell. *The Development Psychology of Jean Piaget* (*Princeton*, N. J. : Van Nostrand, 1963), p. 166.

可能性与必然性

〔瑞士〕让·皮亚杰 著
熊哲宏 主译
李其维 审校

可能性与必然性

法文版 *Le Possible et le Nécessair*(2Vols), Presses Universitaires de France, 1981, 1983.

英文版 *Possibility and Necessity*, Minneapolis: University of Minnesota Press, 1987.

作　者 Jean Piaget

熊哲宏等　译自英文

李其维　审校

本书中文版曾作为李其维策划的"皮亚杰发生认识论精华译丛"之一,由华东师范大学出版社出版(2005年),现按原中文版收录于本文集,有改动。

谨以本译丛献已故

我国安亚杰研究的先驱者、

我的恩师左任侠教授

——李其维

内容提要

为了补充平衡化机制的不足，皮亚杰晚年致力于可能性与必然性的研究。他认为关于可能性和必然性的研究是反对经验论和预成论的最佳论据。《可能性与必然性》把发生认识论的理论假设、理论建构与精细的实验研究有机地融为一体，本书涉及的主要问题可归纳为六个：1.可能性概念研究的方法学问题。方法学的第一个问题是关于如何确立可能性发展的机制问题。根据皮亚杰的观点，"认知的可能性"在本质上意味着发明和创造（这就是为什么可能性的研究对于建构主义认识论来说具有首要的重要性）。认知的发展也可以说是"向新的可能性开放"。2.可能性概念发展的阶段。在皮亚杰看来，在儿童那里，可能性是随着年龄的增长而不断演化或发展的。这种发展可以从功能和结构两个角度或方面来看：按其功能可以区分为四种可能：假设性可能、可实现的可能、可演绎的可能以及公设性的（the postulated）可能。按其结构，则区分为四个阶段。3.必然性概念建构的特点。根据皮亚杰的实验研究和理论建构，儿童必然性概念的建构主要有三个特点：（1）必然性附属于由主体所实现的各种演绎组合，它不是客体所固有的可观察的事实；（2）它不是一种孤立的和确定的状态，而是一种必然化过程的结果；（3）它直接与产生分化的可能性之构成有关，而必然性与整合有关。换言之，必然性与可能性的构成是平行的。4.必然性概念发展的阶段；皮亚杰也是从机能的观点和结构的观点两方面划分了必然性发展的三个阶段。5.运算发展与可能性、必然性发展的关系。这实际上是皮亚杰一再表明的内化发展与外化发展的关系。在可能性与必然性的发展之间，不仅存在着密切的平行性，而且它们二者还与运算结构的发展有着确定的关系。6.可能性、必然性与现实性三者之间的关系。为了掌握形式思维和学会推理，青少年应该能区分可能性、必然性和实在性这三个方面。但是，仅仅有这种区分是不够的，主体还必须正确地重新组织这种推理的构成部分：类、关系、肯定、否定、合取、析取等等。

这本书体现了皮亚杰思想中最核心的部分：探寻儿童思维的心理发生和科学概念的历史发展之间的连续性。继皮亚杰在他之前著作的发展阶段中提出的结构主义方法之后，这本书所提出的新的转换性的深入和扩展的方法开阔了我们的视野。

朱莉琪改写自熊哲宏和李其维为本书所撰写的"译校者前言"

目　录

总　　序*

Jachque Von è che①

能够看到这套丛书中文版的问世，实为一大幸事并因此感到十分骄傲（这不仅仅是对于我而言，我想对于全世界的读者来说亦是如此）。这套书的出版应归功于华东师范大学李其维教授的辛勤劳作、不懈努力以及他的非凡才智，当然同时也离不开华东师范大学出版社的鼎力支持。在此，我谨向李其维教授以及参与此丛书编译工作的所有人员表示衷心的感谢！

这套丛书所涉及的是皮亚杰思想中最核心的部分：探寻儿童思维的心理发生和科学概念的历史发展之间的连续性。但这并非其新颖之处。真正新颖之处在于皮亚杰所信奉的观点出现了新的转折。继皮亚杰在之前的发展阶段中提出的结构主义方法之后，这套丛书所提出的新的转换性的深入和扩展（的方法）开拓了我们的视野。

随着时间的推移，皮亚杰自身理性的发展经历了多次变化，在此我们有必要对其进行一番探讨。

当11岁的皮亚杰发表他的第一篇论文的时候，年轻的他本质上还是一名经验论者，他认为人们可以在“自然界这本神奇的大书”中进行直接的观察。他所有关于软体动物分类学的论文都是基于这样一个观点：人们通过观察对生物进行分类得到的是并不令人满意的结果，就像子午线对于地理学家来说可以被改变一样，对于生物的分类，如果情况允许的话，理想的分类界限也可以被改变。

皮亚杰从经验论者转变为进化论者，但不是转变为拉马克或达尔文式的进化论者，这在很大程度上是由于受到了H.柏格森（H.Bergson）的影响。柏格森是一名笃信生命冲动（柏格森著名的《生命冲动》）的哲学进化论者，他认为这种生命冲动是那些组成各种生命的最重要的、完美的组织原则：生物的、个体（心理）的、社会的以及道德的组织原则。于是，皮亚杰根据世间万物所对应的各种各样的需求将哲学改造得更加接近于实用主义。

这种新的立场致使皮亚杰提出了他的第一个平衡化理论。根据这一理论，任何一种进化系统都趋于某种平衡。这种平衡是同一结构中不同部分之间的平衡，或是整体和部分之间的平衡。但是在环境的诱因下，这种平衡会趋于一种不平衡，这种不平衡可

---

* 此为李其维策划“皮亚杰发生认识论精华译丛”（华东师范大学出版社，2005）之总序。

① 雅克·弗内歇（Jachque　Vonèche，1939－）比利时学者，现为瑞士日内瓦大学教授，日内瓦皮亚杰文献档案馆馆长及基金会主任（1993年至今），皮亚杰生前助手与合作者，日内瓦学派（发生认识论）的代表人物之一。

能是破坏性的，也可能成为建构新的平衡过程中的一种动力。

因此，为了证明从超验到内在的过程，皮亚杰从生物学转到了心理学，更确切地说是转到了发展心理学。在关于物理因果关系的研究中，皮亚杰发现：儿童由早期服从权威他人(上帝、成人、政府、团体)所宣称的道德规则发展为拥有自发的机制，以及内在的物理规则。与此同时，儿童的道德判断也从对超验规则的他律顺从转变为对互惠和互敬的同伴间社会契约的顺从。

总之，心理的发展就是一个由独裁向民主、由巫术向科学、由教条主义向自由主义、由唯我论向社会化转变的过程，更客观地说应该是一个由主观主义向客观主义转变的过程。这样，平衡的重心就被转移到了不断发展的内部心理结构和宇宙世界的外部结构之间。从这一点来说，心理的个体和心理的环境之间存在着对立。

随着诸如客体永久性、守恒等这些恒定性的发现，皮亚杰自身的发展也进入了一个新的阶段：心理个体让道给那些被称之为心理运算的分子结构。至此，皮亚杰由实用的功能主义者变成了结构主义者。

皮亚杰发明的“群集”结构使得他从功能主义向结构主义的转变成为可能。这种结构是一种代数结构，这表明了皮亚杰对普通代数的偏爱，同时也为之后他的理论中出现的布尔巴基结构理论作好了准备。

正如S.巴贝尔(S. Papert)为《态射与范畴》一书所写的序中所言，“群集”的代数结构和前运算阶段儿童的思维方式十分吻合，布尔巴基的“母结构”与具体运算吻合得最好，而范畴则适合于形式运算。巴蓓尔提出了这样一个问题：这些就能说明皮亚杰是个喜欢赶数学时髦的人吗？

对于这一问题的回答是否定的，原因有二：其一，当皮亚杰使用布尔巴基结构的时候，这些结构还没在数学家中间流行起来。那时候，在数学中占主导地位的是原子论理论，比如B.罗素(B.Russell)所认为的数是“类的类”，以及皮亚诺(Peano)以少量无关联的公理来定义的数。而布尔巴基的方法与上述方法截然不同：他通过列举和观察所有可能的数学行为集合，对数的真实结构进行描述；这更像是心理学的方法而不是原子论的方法，因为它确实符合儿童发展过程中能被观察到的情形。因此，不能说皮亚杰是一个追赶数学时髦的人，因为他并没有追随当时数学的主流。其二，当时，布尔巴基的结构主义和皮亚杰所提倡的任何关于“发生”的假设都是截然对立的。皮亚杰假设，儿童知识的增长与科学知识的增长遵循相同的机制，总的来说，这种假设在当时的数学家和科学家中已经不流行了。

从这些回顾中我们可以得出这样的结论：皮亚杰修改思维的模式，使之与他的众多合作者收集的资料相吻合，这些资料表明儿童思维的发展和科学的发展之间存在着类似的发展过程。当社会科学领域开始盛行以结构主义作为解释模式的时候，皮亚杰放弃了结构主义，这正是皮亚杰作为一名思想家的高明之处。自从他成为一名心理学家之后，他总是走在时尚的前沿，总是在引领潮流。20世纪初期，当人们仍以儿童在语言

习得期所说出的单词数量来衡量儿童言语发展的时候，皮亚杰就已经开始从交流的角度来研究语言了，而且他是最早使用此法的科学家之一。不仅如此，他还引领了这一领域的变革。皮亚杰是一位具有创新意识，并且终身都在创造新范式的思想家。

现在翻译出版的这一套中文版丛书代表了皮亚杰最后一个阶段的创造，一方面，他所提出的态射和范畴，为他的心理发生学资料的形式化处理提供了逻辑-数学模型。另一方面，一种意义逻辑在A.R.安德森（A.R.Anderson）和N.D.贝尔纳普（N.D.Belnap）相干逻辑的基础上得以发展并在某种意义上超越了它们。在这套丛书中皮亚杰又谈到了他所喜欢的主题：科学概念的历史发生和心理发生之间的关系。简言之，对这个问题的讨论围绕着这样一个主题：在发展系统中什么发生了变化，什么保持不变，两个事物之间什么是相同的，什么是不同的，而且（更重要的是）当两个事物被放到一块的时候，它们之间发生了什么，它们是否产生了变化，如果产生了变化，是通过何种方式变化的。对于以上的变化来说，最重要的是一种辩证的变化。就像法国数学家亨利·庞加莱（Henri Poincare）所说的那样，如果世上的所有事物都在一夜之间发生了变化，那么第二天早上谁会发现这些变化呢？至少得有一个东西没有变化，才能觉察所发生的变化。就像断言需要反驳，肯定需要否定，变革需要守恒一样，变化也需要稳定性。对于中国人来说，你们比西方人更容易理解这种辩证的对立，在这一点上我就毋庸多言了。这正是皮亚杰整个解释系统的精髓之所在：从平衡理论开始，到随后通过同化和顺化这两个对立的两极而实现的适应，再到后来的由生命本身到知识的延续，这种延续是通过不同的方式来实现的。

但是这套丛书又在皮亚杰原有研究的基础之上加进了一些新的、不同于以往的东西。若对其先前的研究进行反思，那么就可见此处介绍的与之前的研究中提到的有着本质的不同。从某种程度上说它是一种从具体内容到形式的转变。也就是说，它所关注的不再是生命和知识以及科学史和心理发展之间的共同机制，而是力图揭示皮亚杰早期所提出的所有结构和过程是包含于一个简单的同构性的形式结构之中，并且，它证明了皮亚杰的全部研究和平衡化的第二个原则是相吻合的：在事物之内，在事物之间，超越事物之上，这一点在我即将在加拿大出版的一本书的一个章节中已有论述。

这一套最新的丛书实际上是真正跨学科性的、超解释性的，下面我就要对此进行说明。

我们从这套书中编写时间最早的一本书开始，这本有关“矛盾”的书写于1970至1971年。正如让-雅克·杜克莱（J-J.Ducret）在该书的序言中提到的那样，皮亚杰当时的研究目的在于找出心理发展的一般机制，而不再是发展的结构。但是皮亚杰关于矛盾的立场既不属于黑格尔学派，也不同于其他的哲学流派。对于皮亚杰来说，矛盾是肯定性和否定性之间的一种不完全的补偿，换言之，它是内涵（把某一个给定的集合a归于一个给定的类A）和外延（把一个非a的属性归于类A′）之间的一种不完全的协调，因此有些元素最终既被赋予了a的属性又被赋予了非a的属性，就比如对于前守恒阶段的儿童

来说,在同一时刻液体既具有相同的质量又具有不同的质量("可以喝的水多或少")。

对矛盾的超越由两种互补的过程组成:拓展的参照系统和概念的相对化。在守恒任务中,同时考虑两个不同的维度,并能意识到"多"和"少"这两个词语是相对的。这两种过程都受到"平衡化"这一共同机制的调节。当肯定性和否定性之间出现不平衡(用皮亚杰的术语来说就是去平衡)的时候,矛盾就出现了。一旦儿童明白了任何一种肯定都能被一种否定所补偿,他们就能克服矛盾。这就是心理运算中最重要的可逆性原则。

皮亚杰进一步区分了三种类型的矛盾:(1)完全只关注肯定和对否定的全盘忽视;(2)对肯定和否定进行协调的最初尝试;(3)在整个可逆系统中超越矛盾,据此,矛盾被视为是观察或推理过程中的暂时性错误,这种矛盾可以被肯定和否定之间更高的平衡的必然重构所抵消。在思维和科学的过程中都会出现这一过程。

《态射与范畴》这本书是在皮亚杰去世之后才出版的,所以皮亚杰没有对它进行最后的修改。因此,这本书有些内容不是很清楚。这本书主要阐述了有关生物和智慧之形式的一般理论,并指出这种理论是建立在态射和范畴这两种互相协调的数学工具的基础之上的。态射是建立在两个集合之间关系系统之上的一种结构,这两个集合就像数学的群集一样,都有一个或是几个共同的补偿规则。

范畴是拓扑代数的一部分。它们由两个类组成:一类是对象,另一类是态射。态射满足这样的规则,对于给定的三个对象A,B,C和两个态射f_{AB}(从A到B)、f_{BC}(从B到C),有$f_{BC}\cdot f_{AB}$就是一个态射f_{AC}(从A到C)。态射遵循结合律,且有单位元。

函子把范畴之间的关系联结起来。一个函子可以将一个范畴中的对象与另一范畴中的对象,而且只能是唯一的一个对象联系起来,在态射之间也是这样。简言之,就是通过比较两个对象,它们的关系发生了转换。这种转换有三种类型:内态射、间态射以及超态射的转换。内态射转换是对状态或行为进行经验比较而产生的结果,不包括任何的代数运算成分。间态射的转换是以某种组合的开始为其特征的,如减法(逻辑可逆性的一种形式)。超态射转换是作用于每一态射从而生成每一个态射的范畴(参见前面的数学介绍)而实现的。

因此,除了本质上为超态射的运算逻辑之外,皮亚杰通过代数拓扑而不是布尔巴基的母结构得到了另一用于解释数学群集的态射和范畴的平行系统。那么,这又有什么不同,又有哪些进步的地方呢?它们都是可使运算性转换的群结构具有建构性的好范畴。那么具有建构性又体现在哪些方面呢?为什么它比运算性变换更具有建构性呢?当人们使用布尔巴基母结构模型的时候,低层次的结构和高层次结构之间的转换十分彻底,以至于最初的结构完全融入了最终的结构。这正是皮亚杰在那本关于抽象的著作里所要解决的一个问题,在此我很冒昧地向读者们推荐这本书。皮亚杰在这本书中指出反省抽象(或是建构性的)抽象反映了一个很重要的问题,因为"它是从低层次的操作或运算的系统中推导出来的,通过对行为或操作的反省,从而保证了其在高水平上的特征,因为只有通过在新水平上的建构才能够弄清之前的建构过程。"(E.E.G. XⅣ p.203)。因此

建构性抽象中的两个方面和“反省”一词的两种意义是相联系的，它意指反省就像镜子一样，反射什么东西（皮亚杰称之为“物理意义”上的反射）也就是（对什么东西的）思考。某种程度上来说，反省抽象就是将较低水平上的事物投射到较高的水平上去，这并不受水平之迁移的影响。但是如果从思考的形式这一层面来说的话，它会因水平的迁移而彻底发生变化。事实上，新的运算结构比前面的结构更为有力。而且，能同时对这两个方面做出解释的数学模型也只有范畴理论，因为这一理论在最抽象的水平上使用了态射和对象的二分法。

皮亚杰通过态射和范畴解决了长期以来一直困扰着他的一个问题：视为生物适应之两个阶段的生命和智慧之间的延续性问题与日常知识和科学知识之间的延续性问题。

当皮亚杰通过范畴理论为他的建构主义建立起一个可靠的数理逻辑基础之后，为了确立结构主义的建构本质，他就得解决来自另一方面的问题，即必须对建构主义的建构本质进行明确的说明。就此而言，皮亚杰还必须对这一问题进行探讨：态射和范畴是不是或为天生或为后天习得，而不是通过建构而得到的？因此，皮亚杰就开始对现实性、可能性和必然性这三个概念进行研究，其中现实性只是某些可能的转换之有效的现实化或实例化。

而且在《态射与范畴》中，皮亚杰研究的着眼点不再是阶段和结构，而是对过程、程序和机制进行了探讨。此时，程序和机制被设想为有助于解决现实性、可能性和必然性之间的关系的争论。总的来说，知识的非遗传理论（后成理论）以可能性来解释了现实。它们用“本质的直觉”来解释实际的知识，也就是说，一般性、形式或范畴本身就包含着所有已知的可能性。因此发生认识论者的主要任务就是要阐明：一般概念的系统以及理解的形式和范畴，是由个体的行为建构而成的，而不是从外部世界的永久性中得到的。这种观点和先验论相抗衡。另一方面，还需要阐述和证明“普遍性是由经验所致”，我们可以以经验论的形式对其加以理解，其中一般性的范畴是通过日常经验获得的。为了证明经验论的错误，必须同时从两方面进行论述：（1）范畴是个体的活动的结果，而不是从现实的内部结构中得到的（这些范畴是个体赋予现实的）；（2）证明这种赋予经历了发展的各个阶段。为什么呢？因为如果范畴仅仅是学习的结果，那么现实的内容就可以从环境中随机的、偶然的遭遇中任意地获得，而不会从一个由简单到复杂的层级清晰的过程中分阶段地获得。因此，皮亚杰理论中的一般系统的阶段功能，就是为了说明知识是建构而来的，这本书对这一点的说明尤为明确。只有对于那些机敏的个体而言，从简单到复杂的变化才是有意义的，因为事物的难易总是相对于主体和主体世界而言的。

皮亚杰在之前的一本关于“可能性”的著作《儿童概率概念的起源》（皮亚杰、英海尔德，1951）中提到：从婴儿的唯我论开始到儿童的自我中心再到儿童中期的朴素现实主义，其间需要很长的一段时间（对于日内瓦的儿童来说大约是12年）才能发现现实性和

可能性之间的关系。正如数学中概率计算一样,偶然性尤其适合理解现实,即有利情形要优于其他可能情况而发生。这是从逻辑运算的角度来说的:归纳、结合性思考……它们只有在形式运算阶段才能得到充分的发展。

新的研究着眼于探讨:对可能性的理解是如何随着年龄的发展而发展,它又是如何与运算结构相联系的。有两种可能的情况:因为数理逻辑结构而产生了对可能性的理解,或者是可能性的发展为心理运算的发展做好了准备。本书论证了后者是正确的。这实际上十分符合逻辑,因为儿童为了实现一个给定的目标而不断地进行尝试,这一过程(在他们心中)调动起了一系列被认为是能够达到目标(或目的)的行动和客体对象。只有当儿童在关于关系的时间系统中对所有的可能性进行组织的时候,相应的数理逻辑结构才会产生。

这些因素使得皮亚杰提出了一种新的格式分类,让-雅克·杜克莱在这本书的《中译本前言》中对此进行了介绍。

第二部分紧接着第一部分的结尾展开,皮亚杰在第一部分的结尾中提出,可能性不能产生于逻辑运算,因为逻辑运算植根于必然性。必然性的发展经历了三个阶段:(1)前必然性或伪必然性,它存在于这样的事实中:儿童意识到仅有一种可能性是有效的;(2)共必然性指的是,认为某些必然性能够通过一些有限的方式引起另外一些必然性;(3)最后一个阶段是无条件的共必然性。第一个阶段相当于将现实同可能性等同起来(现实就是唯一的可能,因此,也就是唯一的必然)。第二个阶段以现实性、可能性和必然性之间的区别为特征,但是这种区别仅仅局限于:现实只是可能性的一种,只有当其他的可能性被排除的时候,它才可能成为必然性,但是由于儿童无法考察所有的可能性,因此它只能是一种有限的必然性形式。最后一个阶段通过对所有可能性(现实的和不现实的)的思考,包括某些可能性会将其否定性排除的原则的思考,满足了实现无条件共必然性的条件。这里,我们可回过头来再看看之前关于矛盾的那本书中提到的关于肯定和否定之间的平衡化理论。

总而言之,我们认为必然性并不是像经验论者所认为的那样,是从现实中抽取出来的,而是产生于个体对可能性、可能性之间的关系及其必然性的建构。也就是说,它同时也排除唯心主义,因为作为一种生物,个体本身就是现实的一部分。从下面这句话我们可以再次看到,皮亚杰喜欢通过一种怎样的方式将生物体同知识联系起来:"现实只有在这样的过程中才能学会认识自身,即产生生命体,并且由此也产生了主体本身,这就又使我们回到了不可避免的循环(螺旋)……"这是关于知识和生物的最基本的循环。对它们而言,其中任何一方的深化就必然会引起另一方的深化。从知识这一方面来说,客体变得更容易被理解,这样个体就能够掌握他自己的心理结构,这些心理结构反过来又被其所遭遇的各种客体所完善。从生物体这方面来说,它们的器官变得更适于生存,甚至于为了适于生存而产生新的器官,这些器官通过前馈和反馈的反作用,在一种不断循环中创造出许多新的有机的可能性。

皮亚杰晚年在探索新的解释模型过程中，再一次修改了他的运算逻辑，他在同格里兹（J.B.Grize）从1949年到1972年的合作中曾经对其进行过一次修改。每一次的修改都旨在提高实际的推理或思维模型同逻辑模型之间的吻合程度。最初由安德森和贝尔纳普提出，现在被加西亚（R.Garcia）所推崇的衍推逻辑，主要是为了克服命题逻辑中的自相矛盾之处。这些矛盾是源于这样一个逻辑真值表。根据命题逻辑的真值表，若蕴涵p⊃q为真，即使p为假，下列的条件陈述亦为真："如果月亮是方形的，那么中国在亚洲。"人们马上就会意识到其实这两个命题之间根本没有任何关系。因此皮亚杰引入了意义蕴涵的概念，它指的是当且仅当"关于q的一个含义s包含于p的意义之中，并且这一普通含义s是可以传递的"，则p⊃q（《走向一种意义的逻辑》，法文版第12页）。皮亚杰对三个新的发展水平之间的逻辑一致性进行如下解释：内运算阶段（以前称作感知运算阶段）的前运算不能在即时动作之外的结构中加以结合；在中间运算阶段（以前称为具体运算阶段）与超运算阶段（以前称为形式运算阶段）中，儿童可以在运算上组合运算，而不再是在运算中进行运算（就像在具体运算阶段或是中间运算阶段）。

在这样的模型中，我们可以在三个不同的逻辑水平上发现可逆性。在内运算阶段，婴儿不断地将一个容器装满，又倒空，通过动作他明白了装入的动作倒过来就是倒出，正如守恒阶段的儿童能够通过所有可能的可逆性形式来解释守恒性：（1）没有增加或减少任何东西；（2）永远可以将动作颠倒过来；（3）不同维度之间的补偿或平衡状态，就像青少年具有的INRC转换群以及16种二元命题逻辑的组合的掌握一样。正因如此，所以皮亚杰认为16种二元命题组合在人类婴儿的动作中就已经存在了。

再者，正如《态射与范畴》中所说的那样，依它们自身而形成的循环是封闭的：因为每一个元素都有意义，所以每一个元素都暗含其他的元素，这一现象体现在人类身上就表现为一些事物引起另外一些事物，如客体、行动或思维等。

非常遗憾的是皮亚杰未完成这本著作就与世长辞了。否则的话，这本书就会像加西亚作序的《心理发生与科学史》一样非同一般，而我做这些介绍也就显得多此一举了。

我们要明白和记住的是，现有的这套丛书以及其他的一些著作：《意义的获得》《理解的获得》《反省抽象研究》《概括化研究》《关于"对应"的研究》，它们代表了皮亚杰研究上新的转折点，而且是一个具有建设性意义的转折点。因为皮亚杰从20世纪冰冷、教条的结构主义（对于结构主义的创立和发展他皆有贡献）转向21世纪新的、一般意义价值的信仰，并且通过对现实进行不断地比较和转换，从人类的行为中寻求这一存在的意义。从这个意义上说，皮亚杰是唯一实现西方哲学史中这一梦想的人。亚里士多德曾经说过："谁能掌握隐喻，谁就是天才。"隐喻就是通过比较而实现的精确的转换，它使得现实的意义变得更加丰富多彩。皮亚杰根本的隐喻就是"活动"。

我们十分感谢华东师范大学的李其维教授将这些知识精粹介绍给中国读者。这真不愧为一项伟大的成就。

文献总汇

Beth, E.W. & Piaget: Epistémologie *mathématique et psychologie*. E. E. G.XIV Paris: P. U. F., 1961.

Piaget, J. *Essai de logique opératoire*. Paris: Dunod, 1972. Edited by J. B. Grize.

Piaget, J. & B. Inhelder. *La Genèse de l'idee de hazard chez l'en fant*. Paris: P. U. F., 1951.

杜敏　译　吴国宏　校

中译本前言

Jean-Jacque Ducret*

如同关于意识，关于反省抽象，关于建构概括化，或关于矛盾和关于意义的辩证法的研究，关于可能性和必然性的研究也属于皮亚杰研究事业的最后阶段。在这个阶段中，皮亚杰在考察了智慧结构和认知建构的发生后，致力于研究认知建构的机制。这项新研究的两个主要目的显然在于以一种新的方式来解释得自以前研究的认知建构主义，以及理解人类智慧何以能"从最少的东西中获取最多的东西"，即从相对低级的同化和改变现实事物的认知形式过渡到相对高级的形式。

当时，皮亚杰的关注点在于进一步理解智慧的建构过程的本质，那么他最终为什么要提出可能性和必然性的双重发展问题？看来，问题的出发点必然能在天赋观念论的新形式中被找到。在天赋观念论看来，人类智慧所能产生的知识整体以某种方式整个地被包含在这种智慧的最初潜能中。面对这个论点，皮亚杰的回答是双重的：一方面，凭借心理发生的研究证明，可能性整体不是最初就有的，智慧的发展表现为新的可能性的产生；另一方面，证明对新的可能性的这种开放是解释包含以前的准备性结构在内的智慧新结构的关键过程之一，如果这种开放过程通过趋向于在一个可控制的稳定整体中整合这些新的可能性的补充过程而得到平衡。

在为了更好地理解建构机制——如果不是说创造机制——而进行的最后阶段的所有研究中，这项研究也许是最能揭示作者的多产的指标之一。皮亚杰并没有根据经典心理学和发生认识论的重要研究（运算结构及其建构阶段的发现），而是修改和充实他的概念和解释框架，甚至取消直到那时为止赋予认知发展的最后阶段和认知主体的相对特权，以便把一个更重要的位置给予心理主体因其格式的创造和适应活动而带来的更混杂的创造方法。[①]认知主体的"标志"甚至能在构成"必然化"过程的特征，与向新的可能性开放的分化运动互补的整合倾向中被看到。

除了这项研究，皮亚杰并不是第一次在他的著作中探讨可能性和必然性，以及实在

---

* 让-雅克·杜克莱（Jean-Jacque Ducret）博士为皮亚杰生前的助手，参与皮亚杰的多项实验研究，发表和出版多篇（部）有关皮亚杰发生认识论的著作；并以"作为科学家和哲学家的皮亚杰"的论文获日内瓦大学博士学位，导师为弗内歇（J.Vonèche）教授。现任瑞士联邦日内瓦州教育部教育研究中心高级研究员。

① 朝着心理主体的创造活动的这种部分转移，部分地是因为皮亚杰的最亲密的合作者，B.英海尔德在其身边的出现。在塞莱里叶和年轻助手的帮助下，英海尔德所进行的关于解决问题的研究正是关于儿童得以表达和达到他们所确定的目标的动作和思维过程。

性。但是,他在本书中探讨的方式是出乎意料的。为了更好地理解本书,我们应简要地回顾皮亚杰关于这个主题的研究的先前阶段,我们首先考察这三个概念——实在性、可能性和必然性——在法国哲学家莱昂·布伦施维奇,作为皮亚杰认识论的来源的二位或三位学者之一的著作中所占据的位置。

在1897年发表的一篇论文中,布伦茨威格讨论可能性、实在性和必然性,致力于确定智慧活动的本质,他把智慧活动等同于判断活动,更特殊地说,等同于人类思维得以证实存在的理论判断活动。在知觉判断中,在数学判断中,以及在物理判断中,他分析了系词"是"的模态,他首先证明,由这种判断所证实的现实事物既缺乏确定性(在被证实的东西方面),也缺乏理解性。然后,他考察与数学判断的存在联系在一起的必然性。他证明,尽管数学判断有其内在性,尽管数学判断的内容有相对完全的理智可理解性,但数学判断不能满足理论判断活动的最初目的。最后,他考察物理(科学)判断,他在物理判断中发现,如果物理判断同时具有它所依据的数学判断的可理解性和知觉判断的实在性,那么由数学判断所证实的存在就没有思维自发地追求的确定性。因此,对人类智慧而言,最令人满意的实在判断的模态不是别的,就是单纯的可能性。

布伦茨威格的论点广泛地得到20世纪科学发展的证实,这显然能使年轻的皮亚杰把握必然性、可能性和实在性的模态对认识论反思来说的重要性。无论如何,在1922年,即在巴黎听布伦茨威格课程之后的一年或两年,也就是在发表批判其导师的著作和明确地创立发生认识论科学的一篇重要论文[①]的前两年,他撰写了一篇发生心理学的文章[②],在这篇文章中,他明确地讨论现实事物的三个方面:形式必然性方面、纯粹可能性方面,以及个体为把握形式逻辑推理所必需的实在性方面。只有依靠能区分现实事物的三个方面,即实在性、可能性和必然性的反省活动,儿童才能依据推理前提的唯一意义和思维所提供的真假值来解决逻辑推理的问题,从中得出在逻辑上与前提有联系的其他命题,这些命题的存在具有一种必然性、实在性和可能性,或不可能性的价值,而不可能性取决于主体依据的在前提中设定的内容的模态。正如皮亚杰在1922年发表的这篇文章中所说的,儿童在到达形式思维之前的推理中所固有的逻辑空缺和其他的假必然性(或"伪必然性")"是由于推理发生在一个唯一的方面"(更确切地说,是由于必然性、可能性和实在性方面——概念——还没有分离)。

在1922年的文章中,值得注意的东西是一种预见,人们能从中看到在后来显现的重要性,确切地说,在关于可能性和必然性的研究中,在如何处理在思维发展中的这些存在(判断)模态的研究中显现的重要性。但是,正如在本书的阅读过程中可以看到的,在当时,模态的重要性确实不如能形成可能性,并根据在逻辑上使之相互联系在一起的需要把这些可能性整合在一个整体中的思维能力。

---

① 批判论文:《布伦茨威格的人性体验和物理因果关系》,载于《正常和病理心理学杂志》,1924年,21,596—607页。

②《论儿童最初形式思维的逻辑乘法运算》,载于《正常和病理心理学杂志》,1924年,21,222—261页。

但是，在最终关注可能性、必然性和实在性之前，皮亚杰在1940年代末和1950年代初与英海尔德一起完成的关于青少年逻辑的研究[①]中重新考察这个问题。在这些年中，连续的发现是引人注目的，首先是作为七岁至十岁儿童的具体逻辑-数学思维的基础的运算结构，然后是作为形式思维（即在1922年的文章中他已经提到的假设-演绎思维）的基础的结构。当然，正如英海尔德和皮亚杰在其研究的结论中所肯定的，为了掌握形式思维和学会推理，青少年应该能区分可能性、必然性和实在性这三个方面。但是，仅仅有这种区分是不够的，主体还必须正确地重新组织这种推理的构成部分：类、关系、肯定、否定、合取、析取等。在形式命题组合和INRC群之内的这些运算的重新组织是这种新的逻辑能力，即假设-演绎思维的结构条件。[②]与实在性方面的区分联系在一起的功能解释得到同样清楚的结构解释的补充。

然而，通过何种过程，通过何种思维方式，主体才能建构新的运算结构，以便进行形式推理和把实在性纳入在运算方面联系于（因而必然维系于）思维所需的各种初始假设的各种可能性之中？当然，在皮亚杰在1970年代对这个问题给出的补充回答中，他提及和详细检查了意识过程，反省抽象过程和建构概括过程的作用。但是，在其他场合，他部分地回到功能和结构具有同等分量的观点，这是他在1922年所持的观点（这个观点始终是他的结构解释的背景），正如本书的阅读所看到的，他发现了当思维到达新的可能性整体时，在每一个水平上思维的这种不可避免的过程，这些可能性能丰富儿童的能力，能使儿童超越以前获得和掌握的可能性整体所到达的解释水平。

了解皮亚杰研究事业的读者，又一次只能佩服他在70年代的时候超越在之前的几十年里所得出的主要发现，特别是智慧的运算结构，并对这些发现加以整合的方式。

姜志辉　译

---

① B.英海尔德和J.皮亚杰，《从儿童到青少年逻辑思维的发展》，巴黎，法兰西大学出版社，1955年。

② J.皮亚杰，《运算逻辑概论》，巴黎，Dunod出版社，1972年（J-B. Grize复校版本；第一版，巴黎，Armand Colin出版社，1949年）。

译校者前言

熊哲宏　李其维

大家知道,皮亚杰在逝世前的一二年把主要精力放在可能性和必然性范畴的研究上。在我们这里所翻译的皮亚杰两部分的《可能性与必然性》中,他本人编辑了第一部分的手稿(出版于1981年),而第二部分的编辑是由英海尔德完成的(出版于1983年)。在这两卷中,皮亚杰描述了新可能性的产生,导致"必然之感"(feeling of necessity)的封闭结构的形成是如何从一个阶段向另一个阶段发展的。在这里,我们想向读者交代或说明如下两个问题:(1)皮亚杰晚年为什么要把精力放到"可能性与必然性"的课题上;(2)《可能性与必然性》一书的主要内容及其理论意义是什么。

一、晚年皮亚杰研究"可能性与必然性"问题的理论原因

晚年皮亚杰致力于可能性与必然性的研究,是有深刻的理论原因的。大致地说,是进一步推进和深化"发生认识论"这一宏伟目标的需要。

问题还得从康德说起。在康德"范畴表"四类十二个范畴中,第四类即模态范畴(可能性-不可能性、实有性-非实有性、必然性-偶然性)在他看来具有最为重要的意义。因为模态范畴比其他几类范畴的层次更高,它们是所谓"一般经验思维的公设",就类似于数学上直接确定、无须证明的前提条件。具体说来,模态范畴不像"量""质"范畴那样规定经验对象,也不像"关系"范畴那样规定对象之间的关系,而只是规定经验对象和认识该对象的主体之间的关系,但它的优越之处在于,把主体的认识能力(直观形式、概念)加在已由别的范畴整理好了的经验对象的概念之上。可见,模态范畴只是在其他范畴已对判断的内容做了客观的综合之后,再将它们与知性的认识能力做主观的综合。

当然,康德的模态范畴是以所谓"先验条件"(即先验自我意识)为根据的。而皮亚杰则是要从主客体相互作用的活动中追溯范畴的起源。他把"平衡化"作为主客体相互作用的动力机制。但在晚年似乎对他一直使用的平衡化模型感到不满:"我们建构主义的认识论,反对天赋论或经验论。为了说明我们的有理,只指出新知识总是调节的结果,从而亦是平衡化的结果,是不够的,因为调节机制(如同机体各器官的内部平衡那种情况)本身,人们可以假定它是遗传的,或者还可以假定它或多或少是复杂的学习的结果。所以,我们要以另一种方式,以关于'可能的事物'的形成问题为中心,探索'创新'

之所以产生的问题。"(皮亚杰,1991,第526页)正如格鲁伯和弗内歇指出的那样:"在皮亚杰逝世后出版的著作《可能性与必然性》中,他指出了他1975年平衡模式对于思维发展的建构主义理论的不充分性:关于发生的调节机制可以或者是天赋的,或者是被获得的。因而向新可能性开放似乎就提供了解决这一困境的办法。"(Gruber &Voneche,1995,p.867)我们可以认为,为了补充平衡化机制的不足,皮亚杰晚年再次回到那些带有综合性的范畴的研究上来。

第二个理论原因是,皮亚杰认为关于可能性和必然性的研究是反对经验论和预成论的最佳论据。他说:"可能性的形成,及其在发展过程中的多样性,本身就是反对经验论的最佳论据之一。其实'可能性'不是可以观察的,可观察的,是主体的某一构造的产物。客体的各种特质,必然和主体发生相互作用,因解释而被纳入产物。而解释,是属于主体的活动。于是在这些活动生成数量愈来愈多地向可能开放的同时,解释也愈来愈丰富。这样,就有一种构成性的过程,它极其不同于经验论所乞援的并被归结为简单阅读的那种过程。"(同上,第527页)传统观点认为,一切可能如果总是先于他们的实现(现实),那么它们就是预先形成的。但皮亚杰指出:"什么是可能的东西,只能在反省过去时才能予以真正确定,也就是说,要在它已被现实化以后才能真正确定;而这个现实化又必然牵涉到一种同环境的偶然情况的必不可少的相互作用。"(皮亚杰,1981,第96页)为了反对在可能、现实和必然问题上的天赋论,有必要对它们的发生过程做重新研究。

二、《可能性与必然性》一书主要内容介绍

我们在本书的译校中深深地感受到,《可能性与必然性》是一部把发生认识论的理论假设、理论建构与精细的实验研究有机地融为一体的巨著。它既有新颖、独到的理论假设,又有为验证这些假设而设计的令人叹为观止的实验程序;既有彼此之间具有内在联系的概念网络,又有各自相对独立的研究主题和结论。因此,要准确地介绍这样一部名著的主要内容,我们并不是有太大的把握。为了叙述的方便,我们尽可能把问题细化如下。

1.可能性概念研究的方法学问题

方法学的第一个问题是关于如何确立可能性发展的机制问题。根据皮亚杰的观点,"认知的可能性"在本质上意味着发明和创造(这就是为什么可能性的研究对于建构主义认识论来说具有首要的重要性)。认知的发展也可以说是"向新的可能性开放"。为了能够说明向这种新的可能性不断开放的产生机制,皮亚杰晚年对他的"格式"概念

进行了新的分类和解释。他写道:“我们将区分三种类型的格式。首先,我们称呈现性格式(presentative schemes)为那些涉及客体的同时性特征的格式,它们不仅仅是表象性的,因为它们可能也是感知运动格式。当呈现性格式被组合的时候(正如在一种层级化的格式中),它们被保存。它们由先前的获得所决定,而且可能被应用于它们初始获得的内容之外。第二,程序性格式(procedural schemes)是被应用于指向一种目标的手段[我们可以称为与递归性(recursiveness)相反的前驱性(precursiveness)]。它们以连续的方式被赋予次序,但早先应用的那些格式后来不是必然地被保存。程序也是依赖于情境的,以至于对不同情境的概括化是更困难的,显然可与呈现性格式的概括化区分开来。第三种是运算性格式(operational schemes),它们由前两种格式的综合所构成;在它们实时地被执行的意义上,它们是程序性的,但是对运算加以调节的结合性法则的非时间性结构,则具有更高层次的呈现性格式的特征。这样,每一个体随意地具有两个主要的认知系统——彼此是相互补充的。由稳定的格式和结构所组成的呈现性系统,具有本质上理解世界的功能。而处于不断地变动的程序性系统,具有通过发明或迁移程序来担保满足需要的适当操作的功能(成功)。第一个系统构成认识主体(epistemic subject),第二个系统是指心理主体(psychological subject),因为各种需要总是相对于个体主体以及他们可能在某时经验到的不满足。这些不满足——当它们最终出现时——不同于在结构中所发现的不完全性的状态。然而,一旦一种可能性通过程序性格式的应用而得到实现时,就产生了一种新的呈现性格式,因而出现两种系统的相互补充性。”(Piaget,Ⅰ,1987,pp.4–5)显然,在皮亚杰看来,由可能性向现实性的发展正是运用程序性格式的结果。或者说,正是程序性系统才打开了各种可能性之门。

根据传统或常识的看法,一个“动作”或“观念”的实现,事先已经包含有使它们归于实现的可能,而且,一个可能的产生总会导致另一些可能。因此,“向新的可能性开放”这个问题,就不仅具有心理发生学的而且具有认识论的意义。但是,如果一切“可能”总是先于它们的“实现”,那么它们就是预成的或先天的。根据康德的定义或所谓“公设”,凡是按直观和概念都与经验的形式条件相一致的东西就是可能的。这一可能性公设强调的是实在对象的经验的可能性,或对象概念应符合主体先天的形式条件(时空直观和范畴)。皮亚杰认为,建构论有心理学和逻辑的理由来反驳这种先天论。

第一是“心理学的论证”:把观察者的观点与被试(主体)的观点分开。这是因为,可能性的范围在观察者看来是极其广泛的,而我们的问题则完全是由被试提出来的。“事实上,我们的观察揭示出:在4到5岁和11到12岁之间,出现了一种渐进的丰富性,一种质的发展——既是有规则的又是复杂的。这些观察支持了这一假设:可能性是逐渐建构的而不是预成的。”(Piaget,Ⅰ,1987,pp.3–4)第二是“逻辑的论证”:事实上,“可能的集合”无非就是可演绎的可能,亦即它从属于必然的法则。例如,一个立方体的可能的面数:一个多面体的可能的棱数等。如果主体在某一情境中,逐步地发现的是关于可能的变异,那么“可能的集合”就是没有意义的了。因为在这个集合中的每一个可能,都可

以生成另一些可能。而“所有可能的集合”中的这个“所有”，它本身也只是处在运动之中的一种可能（不大会是封闭性的）。如果人们认为观念是预成的，那么“可能的假设”也是预成的了。问题是，我们怎样解释“错误”？一方面，如果错误是不可预见的（因为有人认为它是预成的），这就排除了对这类运算（即错误）的组合性运算。另一方面，如果真实的观念永远是预先存在的，那么必然的结论就是错误观念也同样是永远预先存在的。但“不管怎样，从‘可能’的观点看，在往后的开放性上，一个纠正了的错误也许比一个直接的成功更会有丰实的成果”。（皮亚杰，1991，第528页）

方法学的第二个问题是关于可能性研究的出发点问题，也就是从“观察者观点”出发还是从“主体（自身）的观点”出发的问题。从根本上说，这一问题源自可能性本身的复杂性。在皮亚杰看来，当谈到生物的演变（乃至认知发展）时，我们就要反对在“创新”概念与“预成”概念之间进行二者必居其一的选择。因为DNA的可能组合是不计其数的，所以坚持把一切遗传变异都看成只不过是一种预先形成了的组合的现实化是容易的。“而在这类问题上，什么是可能的东西，只能在反省过去时才能予以真正确定，也就是说，要在它已被现实化以后才能真正确定；而这个现实化又必然牵涉到一种同环境的偶然情况的必不可少的相互作用。”（皮亚杰，1985，第96页）从心理学上说，一个系统处于平衡化就包含两个方面，即真实性（现实性）和可能性。例如，一个青少年成功地解释了杠杆平衡机制时，他所理解的全部系统就是一个平衡系统。一方面他实际施行了许多心理运算并组织了一些关系，这些关系可实际应用于他在既定时刻眼前所见到的真实物体上。如他断言说，杠杆处于水平的位置：一个离轴心10厘米的2公斤物体与另一端离轴心20厘米的1公斤物体相互平衡。这些运算和关系都是真实的。其“真实”的含义在于：这些运算和关系都是用于某一特定时刻的，但它们对于在理解中所获得的平衡化而言却是不充分的，因为在理解时将会出现全部可能的或潜在的运算及关系的集合。“然而，可能性与现实性之间的分界线，在心理学中比在物理学中更加难于划定。但正是物理与心理这两种平衡化形式之间的差别，对于研究形式思维是最有教益的。”（皮亚杰，1991，第215页）故而皮亚杰认为，要弄清物理与心理平衡化的差别，就必须确定可能性研究的出发点问题。

2.可能性概念发展的阶段

根据皮亚杰的观察和实验研究，在儿童那里，可能性是随着年龄的增长而不断演化或发展的。这种发展可以从功能和结构两个角度或方面来看：“按其功能，我们可做出如下区分：（1）假设性可能，有效的问题解决与错误混合在一起；（2）可实现的可能，根据先前的结果或先前组织化了的呈现性格式进行选择；（3）可演绎的可能，源出于内在的变异；（4）公设性的（the postulated）可能，主体相信新的建构是可能的，但尚未能发现适当的程序。按其结构，我们将区分四个阶段：（1）通过类似性的系列（a series of

analogies)而局部形成的可能性;(2)具体的协同可性(co-possible),一些可能性在被执行之前便被同时预期到;(3)抽象的协同可能,所实现的每一个可能性,刚好被看作是在许多其他可设想的可能中的一个可能性;(4)其最普遍形式的可能性,可能性的数目被看作是无限的。"(Piaget, Ⅰ, 1987, p.7)以下我们略述一下结构意义上的可能性发展的阶段。

结构意义上的可能性的发展阶段,在皮亚杰看来,首先涉及"可能性的演化——被看作是极其规则和普遍的——与运算思维水平的序列之间的关系。这种关系是如此直接,以致我们能使用同样的阶段来描述二者的发展:对于前运算来说,这里的水平1对应于通过连续的类似性(successive analogies)所产生的可能性;在水平2A(在具体运算的开始),我们发现了具体的协同可能性的形成;在水平2B(具体运算的平衡状态的水平)存在着这样的协同可能性:我们简单地冠之以抽象的,但这仅仅是在它们被概括化而不是实际上得到实现这一意义上;最后,在假设-演绎运算的水平3,出现了关于'任何……无论什么'这样的不确定的协同可能性——在数目上是无限制的。这样,我们发现了一种惊人的平行性,但问题仍然是怎样对此加以解释,尤其是,要解释两种发展的哪一种导致另一种,并凭借什么机制"。(Piaget, Ⅰ, 1987, p.145)

根据皮亚杰的观点,水平1可称为通过"连续的类似性"(或"类似性的连续")而产生的可能性。其突出的特点是,这种可能性在数目上很少,也缺乏多样性,因为主体本身满足于延迟一些他们在现实中刚刚执行或注意到的变异或现实化。"从运算的观点看,水平1是以缺乏可逆性、递归性等,一句话,是以缺乏系统性的推论和封闭性为特征的。通过分析可能性得以产生的方式(即通过为这一水平所特有的连续的类似性),我们能清楚地看到这些缺陷存在的理由。首先,类似性是多数相似性与细微差异的一种组合,但在每一个跟随着另一个的意义上却没有传递性:B就一种特殊的相似性X而言可以与A类似,而就另一相似性Y而言,则C与D类似——用不着C必然与A类似。显然,在这种非传递性的形式中,一种可能性从先前的可能性产生的方式之数目,要比隐含地连续性的传递样式这一情形更大。第二,完全同样的目标可以通过一些可能的手段或程序而获得,一种既定的程序除了那初始的目标之外还诱导新的目标;结果,初始的系统就被放弃。这样,我们看到,在可能性的集合与运算结构之间存在着一种内部的非对称性:前者——因刚刚说过的理由——比后者、也比前运算的半结构(非形象的集合体,等)要多得多。第三个方面(在第八章分析),当这一方面产生可能性时,由过于决定和过于组合——与运算组合相反——提供出来,这就在封闭系统以内划了界限。"(Piaget, Ⅰ, 1987, pp.145–146)

水平2被称为"协同可能性"——无论是具体的(2A)还是抽象的(2B)。所谓"协同"(用前缀co-)是指,它们联合地被构成,彼此之间可以形成组合。但这类可能性是具体的和受限制的。这是因为,从运算的观点看,具体运算的特征是现实性(或真实性)沿着潜在可能性的方向进行扩张,但它是受限制的。"限制的意思在于,这类具体运算的特征

是由潜在可能的运算的补偿所决定的，运算是与系统的联系协同的，然而这些联系受到了两方面的限制：一是受所包含的运算的形式的限制，另一是受这些运算所应用的那些概念的实际内容的限制。”（皮亚杰，1991，第204页）从形式限制来看，具体运算不过是对当前现实给定的材料进行直接组织。而分类、序列及对应的运算都是一些“手段”（为了将类包含或关系的集合渗入到特殊的内容中去，如长度及重量等）。这样，可能性的作用只是将应用于既定内容的动作或运算单纯做可能的延长。例如，当儿童把若干客体排成系列之后，他就懂得了他可以同样地把其他客体也排成系列，正是利用相同的预期进行系列化运算的格式，才能使儿童实施真正的系列运算。

而从内容限制来看，具体思维还不能直接概括所有的物理性质，而是从一个因素扩展到另一个因素，有时在从一种因素（如长度）的组织进展到另一种因素（如重量）的组织之间往往要经历几年的间隔（即所谓“滞差”现象）。这是因为，儿童对于那些客体性质不容易从自己的动作中分离出来的物体，更加难于排成序列或进行等量比较（如重量就是如此）。因而，从内容观点来看，与系统的联系协同的潜在转换，决定了现实运算与“可能运算”之间的边界线。这就是为什么表征具体运算特征的可能性并未超出经验现实的有限扩展的第二个原因。

总之，具体思维在本质上还仍然停留于与经验现实的直接接触，而具体运算系统所能处理的仅仅只是一个“有限的”潜在可能转换的集合。因此具体思维达到的并不超过“什么是可能的”这一概念，而这个概念只是经验情境的一个简单的（并不是很大的）扩充。

最后，水平3出现了无限定的内涵和不受限制的外延的协同可能性。在这一水平上主体可以自发地说道“无限”。这是因为，形式运算思维最显著的特征就是在现实性与可能性之间的方向上的可逆性。这时，可能性已不再只是作为一种经验情境的扩充，相反，现实性现在已从属于可能性了（即现实性对可能性来说已居于第二位了）。因此，青少年把既定的事实看作是一组可能的转换中实际上出现的部分。这类形式思维的方向，是从“什么是可能的”出发，进展到“什么是经验上真实的”（即现实性）。从逻辑的观点看，形式思维的命题逻辑，要比类和关系的简单“群集”能提供更多的运算可能性。因为命题逻辑的本质特点在于，它是一种一切可能的组合的逻辑，而不管这些组合的出现是由于实验问题还是纯言语问题。正是组合运算使青少年有可能将现实材料提供给一组与这些材料相符合的可能性假设以做出形式推理。换言之，只有一种形式组合系统才提供了全部可能性。

3.必然性概念建构的特点

根据英海尔德提供的背景材料，“关于可能性与必然性这第2部分——致力于儿童必然性的发展——由皮亚杰本人所写。由于急于要完成各种进行中的计划，他不幸没有时间修改这个手稿，并最终定稿。我受他委托负责他的手稿的编辑工作，我所能仰赖

的还有我的同事Jean-Blaise Griz、Francois Bresson,他们在评论这一手稿和澄清在它之中的某些方面过程中专心致志而又富有才华地合作。"(Piaget, Ⅱ,1987,p.3)我们可以认为,关于必然性的研究,是皮亚杰为他的范畴理论大厦所铺下的最后一块基石。

根据皮亚杰的实验研究和理论建构,儿童必然性概念的建构主要有三个特点:(1)必然性附属于由主体所实现的各种演绎组合,它不是客体所固有的可观察的事实;(2)它不是一种孤立的和确定的状态,而是一种必然化过程的结果;(3)它直接与产生分化的可能性之构成有关,而必然性与整合有关。换言之,必然性与可能性的构成是平行的。下面我们略述一下这三个特点。

第一个特点:必然性不是源出于客观的事实。皮亚杰指出,在考虑必然性是具有"外源的"还是"内源的"起源时,人们可能会想到,把斜坡引起卵石滚动的必然性作为亚里士多德相信其存在的那种"真实必然性"(real necessity)——发生于事物中的必然性——的一个好例子。[①]诚然,如果我们坚守可观察的事实,我们就只是看到,放在斜坡上的卵石将"总是"往下滚而"决不会"往上滚。但这仅仅是外延的普遍性。所以,只有当有了一种能提供解释的演绎模式时,一种"法则"(law)才成为必然的。那么乞求于"重体的下落"这一法则会是充分的吗?皮亚杰认为,这仍然只是一种被转换成普遍法则的可观察物。自从牛顿的"引力"出现以来,必然性是以提出了一种解释的模式为基础的:所谓"普遍的吸引"。但这仍然只是伪装的描述。正是只是随着爱因斯坦、Misner以及Wheeler的"几何动力学"(geometrodynamics)才提出了更基本的解释,因为它们与主体的几何运算(包括可能的未来精心组织)相联系。确实,人们可以说,任何普遍的事实——诸如斜坡上的卵石往下滚——在直觉上似乎是必然的,因为主体知道存在一个解释,即使她不知道这个解释是什么。然而,这种论证对虚假的必然性以及有效的证明却留下了悬而未决的问题。

在《可能性与必然性(2):认知发展中必然性的作用》中,皮亚杰用实验表明,归属于现实的必然性是某种媒介物的结果(例如,第一章中的守恒原理,第二章中的主观几何)。这些是主体的逻辑数学结构的一部分,但是它们也能直接被应用于客体(如特有的运动的几何学,物质动作的几何学——二者都附属于主体和客体)。

总之,必然性不是源出于客观的事实。客观事实按其性质来说是纯粹真实的并属于可变的普遍性,因而在或多或少的程度上要受制于必然的法则。当它们被整合于由主体所构造的演绎模式之内时,才成为必然的。这样,皮亚杰得出结论说:"p的必然性不是仅仅作为非p的不可能性为特征,因为新的可能性总是会出现,而是必须以莱布尼茨的方式被描述为非p的矛盾,这就与一种特殊的、有限的模式有关。"(Piaget, Ⅱ, 1987, p.136)

---

① 皮亚杰还举例说,甚至孟德斯鸠(Montesquieu)在论及法律规范时说:"法律是源自于事物的本性的必然关系。"皮亚杰认为,这是在规范的东西与事实的东西之间一种类似的混淆。

第二个特点：必然性与"整合"密切同源。皮亚杰提问说，必然性的这种内源的起源是什么？当然，我们可以从莱布尼茨著名的"理性无所不在"开始，但它仅仅具有必然性的三个维度之第二个维度的特征。无疑，我们将不得不假定更普遍的"规范原则"，诸如"矛盾律"——排除p与非p的同时存在，但不告诉我们n是蕴涵着p还是非p；或者是"充足理由律"——不具体说明这种理由是什么（因而亚里士多德用它来排除惯性，伽利略则用它来证明惯性）。在必然化过程的基础上的这样一种原则——即具有公理的有效性的一种原则——将是"必然性的存在是必要的"——用不着具体说明它们是什么。但为什么必须存在必然性？这是因为没有必然性，思维——如果它要保留所有先验的断言——就会不断地与自身相矛盾；或者就会迷失在"赫拉克利特之流"（Heraclitean flux）中——如果思维忘记或忽视它们。既然思维总是处于发展中的，它——如果它要避免这两个问题——除了在当前的状态之内将过去加以整合之外，别无他途。这样的整合一旦完成，就是必然性的来源。

但皮亚杰认为，到此为止只是把这个问题往回推了一步：这种"整合"的必要依次来自哪里？问题在于，两个客体或事件可能是彼此相似的，这种相似性关系一旦确立起来，就是整合的一种条件。另一方面，它们可能是不相似的。然而不像相似性——它往往是绝对的（正如在"同一性"中一样），不相似性绝不是完全的：不管两个真实的或概念的实体是多么不同，它们作为经验的或认知的客体仍然有某种类似。在相似性导致同化、不相似导致顺化的范围内，后一种关系是隶属于前者的，正如顺化隶属于同化一样。于是，在它们相互作用的所有可能的水平上不得不存在格式的相互同化这一事实，便施加了对整合——必然化从中得以进行——的一种永久需要。

更简单地说，正如皮亚杰总是强调的那样，同化格式不能孤立地起作用。它们不断地发现新输入的需要，必定会导致协调——我们按它们的相互同化来赋予其特征。正是这些"组合"而不是初始的个别构成，担保了该整合过程。

这样，皮亚杰把在没有导致一种矛盾的情况下不能被否定的那种"组合C"（Composition C），定义为必然的过程。明显的是：只有主体自己的动作（或运算）才允许证实非C的矛盾性质（这便证实了同化的作用）。现实性只是能表明：非C事实上决不会出现——这对于证明它的不可能性是不充分的（后者能通过修正各种条件被反驳）。尤其是，在当下状态内对过去的完全整合——它是逻辑数学必然性的一种条件——在性质上只是推论性的，这与诸如习惯的改变那样的其他主体活动相反（我们知道，一种新习惯仅仅保留了先前习惯的或多或少有限的部分）。

第三个特点：必然性是主体系统化组合的产物。由于与整合密切同源，因而必然性存在于由自己的原因所造成的自动组织化。它不是真实世界中的一种可观察的事实。它是一种包含必然化过程的动力学，而不是限制于各个状态的系统化组合的产物。这种动力学开始于能相互组合的、并为相互组合而设计的概念的形成。它从如下情境出发：概念的组织化是异质的，仅仅包括按相似和差异进行的部分比较；还没有获得经互

反同化而得到的协调。主体起初依赖于使用不相容的标准:判断一根斜线在一个时刻比同一长度的水平线“更长”,“因为它上升”。不久后又因同样的理由变得更短。就垂直和水平线而言也可以看到相似的矛盾——一根或另一根被判断为“更直”;或者,以牺牲起始点为代价而集中于两条平行线的端点等。最后,主体才开始采纳同质的标准:这两点之间的间隔——这使得结合性组合成为可能。

由于主体开始使用运算过程,诸如“反省抽象”、各种形式的“完全概括”,以及最后(基于所有的推论逻辑)皮亚杰称作“意义蕴涵”(significant implications)——从中p→q,在q的意义被包括在p的意义中的范围内是必然的——某种基本的运算。皮亚杰顺便指出,不像Lewis的模态逻辑(其必然性靠附加的算子衍生出来,这在解决外延逻辑所特有的悖论蕴涵问题方面是不充分的),Anderson和Belnap的“定推逻辑”(logic of entailment)把必然性当作运算本身所固有的,如果——正如皮亚杰的意义蕴涵的那种情况——在关系p→q中,q能凭自然推理从p中演绎出来。(Piaget,Ⅱ,1987,p.138)

这样,一旦获得了这些运算,必然化过程就扩展到逻辑数学结构的建构。在这种建构中,封闭由新的开放所替代,并进一步扩展为解释性的物理模型。在这样的物理模型中,外源的或外部的变异继续被内源的或内部的变异所取代。这些变异是可演绎的,它们的内部组合成为“必然的”。同时,结构化的和模型化的过程导致产生新的必然性的证明之必要。这些新获得的能力致使新内涵的不断产生。

4.必然性概念发展的阶段

正如可能性发展阶段的划分一样,皮亚杰也是从机能的观点和结构的观点两方面来划分必然性的发展阶段的。在他看来,区分两种不同形式的必然性是可能的。一种附属于机能阶段,另一种附属于结构的力量。根据必然性这一部分的实验研究,从“机能”的观点看,存在着三个主要阶段。皮亚杰提醒说,这些阶段不是对应于“一般的、发展性的阶段”(即皮亚杰通常意义上的“阶段”),而是对应于一种问题解决的“时期”(phases),或者一种特殊模型的建构(如第一、二、三章)、一种结构的建构(如第四章关于“长度”)或者前结构的建构(第五、六章的“结合性”以及第八章的“分布性”)时期。具体来说,机能意义上的阶段的主要特点如下。

第一阶段是“决定性的预备”(preparatory determinations)阶段,或者是搜索必要条件、然后搜索必要而充分的条件的阶段。在皮亚杰的实验中,必然性的这个方面就“证据的建构”(第八、九章)而言特别得到了研究,但我们还可以在任何类型的问题解决过程中,特别在斜坡问题(第三章)或旋转问题(第二章)的建构过程中发现它。

第二阶段可以用术语“精心组织或分析”(elaboration or analysis)指明。这就是,搜索关于一种组合的必然性的解释A,被解释B跟随着A,被解释C跟随着B等,以至无穷。皮亚杰认为,这毫无疑问是探寻必然性,以及把必然性与纯粹的“外延概括”——即

“归纳的概括”——区分开来的那种特征的主要驱动力。明显的事实是，一种组合的必然性的基础（例如，在系列$A<B<C\cdots<X$中，存在着关系“<”的传递性，存在着像<X一样多的项目>A）并不意味着：它“总是”正确的（这仍然是在没有证明它是如此“必然的”情况下的普遍性水平上），反而是意味着，它是以提供这种解释的意义蕴涵为基础的。皮亚杰强调，儿童发展的事实清楚地表明了从“外延的普遍性”到“演绎的证明”过渡。这种变化只是大约7岁才出现。

皮亚杰指出，走向必然性的第三阶段可以称为“扩大”（amplification）。它是从先前必然化的组合那里衍生出的必然的结果。这第三种发展（后期能比先前大量地出现）可以在主体从初始整体守恒的分布性，到其他的分布性——这里整体一起被划分，即使后者仅仅是前者的一个结果——过程中所体验到的困难而得到发现。在科学史领域，这种现象是相对常见的。例如格鲁伯表明，达尔文花了很长时间才认识到由他先前的观点所必然隐含的某些结果。顺便指出，皮亚杰晚期进一步证实了他很早就提出的一个假设：儿童发展的较慢速度也许有利于最后更大的发展。格鲁伯发现，达尔文的某些主要概念在他的理论中出现得特别晚，虽然它们是他以前的一些观念的合乎逻辑的结果。问题是，这种“创造性”的惊人的缓慢速度是否成为丰富多产的一个条件，或者只是一个可悲的偶然事件？皮亚杰的假设是：“对一个主体来说，从一个阶段到下一个阶段的过渡有一个最佳的速率。就是说，一个新组织（或结构化）的稳定性，甚至它的丰富多产都是依靠一些联系，这些联系既不是瞬时发生的，当然也不是无期限地延缓的，因为这样它们就会失去内部组合的能力。”（皮亚杰，1991，第18页）

在这里，皮亚杰把这一假设进一步表述为：“不同形式的必然性中所固有的可变力量（variable strength）。”皮亚杰指出，这是这样一个复杂的问题：解决这个问题就需要——比任何其他问题的解决都要多——在作为一种状态的必然性，与导致必然性的动力过程之间做出区分。例如，在数学中，习惯于说各种“结构”或多或少是作为强的，或弱的：一个群比一个独异群（monoid）更强，一个域（field）比一个群更强。“但这仅仅意味着，更强的结构包含更大量的必然关系——即是说它们是‘更丰富的’，或者它意味着，这些关系的必然性本身在更精致的（=更深的理由）和更扩展的（更多的结果、更紧密的相互联系）的双重意义上是更强的？如果我们把同一性（n=n）的分析的必然性，与n→n+1（每一整数被另一整数跟随着）的综合的必然性相比较，就会清楚地看到，一旦它们被获得，两种必然性就用同样的强迫性证据施加于自身。然而从过程（必然化）的观点来看，后者在理由和结果上都是更丰富的，这正好是如此清楚的。如果人们接受必然性和整合之间的紧密联系，那么‘更丰富’的意义就不仅是数目上的，而且意味着更大的整合力量，因而是运算综合的力量。所以这构成了在必然化过程的演化中要加以考虑的一个因素。”（Piaget，Ⅱ，1987，p.139）

另一方面，似乎不存在将必然性的程序类型与结构类型区分开来的根据。一个“程序”（procedure，包括在一个特定地点和特定时间出现的一种特定活动的一种运算）被指

向于成功,而不是理解。一个程序能成功地提供充分的但非必然的条件:例如,必然性第四章中的实验表明,为了在斜坡的建构中校正一个序列3,2,2,儿童用4,3,2取代它就不是必然的;为了获得3,2,1而改变它的最低水平就是充分的。但是,如果必然性在一种程序行为中起作用(它通常是这种情况),它就是按理解了成功和失败的各种理由,而不是在结果的水平上本身。"这种理由致使我们考虑结构与程序不能分离开来,除非在纯粹经验的、尝试错误的程序的情况下。"(Piaget,Ⅱ,1987,pp.139-140)

从结构方面来看,皮亚杰说,"且不管感知运动水平,仅仅考虑表象性的概念化,我们可以区分必然性发展的三个阶段。"(同上,p.140)

第一阶段——对应于前运算水平——是"前必然性"(prenecessities)阶段。它是局部的和不完全的。特别是在"虚假必然性"中已观察到这种前必然性。第二阶段——与具体运算一起——是有限制的协同必然性阶段。这里的前缀"co-"意味着,它们联合地被构成,彼此之间可以形成组合。在它们仅仅被应用于或归属于具体内容的意义上,它们是受限制的。最后,在假设演绎水平上,我们可以说到在无论任何形式的演绎中都能被使用的不受限制的协同必然性。

下面我们以儿童"物理必然性"(physical necessity)的发展为例来说明这三个阶段的特点。皮亚杰指出,物理必然性的性质提出了关于在不同发展水平上客体和主体各自的贡献这一中心问题。正如前面已经指出过的那样,简单地假定(亚里士多德的假定),在外部事件之间具有客观联系特征的"真实的"必然性,是成问题的。因为必然性不是直接可观察的,而总是演绎组合(deductive composition)的产物;甚至在被考虑到因果联系的情况下,经验也仅仅是提供了规则性连续(使人想起休谟)。为了从这种概括化推进到必然性,主体的一种演绎模式的建构仍然是不可缺少的。另一方面,把这种模式与逻辑数学结构简单地等同也是不充分的——即使人们只是把他们的运算"归属于"客体本身,因为把内在于主体模式中的必然关系,与被归属于客体本身的那些东西(它仅仅为该模式所近似)之间尽可能地紧密对应,换言之,在模式与被假定存在于客体之内的必然性之间担保某种同构性,就是令人满意的。在这方面,皮亚杰的实验证明了空间的媒介作用。此外,皮亚杰还考虑到物理学中被称为"原理"(如守恒、对称等)的东西,它表达了对于一般规则者(regulators)的所有模式——这些模式既可归属于现实又是必然的——应该是共同的东西。作为源出于"概括化的观察"与"演绎"的混合,这些原理在该模式之内就成为普遍的和必然的(当然,这是在它们的否定会导致矛盾这一意义上)。甚至在现实性中,它们代表"必然过程"(necessitation)[1]的一种特殊形式。这种必然过程可以被表达为:其否定在物理上是不可能的。这不是意味着:这种必然性形式仅仅起源于现实性——因为其构成需要主体的演绎,而仅仅是:内在于模式的建构的那种必然性,与主体不得不假定为在现实中是必然的那种必然性之间,应该存在着某种程度

① 皮亚杰所用的"necessitation"一词,是指导致必然性的一种过程。

的同构(当然只是近似的,因为这些原理在其历史过程中会被修正)。

皮亚杰关于"物理必然性"实验涉及这样一种情境:一滴水或许多滴水被释放进一个盛有四分之三满的水的碗中。这一实验设计的价值在于:它事实上有助于区分多重水平的必然性。它们从被儿童认为不与其余的水相混合的单一一滴水的同一性开始,直到在包括一种计算——这种计算表明为什么水平面的上升仍然是不可见的——的正确的和附加的解决问题情况下的附加守恒(conservation of the additions)。皮亚杰认为,这个非常简单的例子将向我们表明:当观察到的事实与预期相矛盾时,当必须阐述未预料的事实与"可懂度"(intelligibility)的一般原理相一致的新模型时,便可看到在物理模型及丰富的想象式演绎(imagined deductions)中所固有的每一水平的必然性之复杂性。

皮亚杰这一实验方法涉及四种类型的问题。在"问题1",向被试呈现被置于水碗之上的一个薄吸量管。然后主试释放一滴水,但用一个小罩子来阻止儿童知觉到吸量管中水平面的下降。然而从吸量管滴进碗里的过程是可见的。要求儿童标出碗中初始的水平面及其变化,如果这能被儿童预期到的话。在"问题2",取消小罩子,要求儿童标出吸量管上的初始水平面。被试预测:能感知到碗中水平面最终上升。但他们不能感知到它,请他们解释这一事实。在"问题3",用一个与碗中的水直接相连的注射器取代吸量管,以致只有注射器的排空才表明碗中水量的增加。在"问题4",碗里的水被装满到边缘,问题是解释为什么 n 滴不引起溢出,而 $n+1$ 滴则溢出。

皮亚杰的实验结果发现:"必然性的发展明显地与主体所建构的模式相关,而可观察物对于演绎自然起到不可缺少的帮助,但仅仅是作为解释了的外源数据。必然性——不可还原到普遍性——尤其绝没有构成一种可观察物。除水平1A的模式及其个别化的水滴之虚假必然性——在下一水平通过它们所包含的水的守恒的必然性所取代——之外,每一模式被整合进下一模式。这种把低水平模式不断地整合进高水平模式内的过程,便构成了主要的特征甚或一种单一过程的起源——这就是必然性的发展。"(Piaget, Ⅱ, 1987, p.18)

但是,如果必然性就其特征是内源的,并且现实本身仍然只是必然化了的,那么我们怎样能说明事实上主体归属于客体的模式是如此成功,以致它们成为必然过程?换言之,什么是能够解释把受制于主体处置的客体与演绎地建构它们的主体关联起来的"同构论"?这就是皮亚杰经常提出的"思维与宇宙符合一致的"康德问题。皮亚杰的回答是,"主体(它同时是一个客体)作为一个有机体,通过他对客体实施物质动作——从他的'运算'中得到同构;他根据某些普遍的组合原则协调这些运算——这对他的所有模式来说是共同的,并且有效地对转换和守恒进行综合以形成封闭系统。这些原则——我们刚刚就守恒附加性的情况分析了一个例子——构成了所有可懂性的条件。所以它们可应用于所有客体——物理的以及概念的或心理的客体。这就真正地算作支持了现实是可懂的(reality is intelligible)这一观点。最后,如果人们希望提出有关这种可懂性的理由问题,那么回答仅仅是,主体从根本上不过是一个在其他客体中的能动的客

体,但他的活动是自我调节的,并倾向于凭其生物学上为基础的认知同化能力而反作用地面对所有其他客体。"(同上,p.18)

5. 运算发展与可能性、必然性发展的关系

在描述了必然性发展的阶段之后,皮亚杰还深入阐明了运算发展与可能性、必然性发展之间的关系。这实际上是皮亚杰一再表明的内化发展与外化发展的关系。在可能性与必然性的发展之间,不仅存在着密切的平行性(如阶段1对应于靠类似性连续而产生的可能性;阶段2对应于具体的和受限制的协同可能性;阶段3对应于无限定的内涵和不受限制的外延的协同可能性),而且它们二者还与运算结构的发展有着确定的关系。"但是后者不是给这种发展提供方向的东西。在可能性表明分化、必然性表明整合的范围内,将在二者的联结中寻求运算的起源;另一方面,如果我们希望把一种原始的而不是衍生的形成能力归属于可能性和必然性,那么要看出动作的内化怎么样充分地提供具有运算系统特征的适当结构化的、可逆的结构,或者要看出可能性和必然性怎么样甚至在动作变得内化之前就被构成(即是说,在当它们以公认的贫乏的形式出现的时候),这是困难的。"(Piaget, Ⅱ, 1987, p.140)这表明,运算发展与可能性、必然性发展之间的关系是错综复杂的。

让我们先看"运算"在可能性、必然性形成中的作用。假定逐阶段的对应在可能性与必然性发展中一开始就介入了。从这种观点看,假定仅仅由"现实性"构成初始状态,把初始状态本身设想为与主体没有联系的一种纯粹状态,只是略往后必然性和可能性的联合建构才附加于这种初始状态。这样的假定总体上是错误的。这是因为,由于现实从一开始就被同化于主体的格式,初始状态就以在现实性、必然性和可能性之间普遍缺乏分化为特征。一方面,已知在数目和初级同化格式的结构的贫乏状态,现实被设想为它"必定是"这样的方式——导致普遍化的"虚假必然性"。[①]另一方面,唯一的可能性是主体实际感知的很少的变异。于是在一系列步骤中这种初始的未分化状态就被三种模态之间出现分化所跟随;但在第一阶段中,初始融合的许多残余仍然处于虚假必然性的形式,并且可能性局限于实际上实现了的东西。

那么,当可能性和必然性从它们起初与现实性的混合中开始分化时,可能性与必然性的共同起源是什么?从运算的观点看,回答是简单的。它们不会在客观地外在于主体的现实性本身得到发现,因为现实性只是"本相"(what it is),能被记载的可观察事实本身并不是或者包含在可能性,或者包含在必然性中。相反,后者自然起源于不断增加

---

① 皮亚杰举例说,甚至在物理学史的前科学理论中可以发现这种知觉。在关于心理发生与科学史之间的关系的书中,Garcia表明,亚里士多德的物理学构成一种可承认的构造化的和连贯的系统,其唯一缺陷是,不是从转换的前提开始,他把他的所有演绎都基于可观察物上(他当作是内在必然的),换言之,基于虚假的必然性上(Piaget & Garcia, 1989)。

的同化格式以及它们的互反性，这些格式被协调，从而导致推理能力的发展。格式的协调导致产生前必然性和局部必然性的组合（前必然性和局部必然性取代了初期的、概括化的虚假必然性）。然而，任何既定的组合也表明其他可能的组合。最后，外部的、外源的现实性开始插入出现必然性和可能性的这些新关系之内，成为更客观的东西——导致为什么、怎么样的问题，以及更一般地说是理解的问题。

本书是要研究认知发展中可能性和必然性的作用。那么，在运算的形成中，必然性和可能性的作用又是什么呢？皮亚杰说，我们并不关心解释一种孤立的运算的构成，诸如类的联结或交叉，而是关心说明任何类型的运算——这些运算聚集着那些包含三个组织化水平（整体、部分或子系统的水平）的系统——的本质特征，以及由特定运算及其产物所创造的各个因素。这种组织化似乎与完全适当理解了的机制——诸如反省抽象和完全的概括——相联系的，这种机制能解释从相对贫乏的结构到更丰富的结构过渡。如果我们将这些发展与生命有机体的发展相比较，就可以（仍然是在相当一般的水平上）在这些机制和在“器官”的形成中起作用的所谓组织者（organizers）之间做出类比——这对应于作为一个整体的认知能够随意支配的那种“结构”。

但是为了从另一角度考虑事情——例如在将灵长目或人科的胚胎发生与低等动物幼虫的胚胎发生相比较过程中，一个更一般的问题就出现了。这就是标志某些当代生物学家称为“进步”之特征的一般方向问题。皮亚杰指出，当我们问自己，似乎控制这些未中断的结构发展的一般机能过程——在科学史水平以及在其阶段序列中心理发生水平上——是什么的时候，在我们的发生认识论中也出现了这个问题。

如果仅仅说到从较少的结构到更发展了的结构过渡的机能方面——一个机能可以被多样类型的结构机制或器官（如同化）得以满足或练习，那么我们可以看到，它们显然存在于越来越多样化的分化和整合中。而且，正如皮亚杰一再表明的那样，认知结构的三种主要平衡过程之一，是在分化与整合之间的相互作用（李其维，1999，第245—261页）。现在则可以叫作“可能性与必然关系的相互依赖”。“换言之，可能性是开放之源，必然性是封闭之源。封闭由新的开放不断地取代，同样是我们所谈论的整合化过程的本质特征。总之，必然过程和可能性的形成都指向结构形成的整个过程，但却是在更高的水平上。”（Piaget，Ⅱ，1987，p.142）

6. 可能性、必然性与现实性三者之间的关系

在弄清了可能性、必然性各自的建构特点、发展阶段及其二者的对应关系之后，就可以从总体上概括一下皮亚杰关于可能性、必然性与现实性三者之间关系的理论了。因为紧扣三者之间的关系，是皮亚杰在模态范畴研究上的一个重要特点。正如他自己所强调的那样：“在探讨必然性的问题过程中，我们的意图不是研究模态逻辑，而是要把必然性与现实性概念的发展联系起来——正如我们在可能性问题上所做的那样。”

(Piaget, Ⅱ, 1987, p.3)

在皮亚杰看来,可能性总是作为相对于主体而不是在现实中预成的。如果在物理学中人们说到“虚功”(virtual work)等,这一概念也只是在物理学家的心智中被构成的。当一种真实的转换被解释为一种可能性的实现时,这也只是意味着,它从一开始并按其决定论就是真实的,即使它起初不是可观察的。对必然性来说也同样如此。必然性是主体的推论组合的产物,也不是对直接观察敞开的。人们凭观察所得到的东西,仅仅是变化着的普遍性程度。然而,皮亚杰强调:普遍性不是必然性。在一种普遍性被同化于另一种普遍性的地方,我们得到的是“虚假的必然性”(pseudo-necessities)。

至于必然性与可能性之间的关系,皮亚杰表明,任何形式的必然性源出于可能的组合——在可能性之间以及在可能性与实现了的现实性之间确立关系。互反地说,协同必然性产生新的可能性。既然可能性和必然性都是主体活动的产物而不是凭经验所给予的可观察物,这自然在二者之间存在着相互依赖。

皮亚杰的实验研究揭示出,可能性与必然性之间的关系是复杂的,甚至在初始阶段,在二者之间就存在着干预。就幼儿把什么当作“真实的”而言,提出了一个未曾预料的问题。由于起初在事实的东西与规范的东西之间缺乏分化,现实性——正如被4—5岁儿童所解释的——经常显得是观察者或发展水平更高的被试常看作虚假必然性或“虚假不可能性”(pseudoimpossibility)的东西。偶尔可以发现这种虚假必然性的许多例子,甚至在科学史上,正如皮亚杰在《心理发生与科学史》中所表明的那样。

必然性的发展与可能性的发展似乎是平行的。其初始的形式由简单的局部必然性所组成。这种局部必然性是在感知运动时期终末可观察的初级组合造成的结果,在前运算表象中进一步发展。在具体运算阶段,我们已经发现某些系统性的必然性类型,诸如递归、传递性和守恒等等。在形式运算阶段,必然性显然成为完全普遍的。皮亚杰假设,存在着各种程度的必然性力量——与当代逻辑学家所称的结构的力(force)相联系。但是,当说到不同形式的必然性的可变化的力量时,人们能指的是什么?皮亚杰认为,我们不仅仅是指一个结构所包含的必然关系的数量。我们相信,也存在着质上的、内涵上的差别。例如,将诸如同一性(n→n)那样的“分析判断”与像“任何整数被另一整数跟随着,n→(n+1)”那样的“综合判断”相比较,我们清楚地看到,后者包含大量的关系,包括序、n与n+1之间的相等间隔、单位的等值。但是整合更多的关系不仅是复杂性或丰富性的事情:因为它存在于一个整体之内独特的特征的联结,这种复杂性需要更大的整合力量。在这个意义上,必然性似乎在我们看来就是作为这种整合的一种度量。同样,可能性是分化活动的丰富性的一种指标。皮亚杰相信,这就解释了二者的发展的平行论。

一般说来,我们可以想象能容纳现实性、可能性和必然性的发展的普遍法则。这一法则会具体说明在它们关系中的三个时期。第一个是没有分化的时期:现实包括许多虚假必然性,而可能性则存在于实际现实的简单的、直接的外延中。第二个时期——与

群集和具体运算的形成相吻合——是三种模态的分化时期：可能性展开成协同可能性的家族；必然性超越了局部协调——产生了能决定必然的形式的运算组合；而现实性则存在于具体内容中。最后，第三个时期是在一个整体系统内三种模态的整合时期，以至于似乎在主体看来，现实性尤其是作为可能的东西的一组现实化。但同时又从属于必然联系的系统。

现在我们只需要就这些机制而言给现实性定位，即是说，把先验于知识而存在的客体本身，与客体所生成的东西——一旦它被包含于由主体所建构的必然性和可能性的框架之内——相比较。初一看，似乎"现实"在任一极上被可能性和必然性各自地吸收——以一种通过把现实同化于认知主体的建构和解释而丰富现实这样的双重从属方式。换言之，现实性在其两端似乎被主体的这些建构完全吸收或"消耗"：在开始，它被归结为不过是在其他可能的情况中一种特殊情况，在最后，它发现自身附属于必然的联结。但在任一情况下，它通过更好地被理解，以及从低层次的可观察物到更高层次的被解释了的现实性之提高，而变得更加丰富。在皮亚杰看来，这不应该被解释为唯心主义的结论（这里把现实性从属于主体的认知工具），其理由是这联系到了主体和客体之间一般的关系。事实上，现实包含着作为一种表征物理客体的有机体的主体，是主体由以产生知识的连续物理动作的中心。于是主体以一种互反的形式凭借可能性和必然性来整合现实性，即凭借主体能从事并且当协调时能导致必然性的那种动作。

总之，在可能性与必然性的建构问题上，皮亚杰进一步贯穿了他的主客体相互作用论。可能性和必然性仅仅是相对于主体的，而不是在客体中既定的。同时，我们有机体尤其是一个客体。皮亚杰说，"在这里我们看不出任何矛盾，因为每一有生命的事物——不像无机的事物——同时既是主体又是客体——作为行为的来源（这也包括有生命的植物，它们也作用于其环境）。这样，有必要假定生物学的可能性和生物学的必然性。这些最明显地靠保存和维持相对'正常'状态的生存的必然性，以及靠'不正常'的变异和导致进步的变异的可能性而显示出来。现在，常态和变态在物理学中已没有意义（随机波动则具有不同的性质）；但是它们——相对于可能性和必然性的存在，正如我们所看到的那样——可以被考虑为认知常态性（cognitive normativity）机体来源。"（Piaget，Ⅱ，1987，p.5）

这样，皮亚杰在可能性与必然性问题上就把自己与康德区分开来了。诚然，皮亚杰在"客体本身"（object as it is）和作为由主体所解释了的客体之间做出了区分。皮亚杰说，"这会把它与康德在'自在之物'（本体）与'作为显现之物'（现象）之间的区分等同起来。但这同样是错误的。因为主体在其认知活动中以不断适当的方式逐渐认识和重构客体。然而，每一进步也就开放了新的问题，以致客体变得越来越复杂。在这个意义上，当主体接近它时它退却了。这意味着，主体与客体之间的绝对差别减低为连续接近的一种机能。但总是仍然有一种相对的距离——客体处于一种"极限"状态，这完全不同于不可知的和永远不变的本体（noumenon）。于是，从这些情境中我们所学会的东西

是相当明显的:在可能性的发展中,与人们能决定必然性的绝对终点一样,不存在一种绝对的开端。任何必然性仍然是有条件的,将需要被超越。因而也不存在作为内在必然的任何定然判断(apodictic judgments)。"①(Piaget,Ⅱ,1987,p.143)

最后,关于本书的译校特说明如下:全书由熊哲宏主译。曾守锤博士翻译了"必然性"中的第二、四、七、九、十章。参加本书初稿翻译的有:李放放硕士("可能性"第一到十三章,各章注释除外);王中杰硕士("必然性"第三、五、八章);徐云硕士("必然性"第六章)。全书由李其维教授审校。

① "定然的",系亚里士多德逻辑学术语。用以指出一个命题的模态。"定然判断"断定某事必然如此或某事不可能,例如"7不能大于9"。

第一部分
认知发展中可能性的作用

导　言

要使我们的建构主义认识论摆脱先验论和经验论的立场，只是说新知识是调节过程(即平衡过程)的结果是不够的，因为总是可以假设这种调节过程本身是遗传的(在有机体体内平衡的情况下)；或者说，它是对复杂性的变化程度的学习经验的产物。因此，集中于可能性的发展，我们决定，从一个不同的角度来解释新知识的产生问题。显而易见，任何观念或动作在实现之前都必须作为一种可能性预先存在，并且一种可能性一旦被意识到，将会产生其他可能性。我们认为，新的可能性的展开问题是认识论的兴趣所在。

在人类发展过程中产生的越来越多的可能性这个事实本身，成为与经验主义的最大争论之一。事实上，可能性是不可观察的，它们是主体动作建构的结果。即使客体的属性在建构中起了一定的作用，这些属性也往往是根据对它起作用的主体来进行解释的。这些动作同时产生越来越多的新的可能性，这些可能性有着更丰富的解释。因此我们所涉及的是创造性过程，这和经验主义所乞求的对现实的简单理解是十分不同的。

如果可能性总是先于它们的实现，有人会提出疑义，这些可能性必然是预先形成的，因此不能作为维护建构主义地位的依据。针对这种说法，我们提供两种论据，一种是心理学的，另一种是逻辑学的。心理学要求对观察者的观点和被试的观点做出区分。如果相对于前者，可能性的范围似乎相当大，而对于后者的情况怎样还有待决定。事实上，我们的观察揭示，在儿童4到5岁和11到12岁之间，出现了一种渐进的丰富性，一种既是规则的又是复杂的质的发展。这些观察支持了这种假设，即可能性是逐步建立的而不是预先形成的。

至于我们的逻辑论据，则是建立在一种事实的基础上，即，可能性的集合这一表达只有与这些的可能性相关时才有意义，即这些可能性是由一种必然法则演绎出来的——例如，一个立方体的可能面数或一个多边形的可能的边数等。但是当我们考虑到一个主体在他尝试分析的情境中所逐步发现的所有可能的变化时，那么说到可能性的集合是毫无意义的，因为每一种变化都能产生新的可能性。总之，所有可能性的集合甚

至更开放,因为所有可能性本身就是运动中的另一种可能性。另外还有一种基本困境:如果一个人接受预先决定论的观念,及由此在任何可能情境中的可能的假设,这里就会存在错误的地位问题。一方面,错误是不可预见的,因此它们发生的概率不能被精确确定。另一方面,如果真观念是永恒性的预先存在的,那么必然能够得出结论(正如罗素在他早期工作的柏拉图时期所做的那样),即假观念也是永恒性的预先存在的(它们和真观念是共同存在的,就像“红玫瑰和白玫瑰”一样);后来罗素丢弃了这种荒谬的结论,仅为这一点我们就能颂扬他,这并不是否认一个纠正过的错误比即刻的成功能产生更多的未来可能性。

简言之,认知中的可能性本质上意味着发明和创造,这就是可能性的研究对建构主义认识论来说是头等重要的原因。(考虑到可能性只与主体有关这种说法时就会更正确,正如我们试图展示的:物理学的虚功只有在物理学家眼中才有意义。)建立了这种观点之后,我们的目标就是试图观察负责产生更新的可能性的机制。为了完成这个目的,我们必须找出足够简单的问题使得4到5岁的儿童能提供关于他们想象力的丰富的、有意义的展示,以及足够复杂的问题使得12岁的儿童认识到恰当的可能解决的无限性。因此,根据所用的特殊工具,我们把这个工作分为四个部分。第一章到第三章解决来源于在主体的动作或猜测中自发群集的可能性(用各种方式安排客体,想象部分隐藏物体的各种可能形状等)。第四到六章是关于有某种限制的自由组合的可能性(剪纸等)。第七到十章进入最优化的可能性(组装最大可能的客体等)。最后第十一到十三章解决几何图形的可能的建构。

在介绍主要假设之前,让我们先对一些专有名词进行限定。我们将区分三种类型的格式。首先,我们称呈现性格式(presentative schemes)为那些涉及客体的同时性特征的格式,它们不仅仅是表象性的,因为可能也是感知运动格式。当呈现性格式被组合的时候(正如在一种层级化的格式中),它们被保存。它们由先前的获得所决定,而且可能被应用于初始获得的内容之外。第二,程序性格式(procedural schemes)是被应用于指向一种目标的手段[我们可以称为与递归性(recursiveness)相反的前驱性(precursiveness)]。它们以连续的方式被赋予次序,但早先应用的那些格式后来不是必然地被保存。程序还依赖于情境,以至于对不同情境的概括化更困难,这显然可与呈现性格式的概括化区分开来。第三种是运算性格式(operational schemes),由前两种格式的综合所构成;在实时地被执行的意义上,它们是程序性的,但是对运算加以调节的结合性法则的非时间性结构,则具有更高层次的呈现性格式的特征。

这样,每一个体随意地具有两个主要的认知系统——彼此是相互补充的。由稳定的格式和结构所组成的呈现性系统,具有本质上理解世界的功能。而处于不断变动中的程序性系统,具有通过发明或迁移程序来担保满足需要的适当操作的功能(成功)。第一个系统构成认识主体(epistemic subject),第二个系统是指心理主体(psychological subject),因为各种需要总是相对于个体主体以及他们可能在某时经验到的不满足。这

些不满足——当它们最终出现时——不同于在结构中所发现的不完全性的状态。然而，一旦一种可能性通过程序性格式的应用而得到实现时，就产生了一种新的呈现性格式，因而出现两种系统的相互补充性。

但是，在解释可能性是如何产生的过程时，这些建构主义的思考仍然是不充分的。同时我们必须说明限制的作用，而主体需要摆脱这种限制，它与现实性、可能性和必然性之间初始缺乏分化有关。事实上，在呈现性格式中，任何客体或物质首先呈现给主体的不仅仅是它们是什么，而且是作为一种必然的方式呈现的，排除变动或变化的可能性。正如我们所说的那样，这些虚假必然性或虚假不可能性的信念，并不是儿童所特有的，而是在科学历史的所有阶段都可以发现的。伟大的亚里士多德相信直线的和圆的运动的(虚假)必然性，这样他就错误地描述了运动客体的轨道(⟶↓)，这和我们4到6岁儿童的想法一样！长期认为几何必然是欧几里得几何(康德甚至认为是先天的)，在汉密尔顿之前，认为代数必然是可交换的，在Bolzano和Weierstrass之前，认为曲线必然有切线等。对于儿童，这些虚假必然性更进一步：一个正方形绕着它的一个角旋转就不再是一个正方形了，且对主体来说它的边长似乎也不再相等了，月亮注定只能在晚上发出光辉等。

为了获得新的可能性，只考虑指向一个特殊目标的程序是不够的(或者最佳的，或者局限于对变化的搜寻)：个体还需要对真实的和虚拟的混乱进行补偿，当这种混乱被当成一种虚假必然性时，它就成为对现实解释的一种阻力。这种补偿机制，一旦使得个体能在特殊情境中克服这种障碍(虚假必然性)，就会使他们几乎立刻意识到，如果一种变化是可能的，那其他变化同样是可能的，这种变化始于最相似的或彼此对立的东西。

现在，我们的假设变得很清晰了：如果这种说法是正确的，即可能性概念是源于克服对现实解释的某种阻力，以及源于填补觉察到的裂隙——结果是由预想一种变异而直接导致意识到其他变异也是可能的，因此可以得出这样的结论：双重过程以其最一般的形式包含了平衡过程。但是尽管呈现性和结构性格式系统具有间断或持续的平衡状态特征，通过程序系统取得的可能性的性质也不过是一种持续可变动性。一旦获得一个特殊的结果，概括化过程就会进一步加强这种性质。来自必然的可能性与来自现实的可能性的区别在于，前者是直接蕴含在再平衡过程中的，且它能揭示一个主体先于其实际操作的潜能。然而，这些可能性，不是预先决定的，而是以一种新颖的方式，即每当主体以刚才描述的方式遭遇到一种阻力和开始觉察到裂隙(即每一种积极的或消极的干扰)时，这些可能性就会发展(或构成)。

在平衡过程中，这些产生程序和可能性的潜在性，在本质上是顺化机能的一部分。同化格式——即，呈现性格式——趋向于接受输入，但这只是提供内容的一种可能外延。另一方面，在许多场合下，它们需要顺化新的环境。我们所谈到的潜在性事实上是从一种水平变化到另一种水平的顺化能力的一种说法：这种可能的结果来源于寻求实现的顺化活动，反过来，顺化活动既依赖于格式的灵活性和稳定性，也依赖于由现实所

提供的阻力的程度。到目前为止,我们对平衡过程的描述限定在自我调节的方面。在当前的书中我们对于这个主体增加了程序的构成和新可能性的有效性的解释。一个单一模型存在两个补充方面,有两个原因:第一,改进和评估一个结构的自我调节是程序的而不是呈现性格式,它们由可能性及其机制决定。第二,可能性的产生始终服从于平衡法则,因为正是平衡过程致使再平衡并导致新的分化及其平衡,然后整合到新的系统中。

接着这本书提出两个主要问题。第一个是伴随着年龄的可能性的发展。按其功能,我们可做出如下区分:(1)假设性可能,有效的问题解决与错误混合在一起;(2)可实现的可能,根据先前的结果或先前组织化了的呈现性格式进行选择;(3)可演绎的可能,源于内在的变异;(4)公设性的(the postulated)可能,主体相信新的建构是可能的,但尚未能发现适当的程序。按其结构,我们将区分四个阶段:(1)通过类似性的系列(a series of analogies)而局部形成的可能性;(2)具体的协同可能(co-possible),一些可能性在被执行之前便被同时预期到;(3)抽象的协同可能,所实现的每一个可能性,刚好被看作是在许多其他可设想的可能中的一个可能性;(4)最一般化的可能性,可能性的数目被看作是无限的。

第二个目标是阐明程序或可能性的进化与运算结构的进化之间的关系:前者的发展是由后者决定的吗?许多近似同步的获得或许暗含了这种决定的作用,正如事实上一般的外部变化变成内部的并能被演绎(被推论)。或者,反过来说,可能性和程序的产生对运算系统的建构来说是必要的机制吗?我们将采用第二种假设,它提出,具有自身全部不足和错误调节的早期程序是如何发展成具有其适当调节性组合、逻辑必然性和封闭性的逻辑-数学运算的。这是我们将要讨论的一个中心问题。

第一章　平面上三个骰子的可能位置

与C. Monnier和S. Dionnet合作

为了使被试形成多样的程序，你能提出的最简单的问题，当然是问他们在有限的平面上，可能怎样改变为数不多的物体的位置。所以我们选择三个骰子（两个骰子之间的形状只可能是线性的，我们不像在第二章中那样问可能的路径）。但我们使用三个不同的平面：一个面积28cm^{2}的正方形，一个直径28cm的圆形，及一个底和高为28 cm的等腰三角形。这样做是为了观察在形状不同的平面上，排列能否保持相同。另外，被试可能会忽略或随意地思考引进的第二个因素。这第二个因素是颜色，骰子的每个面都有不同的颜色，且支撑它的面也被上了颜色：第一个是红的，第二个是绿的，第三个是蓝的。事实上，因为我们的一些年龄较小的被试是否采用不同的程序，取决于他们是否参照颜色或形状，所以增加此因素最终是有用的。

如何决定用一个合适的词语对被试下指令，是一个棘手的问题。由于三个骰子的任何定位，无论多不规则，都决定某种形状，我们首先要求被试"按尽可能多的方式在纸板上排列骰子"。然而，结果证明即便是年龄较大的被试对此指令的反应，也只是产生出规则的式样，尽管我们对变化的大意要旨是中性的（"你能用另一种方式做吗？"）。这使我们想到，也许被试将"排列"一词理解为"规则地排列"。所以我们把指令换成："按所有可能的方式在纸板上摆放这些骰子。"但分散的样子的出现仍相对较迟。在所有年龄水平，甚至"随便摆放它们"这一指令，都没被理解成激励他们形成不规则形状。

一旦被试穷尽了他们的可能性，我们就继续寻求价值判断："哪种是排列骰子的最佳方式，最正确的，最有趣的，最难的"等。这可能产生关于内在于主体程序中的主体的目标的有趣信息，最后的指令是去寻找"最佳"或"最差"的式样。

水 平 1

由于在其他的研究中，我们发现使用小变化兼有相似性的类比程序的结果是，儿童逐渐注意新的可能性。在目前的研究中，这种行为得到了特别加强，因为通过改变单独一

个骰子的位置,可以创造新的排列(尽管从路径A转到B需要一次各种要素的彻底重组)。

Mar(4;11)[①]“把它们放在……”等。他把三个骰子放在正方形的三个角里。“别的方法?”他把一个骰子从右下角移到空着的右上角。“别的方法……?”他交换对角的两个骰子。接着他把左上角的骰子移到右下角,然后把右上角的骰子移到左上角。最后做出一个创新:他把一个骰子放到了正方形的中间,对此创造的评价是这像个心脏。“它以前是什么呢?”*像那个*(他只记得开始做了什么,而不记得修正过的式样)。“你可以用多少种办法做这件事——10、100、1000?”*三种*。“你用了多少种?”……“还有其他的办法吗?”*没有*。但他仍然想出了一种新式样:把三个骰子排成一行。“很好。再用一种跟这种方法稍稍不同的方法排列。”他把最右边的骰子往右移了1cm。“现在,你能用一种完全不同的排列方法吗?”他把它们挤到下面,与边界邻近。我们继续在长方形上进行试验。Mar声明他不能把骰子放进角里,因为它是尖的;只在正方形里才可以(他指着它的右角)。他仍设法找到沿中线摆放的式样,接着在长方形里找到另一个式样,然后沿着其中的一条边找到式样。当要求他摆一个“错误的式样”时,他将两个骰子排成直线,把第三个放在45°的角上。“为什么那样放是错的?”*我心里猜这个是错的。那一个(三个排一排)是对的*。他也指出另两个不规则的式样是错的。同样,在圆里,那些在沿直径或沿圆周摆放的式样是正确的,而那些有一个骰子与其他的分散开的式样是错误的。

Eri(5;1)对他做出的指令同样是“按所有可能的方式摆骰子”,但先在圆形上摆,他摆出了15种式样——但所有的形状要么是线性的,要么是三角形的。线性的那些排列或者是紧密地或者是展开地。两种式样都只到达圆的边缘,但没有一种沿直径摆放。在正方形里,Eri做出了8种改变,其中7种改变中,骰子一边或另一边相接触。但保持了与在圆上摆出的式样非常相似的形状(三角的形状)。没有哪种式样是线性的,或包括四个角中的三个角。但Eri声称他摆出了比在正方形上更多的式样,因为它大多了。在三角形上,他几次被告知按他所喜欢的任何方式去摆骰子。他只找到了6种形状,那些三角形的形状——包括一些只有一个角的——和一种线性的,一种横在纸板中间的。问他能否找到一种“错的”,他提出了一种与他先前摆出的式样没什么不同的三角形的式样,只是有些不规则。对于把骰子摆到三角形的三个角中去的提议,他承认这是按“任何方式”摆放它们。当要求他考虑正方形上的颜色时,开始他只正确排列出同样颜色的隔开的式样;当要求他摆一个“实在糟糕的式样”,他摆出一个两两隔开的斜的式样。“为什么这是糟糕的?”*因为它不是一种颜色*。

Nat(5;4)摆出的式样与Eri在正方形上摆出的式样相同(包含三个角的式样除

① 4;11表示4岁11个月,本书余同。——译者注

外），但她认为不可能在圆形上再这样摆一遍。我们建议从第三面的角度把两个骰子摆拢（三个摆在对角线上），但她说在圆的平面上，这是不可能的："试着做一做。"她在45°角上沿着直径摆放骰子。"那是相同的吗？"*它不是相同的，因为它是圆的*。类似地，对她来说，不可能在三角形底上，再摆出我们建议她在正方形上摆的曲线形，*因为这是一个三角形，而那是一个正方形*。因而对这个被试而言，图形不能从背景中分离出来。对这些四五岁被试的常规的例子，我们必须加一个被试，他的方法由于"所有可能的方法"或"最好的可能的方法"的指令而彻底改变。

Yve（4;6）"我真希望你能按所有可能的方法摆放它们。"他在正方形的底上滚动骰子。"其他方法呢？"他又滚动它们。"那样是正确的吗？"*是的，因为不允许你再摆同样的形状*。他将这一程序重复七次，说现在，*有一个黄色的*，等。"那种呢？"（我们把三个黄色的面排成一排。）*那是骗人的，因为它们三个都在一起*。我们在一个三角形里排列它们。*那是骗人的，因为它是一种颜色*。"我们怎样摆才正确呢？"*你要滚动骰子*。但当我们要求他摆出"最好的可能的式样"，他不再介意颜色，也不再滚骰子了；他在正方形上按一种斜的线性排列，或一种三角形的式样（或甚至堆起来）摆，而且不关注角或底边。更惊人的是，他开始否定在三角形的底上摆出相同式样的可能性（他后来纠正了自己，但仅在一些尝试之后）。

6岁的被试发现了更丰富的一组变异，尤其是非线性的接近（品，品，品，等），但他们依旧仅通过成功的类比进行试验，而未预见协同可能的式样。类似地，他们仍认为最好的形状是规则的，而不怎么规则的形状是"坏的"，没有理解根据"所有可能的方法"的观点，所有式样一样好（水平2的被试则开始理解）。第三，被试仍认为在三种底上再摆相同的式样是不可能的："不。"六岁的Xav说，"你不能在正方形上摆三角形，在圆形上你能摆出的式样更多，你可以沿着圆的四周摆放。"但对同样是六岁的Har来说，"正方形更难，因为它有许多空的地方，就更不知道把它们摆在哪里。"他想象在正方形上把三个骰子横着摆一排，但"不是在圆上，因为它不是一个正方形"（它们的直径和长度分别都是28 cm）。至于也是6岁的Ben，他在三角形的底上摆出间隔很小的线性排列，我们把它照搬到正方形的底上，但他拒绝："不，它不是同样的东西。"

总之，在4至6岁的被试身上观察到的第一水平，包括Yve关于颜色的行为，具有一种通过类比建构可能性的普遍特点，从一种建构逐步朝下一种建构发展。任何时候，被试既不追求最特殊的式样，也不明白空白的地方可能构成的可变定位是无限的。这种思想到儿童到达水平3时才显现出来。还有Yve的例子，他似乎对无限可能的数量有所理解，当他随意地滚动骰子，即使在第二部分关系到形状的访谈中，他也肯定地说（像其他被试那样）底的形状限制了构造的可能性；即，他领悟了形状和底之间的相互依赖。这样，Yve滚动骰子混合颜色，这种看似随机性的行为（否则就是欺骗），能通过他在预测组合三个骰子上的六种不同颜色的可能性时感到困难，所以宁愿滚动骰子避开这种艰难的尝试，得到很容易地解释：他不考虑组合，忽略它们的位置而仅说出它们的颜色，

从而简化了问题，这样就与那些逐渐明白所有样式和形状都同样好的被试相比差得很远。

水 平 2

在7到10岁之间，在任一给定被试身上，你能观察到一系列新获得，它们逻辑上相近，但显现出来的时间不总是相同。这意味着，在某些方面仍旧存在水平1受限制的特点，但在其他方面已被克服。不同被试的这一过程是不同的。总而言之，这些获得在于从类比的、连续的投射可能性，发展到预期的和同时性的投射可能性。它们包括使可能的式样与底的形状分离。我们也看到系统地查找式样的最大限度的差异，及承认不规则的式样是可能的，并且与那些“好”的式样一样好。

Ser(6;11) 当要求他“按所有可能的方法摆放它们”时，他在正方形上将骰子滚动三次，成功地摆出了三种集中在中心附近的三角形式样，原因无疑是他的手一直放在那一部分附近。“摆的方法有很多吗?”*不，没有很多*。他又滚动了一次。“每次都是不同的吗? *是的*。大约有10、100、1 000种，还是一百万种方法?”*10种*。“你都会吗?”*不*。“你会几种方法?”*三种*。“哪种方法最好?”他轻轻地滚动它们。与在三角形上观察到的行为一样。“我要求你做什么?”*所有可能的方法，不论什么颜色*(可以看出他集中关注形状)。“用任何你会的方法摆它们。”他摆了个小三角形。“现在，随便再用一种方法摆一遍。”结果没什么不同。“你能说出什么时候用的是什么方法，什么时候不是吗?”*不能，不可能说出来*(!)“现在摆一个与那个式样完全不同的样子。”这次他在纸板上用手推着它们，并提出了五种不同的粘在一起的式样。“有没有哪种方法只能在那个上面(三角形)摆?”*有*。他滚动着骰子。“有一些这样的方法吗?”*它在所有三种(底)上是一样的*。总结：“你为什么滚动骰子?”*为了使用不同的方法*。“通过滚动和推动它们，你就能用同样的方法摆吗?”*可以，它是相同的*。

Cri(6;7) 发现了一种新办法，打开了通向协同可能性概念的道路：她滚动骰子，开始是两个，后来一次一个，总是在原地。这样她在圆上创造了17种不同的式样(最后两种是通过在周边移动骰子得到的)。接着她估计摆了10种样式。犹豫了一下，她承认可以在正方形上做同样的事。至于三角形，她最初断定它是不同的，因为你可以在每个角中放一个骰子。她重新考虑了这一点后推断说，*它们全是一样的*。

Alb(7;0) 做出两种有趣的反应。一种是当他从对称的、规则的式样变成一种不规则的式样时(两个骰子摆一排，第三个骰子只在一个角里并碰着第二个)，评论说：*这一种更好，我喜欢它是因为它(更)不同*。第二种反应是当我们要求他摆出一种(不正确的，并且你还没有摆过的)式样时，他回答道：*如果它还没有被摆过，那就*

说明它是正确的。接着他发明了一种叠合的式样,说:*它是正确的,因为这个骰子没有像以前那样碰到(其他骰子的)两边*。但他认为一些式样不可能在圆上摆,因为它没有角。

Nic(7;0) 立即看出由于三角形角、边和里面区域的作用,在它上面可能的摆法有7种,他看出了摆成小三角形的可能性。他预见有100种可能性,相信自己能实现10种左右。这是抽象协同可能性的第一个迹象。他宣称可以在圆底上以同样的方法摆,但最后在没有全面计划的情况下,他通过一个接一个地移动骰子,构造了大约20种式样。每种新的式样以某种系统的方式,不同于前面的式样。(这些变化不是随意的,至少不是完全随意的。)他认为在正方形上能摆出更多式样,*因为它有四个角,但在圆上不行*。但当他在一个角中摆出一个小三角形后补充说:*哦,不,在另一个(圆)上也行*。接着在正方形上复制了一种曲线形,最初他认为这种形状对于圆很特殊。为了得到不同的形状,Nic声明每次至少要移动一个骰子。当我们要求他不碰骰子时,他回答说:*那么,吹*。

Jac(7;9) 相信在所有三个底上摆出相同数量的式样(100到200之间)是可能的。他也同意通过滚动骰子来做到"按任何方法"摆它们。跟Nic一样,他认为摆出了边界才是错误的;他变换颜色并且认为位置更重要,但颜色也很重要。

Phi(7;6) 为过渡到演绎地思考颜色提供了一个好例证。在随意地排列出如*AAA*,*BCD*,*EEB*和*DFE*[①]等一些排列之后(没有任何计划),他宣布有10种可能性。当问道:"有多少种方法?"他解释说:*你摆三个黄色的,然后摆两个黄色的和一个其他颜色的,然后一个黄色的和两个其他颜色的。之后你继续照那样摆其他的颜色*。"还有其他的办法吗?"*没有*。"肯定?"*是的*。当面对三角形的时候,他立刻想出了7种线性的或三角形的式样。他努力试着在正方形上重复同样的图案,因为你可以假定正方形由两个粘在一起的三角形组成(他指出了对角线)。在圆形上,可重复同样的程序:在三个(底)上是一样的。"有多少种办法?"*10种*。"不是100种?"*不是,有10种;如果你想用100种办法摆,你就必须重复相同式样*。

Ter(7;8) 想法不同:*如果有10种办法(她最初只摆出其中4种),你可以在(三个底的)每个上面都摆出10种,但它们不是相同的。一共,约20种办法*。

Ris(8;0) 与Ter不同,她凭式样的规则性区分"好"式样和"坏"式样,说一个式样好。因为它几乎完全改变了:这里像一个三角形,*那里是一条线*。随后:*那个更好(五种组合),因为它们几乎都不同*。

Ste(8;3) 类似地:*那种更好,因为它不简单*。对于最差的式样,他仅摆出一种回转的式样,忘了当摆"好"图案时,也曾使用过这种对称。

Man(8;6) 更喜欢紧凑的式样,而且当要求他摆"错误的"式样时,他摆的是松

---

① 后者是指骰子的6种颜色。——英译者注

散的形状，但不是随意的——而是使骰子的间隔很远。

Ver(8;11) 与其他孩子的反应相似，但发现要摆出“好”式样，不需要纸板，这样就解除了约束。

Lau(8;3)　当要求他按“你知道的任何办法”摆骰子时，开始他声称已经这样做了；然后发现可以把它们都混合起来，那样的话一个人可以摆出许多式样，约200种，但他只摆出了约20或25种。“还可能摆出超过还是少于200种式样?”*超过*。“1 000种是不是太多了?”*也许*。“那么一百万种呢?”*那太多了*。

Tie(8;9)在一系列完全不同的尝试后，逐渐了解所有协同可能的排列的等价性。“它们中有没有一些比其他的好?”*它们是一样的*。“再让我看看其他可能的摆法。”他又补充了一些。“有没有一个比其他的好?”*没有，它们都是一样的*。但是，他没有想到无序的概念。

Isa(9;2) 像Tie一样，认为所有的式样都同样好。“不可能摆出一种更好的式样吗?”*不可能，我认为不可能*。“那摆一个非常差的呢?”*我不能*。“为什么?”*因为你只能摆出正确的式样。估计有约1 000种可能性*。

Fre(10;5) 反应相似。*分散的式样不是错的，只有超出底才是错误的定位*。“当它们在底上时，它们都是正确的?’”*是的，但摆法不可能超过100种*。

我们引用了许多例子来表明如下的事实：首先，这一发展水平中进步的普遍性——推论的协同可能性逐渐代替初期类比的、序列的模式；第二，反应的变异性，它并不必然属于一种水平。我们期望找到一种更严格的内在逻辑。在呈现的其他研究中，我们通常对一种亚水平2A进行区分，即“具体的”协同可能性，数量上有限，但都实现了，以及一种亚水平2B，即“抽象的”协同可能性，数量更多(但非无限)，被试只实现了其中的一些。即使在当前的研究中，我们大体上发现一种类似的发展，仍不能根据两种亚水平，将我们的被试彻底归类，因为被试倾向于表明混合反应式样。例如，Ser(这一组中年龄最小)首先滚动骰子，这看来像一类高级程序。当我们要求摆出不同式样时，他也适当地做出反应，明白式样不依赖底的形状，以及“任何方法”的一般概念。但尽管存在这些成功，他仍只预测出10种协同可能性，认为只能实现其中3种！这一谨慎想法将他置于具体和抽象可能性概念之间。另一方面，7岁的Nic(实现了他所估计的100种可能性中的10种)，当然还有Isa和Fre(1 000种中的100种)也已达到抽象可能性概念水平。

不过，对于要实现的可能性来说，为数过多的协同可能性概念，似乎暗示所有形状都相等，因为它们都是“可能的”(当然是不同的)，并由此引起对不规则的或“分散的”式样的接受。格式塔式样的虚假必然性应该已被克服，因为“坏”式样也是可能的。但这一水平中少数被试发展得那么好，有点意外；此外不存在与年龄的明确关系。这些被试中大多数只断言“最好的”式样是那些“最不同的”(这对于前述水平1，已是明确的进步)。这样，Ser用无论什么不同的式样，使这项研究变得清晰；Alb和Ris说“它更好，因为它更不同”，Ste说“因为它不简单”。但事实上，他们依旧坚持规则的式样，甚至8岁

的Man发现"分散的"形状是"错误的"。这与协同可能性的逻辑结果背道而驰，协同可能性的逻辑结果是，所有形状不论其规则性，都一样"好"。我们观察到这种发展的进步，是一种隐含概念，它在Ser的行为中很明显(不可能区分他在滚动骰子的行为中很明显的"任何方法"，和他对这种知识的明确否定)；接着在Alb的行为中(他关于"正确方法"的论证)；接着彻底了解所有的式样"一样好"，如在Tie的行为中所观察到的("它们全都一样，没有哪个比其他更好")，但他没有提及不规则性。最后，Lau、Isa和Fre明确地承认不规则形状是正确的。

这些协同可能性概念结构不一致的问题表明，这样的行为肯定由演绎格式(代替初期类比格式)形式所造成；不过，至今它们只是局部的和偶发的，且没有发现可能性与必然性之间这种综合的证据(标志运算结构开始的特征)。从我们的被试身上，所观察到的最佳演绎推论是Cri和Phi的半组合推论。不过，它们非常有限。例如，Cri，在构造出17种式样之后，估计式样总数为10种。当Phi将在三角形底上发现的可能式样，运用到正方形底时，展示出恰当的演绎推理，因为对角线将正方形分成两个三角形。但他仍认为只有10种可能性，因为如果有几百种，它们仅仅是这10种不同式样的重复！

与原先对程序性转换和呈现性概括之间的区分相比，从一种底到另外两种底的可能性的转变问题非常有趣。两者都产生新可能性；前者不依赖对必然性的考虑而进行，而后者绝对与必然性概念协调。事实上，程序格式相当依赖背景，且很难把它们从第一个背景中分离，并运用到新的背景上去。在当前情况下，背景根据形状与底的关系而界定。我们已在Fre的例子中("圆形的底没有四个角：正方形底有更多可能性")观察到，甚至年龄到了10岁5个月的被试，仍没能进行转变或感到犹豫，而一些6到7岁的被试已逐渐明白了相等(对于Ser和Cri，"所有三个底都一样")。

总之，我们已为大家指出这一水平的两个主要特点：协同可能性的演绎性质，以及就它们的逻辑结果来说缺乏一致性，未提及所设想的协同可能性的有限数量。从这点我们倾向于得出这样的结论，即在可能性的发展中，这些有限的进步不可能是形成具体运算的直接结果。相反，它们可能构成此发展的必要框架(因为运算也是运用于可能的转换的程序)。在此框架中，运算可通过将某种必然性形式和可能性概念相结合而得到精心组织。运算反过来对理解新开放和新可能性起作用，正如我们将在下一水平(3)中见到的。

水平 3

在11到12岁的被试中，一个重要部分在水平2仍保留它的功能作用类型，及它的各种特点，如所设想的可能性的有限数量。但在这些延迟者中，我们仍发现某些预示水平3的评论。

Ena(11;2)只看出约10或50种可能性，但在将其中一个骰子仅移动几毫米，形

成一个三角形式样时，注意到那只有一点不同。但她补充说，*它的形状还是相同的，所以它不是另一种方法*。这里，我们可以发现，她隐含地理解可能的小变异之多样性，这将导致形成无限概念；但由于数量有限的范畴（直线式样、三角形式样等），便出现了冲突。

Ita(12;8)无条件地断言，*没有错误方法，即使骰子散布在各个地方等*。但不可能"*以所有可能方法*"排列它们，这实际上否定了实现所有可能性而非抽象潜能的那种可能性。这样在水平2仍有某种固着，但存在向水平3发展的趋势。

另一方面，接下来的被试成功地将可能性的无限性概念化——或者在内涵中（"任何方法"）或者在外延中（无限数量）。

Cia(13;11)先摆出一些式样，接着滚动骰子，说，*那种方法你可以说它是任何方法*；从这一点，Cia总结说，*如果你察看所有厘米，它就几乎是无限的*。这里我们论述的是Ena对"小差别"的推理的继续。但Cia想出了"无论什么"的概念，就数量的评估来说，它仍是守恒的。

Cat(11;6)从以任何方法滚动骰子开始，说：*只要它们待在底上，它就是正确的；如果它们在外面，那么它就是错误的*。他推断，*只要改变每个骰子的位置，或随意地滚动它们，它就是无限的*。这里我们看到"任何方法"概念和外延的无限概念都非常清楚。

Guy(12;0)摆出一些相当规则的式样，接着没有凭借滚动骰子便得出结论说，*通过以厘米为单位将骰子稍稍移动，就有无限方法：你可以改变一种颜色或一毫米，你必将注意到所有改变，那要花好几个月*。"那样做可能吗？"*对于这样的大小，将需要复杂计算*。"如果底非常小会怎么样？"*那是一样的：如果你围绕骰子计算，距离将相对较大。但那将是一样的，我将以毫米而不是厘米为单位继续进行：像在小提琴上（间隔沿每条弦改变）*。"那么高度呢？"*那将摆出任何形状*。

很容易发现这一水平与以前水平之间的不同。在水平2B，儿童明白他们摆出的式样只是所有可能式样中的例子，所有的可能式样太多了，不可能将它们全摆出来。但他们相信，所有式样都能按已有效地构造出的式样的模式实现。因此，想象中的数量相对适度。水平2的新颖之处在于，儿童并非简单地从他们已摆出的少数式样中，推论出根据同一模式、进一步改变它们的可能性；相反，通过使用抽象反省，他们推论出通过最小限度但反复的变异，进行构造的法则。这些包含有"察看所有厘米"（Cia），"改变一毫米"（Guy），或仅重复滚动骰子（Cat）。在这种情况下，可能性不能再被有形地实现（这使Ita烦恼），但它们能以类比自然数集合的方式被概念化——通过n+1的规则产生。根本上说，这意味着可能性逐渐与必然性概念相联系——这两个概念经历一次综合——或不断增长的概率逐渐与可能性结合（如在Cat的例子中，他感到滚动骰子的结果与"位置的小变化"相似）。这解释了从少数可能性概念（它们的特点仍是水平2B的外在的变异）向内在变异的演绎无限性（与水平3的建构相适合）转变的原因。

第二章　车辆的可能路径

与C. Monnier和J. Vauclair的合作

在儿童可以理解的可能性中,从走路这样的感知运动技能中获得的,显然是从A点达到B点的各种方法。我们决定去观察,在如此基本的行为领域中,从那些最初实现的或预见的可能性开始,是否能发现(你已在更复杂的领域中发现)一种产生新可能性的发展机制。关于这点,我们考查了两个问题:第一,儿童能立即发现各种协同可能性吗?或者他们最初继续进行实验靠的是成功创新吗?第二,这些协同可能性迅速引起无限扩展吗?或最开始它们在数量上似乎有限吗?

为促进这一分析,我们决定不用空间里简单的点代表界限A和B,不用简单的手势和图画代表路径,因为这要先假定,存在一个抽象的空间概念,它通常包含周围的物质对象。然而,在现实中,只有存在物体,才存在它们的相关位置,它们的间距,和(就运动的客体来说)它们的方向(通常,朝着一个目标)。这样,在Descartes和Fermat提出坐标系以前,几何学只研究客体的形状,不研究它的空间。我们选择一个小玩具车作为一个运动的物体,一些玩具物(树等)作为边界A和B;还有一个有家具的房间作为空间,在那里将一个标杆P作为一个障碍放在A和B之间。这种装置使我们能观察某些有趣的限制:前运算阶段的被试建构的路径由物体决定,而处在形式运算阶段水平的被试,通常,逐渐发现无限的方法。12岁的被试Pop就是一个好例子,我们要求他找一种从A到B的方法,他对此问题的反应不是从一条直线开始,而是立即断定:方法有无限多。

在研究的第一部分,我们仅要求儿童指出路径。无线电操纵的玩具车只充当一个运动的客体。在实验期间的第二部分,我们要求儿童移动车(按或拉一个按钮分别使车向前向后,一个方向盘使它向左向右)。这个程序产生关于可能性的新问题——与连续尝试和观察实验有关的问题(见下文——汽车的机制)。

水平1A

处于1A水平的被试通过连续的变异继续进行实验,他们仅有的原则是改变目标物体或采用小的变动。

Pie(4;11)　“让我看看你从A走到B的所有方法。”*直走*。“你能用其他的走法吗?”*不能*。“试一试。”*你可以把车放在车库里*。(他重复了笔直的路径)。“但要用另一种方法。”他描述了一条稍微弯曲的路线。“再用另一种方法。”*不行*。“只有两种方法吗?”*是的*。“为什么?”*因为只有一辆汽车*。我们竖起了标杆。“现在,再做。”*不可能,因为有一个标杆,所以我们不能到达B,那会出事故的*。“试一试。”他走了一条弯曲的路径。*我绕着它走*。“再用别的方法。”他又重复了弯曲的路径,但绕过标杆,在标杆处转回,而没有走到B。“别的方法。”从A到B的一条弯曲的路径,从右边而不是左边通过标杆。*那不是相同方法*。“还有别的方法吗?”*没有*。“当你上学时,你总是走同样的路吗?”*不是*。“那从A到B呢? 总是同样的吗?”*是的*。

Mar(4;6)　*直走*。“别的方法?”*直走然后转弯*。(往B走时稍微弯曲一点)“还有其他方法吗?”与第一条曲线对称的一条复制曲线。“其他的?”半途绕B的一条曲线。“有许多种方法吗?”*如果我想要的话有6种*。“也许有20种?”*没有*。“试试其他的方法?”他不记得他的第二种路线,所以重复了一次。“你怎么想到这些方法的?”*我想到了,我们在汽车里去过的路*。“再用别的方法。”从A到B的一条弯度很大的路线。“再用别的方法。”他又加宽这条曲线。“再用别的方法。”*我已用了,所有的方法*。“你可以移动东西来找到新的路径。”*是的*。他把B往后移了一点。“你能想出更多的新路径吗?”*可以*。“哪些?”*我想不起来了*。“只想一种。”*直走*。“这种你前面已经走过了。”*不,以前它在那儿,现在它在这儿,所以我可以走另一种直线*。“那是一条不同的路吗?”*是的*。“如果A更远一些,有多少种路径?”*另外6种*。“但前面有7种。”*哦,那就是7种*。“与前面相同的更多还是更少?”*更少*。“为什么?”*地方更小了*。他指着他认为如果B被移得更远就空了的地方。我们竖起标杆。他只有拐弯。“刚才不能这样走吗?”*不能*,(他刚才也走了同样的弯路。)*我刚才没有这样走,因为标杆不在那儿*。“有这个标杆,你就能走很多条路吗?”*三条*。“为什么?”*因为这儿(A和P之间)和那儿(P和B之间)没有很多地方*。

Pat(5;5)从A走到B,在B的后面做一个小的转弯而结束。“另一种方法。”她从A走到墙,再从那走到B。“另一种方法?”她重复了同样的路径。“另一种方法?”她从A走到门,再从那儿到B。*这儿*。她继续从房间的一个角落,或接近一张长凳、一个桌子、一个篮子等经过,从而改变路径。我们把B移到B′:她开始又像之前处理AB一样走。我们把B放在下面:她展示出一条同样形状的路径,并说它与刚才的是一样的,而并没有注意到方向是垂直的。

Col(4;11)向B行进之前先绕过一个桌子,然后绕过其他几件家具,最后同时绕过两个桌子。“那是最近的路线吗?”*不是,你可以从这个桌子底下走*。“那么,如果一个几乎是气体的东西呢?”*像那样(直走)*。他回顾他的步骤,指着房间的四个角落,表明他已去了所有地方。

这些可能性的有趣之处在于,它们只是通向一个目标或更多目标的路线,或躲开障

碍物的方法，而不是空间中的路径。物体是这样重要，以至于在没有它们的情况下，被试想象不出走同样的路径。(在多了一个标杆时，Mar就认不出他在没有标杆时执行的路径。)似乎只有Col向房间走的路径是像这样参照空间的，但他的做法只是说他已接触了房间里所有的物体；另一个就是Mar，他(指的是他用家庭轿车出游)认为长度发生改变的路径，在方法上前后根本不一致：这时，一段长的距离包含的路径更少，因为它是狭窄的，稍近的距离则相反，因为这段短距离(*AP*和*PB*)在另一方面有更小的"空间"。

总之，在这一水平，空间可能性归结为通过或多或少直接的，或者或多或少明显的曲线来绕过的方法，从一个物体向另一个物体接近。唯一不同的变化在于，想象中数量更多或更少的可能路径。被试在回想已经走过的路径形状时，体验到很大的困难，但他们很容易记住不同的目标物体。这个事实告诉我们两个道理。第一个是与目标物体相对，处于这一水平的被试对路径形状的改变，关注非常少。第二个是所想象的可能性的性质实质上是连续的，这并不惊人；但我们已经看见某些预示，甚至还有一种把可能性归类到协同可能性系列的能力。这些初始的限制是有趣的，因为它们指向调节的过程，它们消极和积极的反馈将逐渐引起系统的和最终的运算程序，及关于可能性的演绎推理。

水平1B和2

像那些水平1A的被试一样，水平2B的被试靠一种连续的战略，继续产生一种接一种的可能性。但他们注意路径的形状，而不是简单地改变目标物体，产生各种可能性。

> Nic(4;10)以直走开始，然后中途继续沿一条直线，接着一条短的垂直线，再变成一条斜线向*B*接近。其后的尝试以同样的方法开始，接着三条线段形成一个秋千形，并做出如下解释：*那不是完全一样的*。随后的路径由五条直线段组成，第一条和最后一条是横向的，第二条和第四条长度相等，并与第一条和最后一条垂直，第三条线段连接着它们上部的末端，像这样：_┌┐_。下一条路径把这个正方形形状的绕道增长一倍，是这条主线下面的一条对称的路径。然后他加上与一段楼梯的两个台阶相似的角。从那儿，Nic继续展示径直地通向*B*的四个不规则的台阶。这些台阶使他联想到走波浪形路线，他指明五种或六种这样的路线，作为他最初直线段的扩展。当我们把*B*移到*B'*，正弦曲线在数量上超过其他的线路。当我们加上标杆后，Nic认为那没有改变任何东西，这在他走出所有绕道，并估计有100种方法之后并不惊人。

> Ave(4;6)以同样的方式继续进行：展示了*AB*之间的一条直线之后，他加上了两个相当大的U形绕道，一个接着另一个。接着他使它们更小并隔得更远。第四

条路径从开始就变成直的。第五条是一条大曲线。第六条加了一个圈，第七条再把那个分成两个，一个接着一个，诸如此类。当我们把A移到A′，他创造了一条新的路径，。有了标杆以后，他返回AB之间的直线，加上了一个小的绕着P的绕道，但那(标杆)不重要。

Rel(5;2)只走曲线，但有许多变化：(1)一条大曲线形成一个绕着B的大圈，再回到A；(2)一条类似的曲线但有一个环；(3)一个水平的图形；(4)对此进行改变，在交叉处走出一个环；(5)与(1)对称的一条绕着A的曲线。

这样，水平1B与水平1A产生连续可能性模式的特点相同：*A*路径引起另一条*B*路径，之后，运用类比的方法，即，在做出x修正的同时，保持一些x特点；之后通过另一个类比，这条新路径*B*产生另一条路径*C*。每个新的类比都包含相似和差异，相似之处可能与x或x'，也可能与y——一个还未考虑的特点相关。差异则似乎是x''或y''，诸如此类，从*C*继续进行到*D*，等。这样，既没有任何方案类的，也没有递归程序类的任何迹象，至于保持的相似之处或采用的创新，只有类比的迁移和连续不断的变异。然而，相对水平1A而言，存在发展，因为现在对路径的分析，根据的是它们的空间转换，而不仅考虑有关它要到达到或避开的物体，像在水平1A(事实是，已观察到的变化仅涉及路径的形状)那样。

进一步的发展不在于发现新路径(这些根本上仍然与所有下列水平相同)，而在于产生可能性的新模式和程序的迁移。即在水平1，新可能性的产生是连续的，且没有任何协同可能性的预先计划，标志着水平2的特点之进步——慢而费力的进步——是形成这种协同可能性的正在发展的能力。在访谈开始或过程中，被试在试图进行一套变化之前，先把它们概念化。这里，我们论述的是推理机制的发展，此发展从类比程序开始，逐渐导致演绎地产生可能性，并且最后在11—12岁左右(那是相当晚了)，导致数量无限的任意变化概念的形成。但是，这种关于可能性的概念发展的发展，不伴随内容的丰富。即一个能预测一“系列”可能性的被试，也许不能想象其他可能性，因而与水平1的儿童相比，也许创造的路径更少。

Cri(7;1)立即说：*最简单的方法是直走，要不然你可以曲折前进*(她实际上展示了弯曲的路径)……*仍可能有其他的方法*。这次，她展示了由直线段组成的锯齿形。接着她概括说：*一条笔直向前，其他的环绕它，而那一条路有拐角*。“还有其他方法吗？*我有个主意，但行不通*：，等。当我们把*A*和*B*移到别处，她断定那将是一回事(同样的路径)。

Rin(8;5)宣布：*直走，然后像那样(S横向的)，沿曲线，两条曲线，再直走，三条曲线，然后再直走*。在实施她的想法时发现其他的变化，像水平1B的被试那样，这次发现了连续变化。移动*A*和*B*后，Rin对判断路径是相同还是不同感到犹豫，接着发现仅仅因为*路径在这里继续走下去*，所以不同的是方向。但她相信如果竖立

更多标杆，可能路径的数量会减少。

Ric(9;5)列举协同可能性*直走，转弯，然后其他的方法*(他的对称的路径)……*然后走曲折路线*；他估计大约有100种方法。在一条曲线之后，*像那样你能走其他许多条路线*。这样，他最终承认有1 000种可能性因为这个房间大。加上标杆后，他最初犹豫不决，但接着终于明白无论有没有标杆，他都能走同样的绕道：*啊，是的！我能这样走*。

Iba(10;4)未经琢磨便想到极端的例子：*直走，或在教室里到处走*。他也考虑了中间的解决方案。然而*A*和*B*间距的简单变化将使路径更长，但它们将相同。事实上，除了一系列协同可能的曲线之外，他坚持直走。当创造出更多实例时，他将估计的方法数量从50种增加到100种。

这些观察报告的有趣之处在于，在可能性的形成中，它们所表明的发展的性质。此发展主要涉及内涵方面(对一些质的变化的同时概念化——全都同样可能)，而不是外延方面(协同可能性的数量)。原因是被试在描述中只引用那些准备实现的可能性，在这一意义上，最初协同可能性的概念(Cri和Rin的可能性概念，可能你把它归到水平2A类)有一种具体的性质。中间的例子没有被想象出，至少不是明显地。在这种情况下，可能性的数量当然急剧减少。另一方面，这些被试在一种抽象水平上推理，即任何一个质的改变只是许多其他改变中的一个(这样我们可将这些被试归到水平2类)，在这一意义上，根据Ric和Iba这样的被试做出的反应，协同可能性的具体概念很快引起既是内涵的又是外延的程序。这些程序或者在一个连续统一体上，或者在描述两条相邻的路径时插入居间值，涉及引入轻微的变异。因此这导致所估计的协同可能性的数值大大增加，在Ric的例子中从100到1 000，在Iba的例子中从50到100(这里数量只具有符号意义)。

如果从水平1B转变到2A，已标志凭借类比的程序朝演绎推理方向的某种发展，那么从水平2A转变到2B就更重要了，因为它导致新型协同可能性产生，超越了详细的、直接的、实际上现实化的限制。不过，应指出水平2B的完成中有一个限制：9到10岁的孩子(即使不是所有)获得的协同可能性的抽象概念，仍然局限于一类特殊可能性(通常是一类弯曲的路径，但在11岁被试的身上我们注意到一类平行直线，它可能是复杂的)；它还没有得到概括以包括所有可能性的可能集合。在某些例子里，我们观察到一些行为明显是较低发展水平的残余。例如，10岁5个月的Lau说，在A和B之间竖立两个标杆后，“创造一个回环线路”是可能的，但“如果只有一个标杆，那将不可能”，他甚至断定绕着标杆的一条路径是不可能的；那就是说，如果标杆不在那儿就不能走同样的路径，“因为你不能与一个不在那儿的物体相接触(！)”总之，集中于路径的空间外形的策略，更可能产生多样和抽象的协同可能性；那些集中于目标物体的路径，趋向于产生较低水平的、更有限的和具体的解决办法。这些观察报告表明，向概括化的协同可能性概念的演变，是一个缓慢和困难的过程。

水 平 3

向水平3的演变发生在11—12岁时期，如我们刚指出的，这种演变不是通过单一的、间断的跳跃而达到的，而是发生在水平2B期间的一段长而艰苦的发展过程的结果。

Gil(10;10)在水平2从这样做开始：*你可以直走或走一些小的绕道，从后面经过。他绕着*B、A*或者两者，成功走出五种更宽的绕道。*“有多少种路径是可能的?”*几百种。这样绕着B走就有大约100种路径了。因为你想拐多少弯就能拐多少弯，所以是无限的。*“如果我们移动A和B呢?”*我想那大概是一回事。搭起标杆减少一种路径(直线)，但又多了几种其他的。但即使没有标杆它也可以拐弯……所以，那既没有减少任何路径，也没有增加任何路径。*

Pop(12;0)“让我看看所有可能的路径(*从A到B*)。”*有无限多(!)。*“举个例子呢?”*直走、锯齿形、S形拐弯、每边走半圆形、各种不同长度的S形。*“你是怎么想到这些办法的?”*首先，最快的走法，然后越来越复杂的走法。*

这里我们的被试所称的“无限”是一个新概念。这个概念既包括内涵中不确定的东西，也包括外延中无限的东西。如我们在水平2B中所详细阐述的那样，很容易明白这个概念如何从抽象的协同可能性而来。事实上，抽象的对于被试来说意味着，他们所展示的不多的实现的可能性，仅是一整套可能变异中的例子(例如，Ric说的1 000)，可以从整体上推论出它们，但既不能展示出，甚至也不能一个一个地想象出。看来，很自然地，关于所有这些变异是如何发生的问题迟早会被重新阐述。从对结果的总搜索(像水平2的Ric说“像那样你能走其他许多条路线”)，我们发现被试倾向于分析改变本身，这种改变将一种变化引向下一种变化——即分析一种产生可能性的新模式。当Pop说“然后越来越复杂的”时，这表现得明显，Gil断定“你想拐多少弯就能拐多少弯”也暗含了这一点。被试逐渐思考创造的模式和它的递归性质，这一事实在逻辑上导致不确定的概念代替“许多其他的”，外延中无限概念代替任意一些有限数量。

这种无限可能性的构造，与形式或演绎假设运算之间的关系，是我们仍必须讨论的总问题。形式运算的特点之一，就是它有能力推理可能性，现实浸透于这些可能性中，且必然环节逐渐将这些可能性相互联系起来。我们在这里发现了所有这些行为。问题是，形式结构的发展是否能解释可能性概念，或是否它以其他方式形成。有三类事实与这个问题相关。最一般的事实是程序准备和创造结构：最初的类比程序、有各种类型推论的推理程序、连续水平上的运算程序之间有连续性。第二，我们注意到，发展中存在一种类似的连续性，及各种可能性的增多，从Pie在水平1A想象出一两种，到Gil和Pop发现无限多种，标志水平2B特点的成千上万种抽象的协同可能性，也为此做了准备：这第二种类型的连续性当然有利于证明，可能性概念的发展存在一定程度的自主。第三，

可能性质变的连续性，从最初的类比形式到具体形式，再到抽象协同可能性，伴随着从非循环性的、非本质的变化到本质的、循环的变化的改变。这自然将有利于运算结构的发展。总而言之，两种发展类型显然是相互联系的，但产生可能性的能力发展，似乎对于运算结构的发展来说构成一个必不可少的框架。

汽 车 机 制

在访谈的第二部分，汽车被放在被试的前面，要求被试使它移动。用无线电操纵汽车，我们给被试一个又一个按钮的控制器，按它就使车前进，拔它就使车倒退。还有一个方向盘，面对着它的被试必须往左转它使车向右转，反之亦然。

这里我们关注的不是因果关系，而是假设的形成，及被试在尝试它们时，修正和充实它们的方法。我们对包含错误的可能性特别感兴趣，且对失败的反应比即时的成功更感兴趣。当然，给定当前假设可能性的观点，不可避免的是，观察到的行为与那些刚描述过的行为之间，呈现某种系列的相似性。

在水平1A，被试没有发觉一个要解决的问题：面对方向盘时，他们必须将它朝与汽车要转的方向相反的方向转动。相反，他们认为是机械装置出了问题——虚假必然性的信念。

Yve(4;6)将方向盘转向错误的方向，接着干脆用手转动汽车并做结论：*它坏了，因为我想让它走这条路，但它却走另一条路。*这表明他认为方向盘没有按正常方式起作用。

Nic(4;10) *因为你在车上把背转了过去，所以它开不动。*

Mat(5;1)即使不考虑反转的方向，还是在转动方向盘时出了很多错。他停止，放下控制器，只用手操作汽车。

Rob(5;5)认为这辆汽车可能发生故障了，但当他发现改变车的位置后，它就能朝希望的方向走时，令人惊喜地宣布：*它又好了。*“你知道为什么有时它朝正确的方向移动，有时却不能吗?”*不知道。*“是不是有窍门?”*我觉得没有。*“什么变了？当它朝别的方向转时?”*我不知道。*

我们看见，在这一初始水平，反转现象未被理解成作为定向转动的同一状态之客观、可能的变化，而是由于对(虚假)必然性的曲解，反转被理解成事件正常次序被打乱的某种反常现象。这个错误不是被归因于违反了规则的被试，而是被归因于汽车，或汽车未正常工作的控制机制。

在下一水平(自然，有居于两个水平中间的反应)，被试把意外的结果看成是从现实中得到的可能性；不过他们做了有效区分(不再只是简单地归诸机械装置的故障)，即使没有成功理解问题所在。

Nat(6;3)首先成功进行了一些移动(包括在未做任何预测时,本能地进行尝试,结果反着走出一个完整的圆形),随后在向相反方向转动时失败了。“能说出它将往哪走吗?”*不能*。“如何才能确定呢?”*我不知道。通常,当你把方向盘转向窗户时,汽车会往那走。有时它会撞到墙*。“这是正常的吗?”*不,它不正常。有时它往这边拐弯,有时往别的地方拐弯*。“会不会往这边拐弯,但却拐到另一边去了?”*是的,有可能*。“怎么做呢?”*我不知道*。他又试了一次,又犯了一个错误:*车轮走到别的路上去了*。“为什么会这样?”*我不知道*。“朝另一边走试试,肯定对你有用吗?”*是的,有用*。

Olg(6;6)　同样的错误和迷惑。“可不可能知道它是怎样起作用的?”*是的,有可能知道*。“你知道吗?”*不知道*。“有些人知道吗?”*是的*。“怎么知道的?”*他们做试验*。

Mic(6;11)　像其他的被试一样,通过反转方向盘的机制,成功改正了他的错误。但是,在他的口头描述中,他说的正好相反,当事实上他向左拐弯时,他声称他在向右拐弯,所以这种情况和规则应是他所相信的。

Tia(7;1)　另一方面,经过反复试验,成功改正了他的错误,并给出一个关于反转的正确描述:*汽车应向门那儿走,所以我只有将方向盘转向窗户*。在执行他自己的指示时,还是犯了个错误,将方向盘转向门。他对此感到迷惑,并开始怀疑前进和倒退机制的规则性:*我希望当我按按钮时它不会往后退*。

Rix(7;0)简洁地总结出这个水平的策略特点:*你永远不知道该往哪条路拐弯。每次你都要尝试*。

这些反应与在水平1B看到的那些涉及路径的反应相似(见上文),因为它们存在于显示在连续性中的类比可能性。演绎的协同可能性概念尚未出现。在这项任务中,不同之处在于通过试验而不是心理建构发现新可能性。令人吃惊的是被试既不试图寻找解释,甚至也不寻找使他们能预见结果的一般程序。这样,即使Olg承认存在这样的解释——她虽然不知道,但其他人应该知道——也只能说“他们做试验”。即是说,知道的人也将通过寻找类比继续下去。

在下一水平,与我们水平2A的被试类似(见上文),我们发现第一个演绎可能性的迹象。但是,在操纵控制器时,协同可能性——实际上性质仍是具体的,由寻求解释汽车的意外行为引起,而绝不是由被试所做的预言引起。

Dan(8岁)　当他面对车时,将方向盘转向窗户,使车朝那个方向走:*不,那不对*。“为什么?”*因为走错了,汽车*。“那么?”*我们必须这样转(反转)*。“那么这里(类似的情况)?”*也要朝另一条路转*。“如果你在前面,而你想往后走呢?”*也要朝另一条路转*。他继续做了六次试验,但还是犯了三次错误。

Jes(8;5)　呈现反转时,有同样的反应。“如果你要往后退该怎么办?”*那将是一样的*。“转弯?”*向左*(正确)。“那么?”(实际上她向右转。)“那是对的吗?”*不对*。此类错误经常发生,但毫无疑问它是由过分将反转的作用概括化造成的,被试已经

逐渐发现这一点。

Tie(8;6)进行反复试验,但:*因为汽车向后走,所以它朝另一条路拐弯*。但像Jes一样,首先他认为*车在反转时是不同的*。

Osc(9;6)首先认为控制器影响了一般的反转,与车轮和方向盘朝一个方向转的真实的车相反。在当被试没有面对车时,这导致了一系列的错误;接着他发现,*当你在后面时(在车后面),它朝那走,但当你在前面时,它就朝别的路走*。

Isa(9;1) 在反复试验之后:"为什么它朝别的路走?"*就像那样*。"但如果你比较……?"*你在前面*。

Ivo(10;4)有同样的反应。最后他总结:*当我面对着别的路时,我必须朝不同的方向转*。

最后,在水平3[一个被归为水平2B类的孩子(9;5)几乎达到,他只犯了两个错误],这个孩子只进行一次尝试就找到了规则,随即自发地自我纠正。

Cos(11;1) *我转错了,方向。为了解释,我必须从车的后面走……这里(在前面),是相反的*。

Pop(12岁) 只做了一次尝试后,*不,必须走另一条路,因为我跟车面对的不是同一条路*。

在这一水平,我们发现了这个概念,即通过将现实融入一个协同可能的变化系统(通过必然联系而彼此相关),你能做出因果关系的解释。容易明白为什么从经验中发现这些可能性起,它们最初就能通过部分的法则彼此相关,就像我们在水平2A发现的具体协同可能性概念一样,交织着错误与成功。我们只在水平3才发现一个真正的演绎可能性概念,它在第一次自我纠正时显现出来,而这是它与必然性相整合的结果。这些事实的有趣之处(从水平1A的虚假不可能性,到水平3的直接演绎推论)是可能性的演变之间的平行发展(比预料的更一致)——它们不是被试所建构,但不得不在外部变化的真实世界中发现(在它们被演绎成因果关系系统中的内部变化之前),以及那些随意产生的可能性的发展(诸如在路径的例子中所看到的)。

第三章　部分被隐藏的物体的可能形状

与 E. Marbach 合作

在别的研究中,我们要求儿童或者以所有可能的方式排列或建构物体,或者通过任何想象得到的程序解决一个简单问题——即,在每个例子中想象一个尚未实现的潜在情境。在这一章中,我们提出的问题则是:对于部分被隐藏的物体,儿童如何描述看不见的那部分。这就意味着,我们研究的不是关于对实体进行转换的可能性(因为这些是现存的,即使看不见),而是关于阐述这种实体的假设。既然这样,那么受到修正的只是这些假设。我们希望在这种情况下查明,我们能否观察到与其他情况相同的发展。就最初反应而论,十分自然地猜想,物体看得见和看不见的部分完全对称,似乎明显强化了虚假必然性,它限制想象中的可能性数量。此外,看不见的部分有形地存在这一事实,可能造成一种障碍,尤其与可能性的增多相抵触。这在一个例子中可能特别明显:有一个盒子,盒子两边有圆形的洞,从中伸出两个三角形,代表物体的两端,我们要求儿童画出这个物体的中间部分。有趣的是,我们在 11—12 岁的被试身上观察到的反应,与在建构任务中发现的相同。一个 12 岁的孩子,画了一个钻石形和一个圆柱形物体,当问:"你能用其他方法画吗?"回答:"哦能,如果你想画所有的形状,你就能想象任何可能的方法。"这样,这个被试把被遮住的实际形状,看成想象中无数其他形状的一个特例。问题在于,被试是如何从中级水平开始(已经看出一些可能性,但只是那些他们实际能画出的形状),逐渐想象不能全部实现的协同可能性(由于这是无限可变的)。

方　法

这项研究使用三个问题(材料Ⅰ到Ⅲ)。(Ⅰa)我们呈现一个放在桌上的硬纸盒,儿童能看到的所有面的颜色都相同。问题涉及坐在盒子前面的儿童看不到的面。(Ⅰb)实验者在盒子下面加了一个与盒子底面积相等,但明显没有盒子高的支撑物。

(Ⅱ)我们呈现部分被隐藏在棉花里的物体:三角形的和不规则形状的物体,类似于"鹅卵石"或"岩石",我们的被试常这样称它们;也有某种结构的物体,从看得见的部分能识别它,例如结晶体和贝壳;最后,是一个乒乓球的上面部分。

(Ⅲ)我们呈现一个硬纸盒,两边伸出三角形,可将它们看作一个部分被隐藏物体的部分,或两个独立的物体。我们请被试考察此物体(但要求他们不触摸它们),然后问他们一系列问题。(a)第一个问题涉及被试看不见的面的颜色和形状。(b)部分被隐藏的物体被同时或连续呈现:“棉花里的东西什么样?”“中间什么样?”“末尾什么样?”接着:“可能是别的样子吗?”“你知道了吗?”“为什么你认为它是那样的?”“它可能有多长?”“你认为有多少种可能?”“你还能看出多少种可能?”另一个问题,不总是被理解:“下面有没有不可能的形状?”“鹅卵石”看得见的部分是三角形的。(c)问题属同一类。首先,没有任何暗示说从盒子伸展出的两端能连接在一起,我们要求被试想象看不见的是什么,并做出所有可能的猜测。然后,我们把伸展出的物体朝一边稍稍拉了一点,使另一边移动,并提醒说两端可能是一个物体的部分。

水 平 1

对于前运算阶段的被试来说,部分被隐藏的物体是它所是。即,他们在对可见部分的功能的直接知觉的基础上进行想象(这包括儿童将问题Ⅲ的三角形之间想象成空白处的例子)。虽然在水平1B,儿童可能在一种还是两种可能性之间犹豫,1A的儿童只看见一种:他们确信唯一要做的事是从正确和错误中做出选择。他们想不到必须想象其他的可能性。这里是一些水平1A的例子。

Phi(5;1) 问题Ⅰ:“你看见所有的面了吗?”*没有*。“多少?”*四面*。“背面,是什么颜色?”*白色*。“你肯定吗?”*是的*。“可不可能是别的颜色?”*不*。“为什么?”*因为这个盒子全是白的,所以背面不可能是其他颜色*。“你的一个朋友告诉我它是红的。”*那不是真的*。“为什么?”*因为,如果他那样说(如果他是对的),那也好,但不是真的*。我们加上支撑物。*那是个正方形*。“下面是什么颜色?”*白色*。“可不可能是别的什么颜色?”*不*。问题Ⅱ:他只通过延长三角形的底部(隐藏了)扩展了三角形。“能不能用其他的方法?”*不行,因为它是一个三角形,而三角形,总有三面*。“真的,不可能有一点不同吗?”*可以,长一点*。问题Ⅲ:首先,他认为两个伸展的三角形是两个独立的物体,被空白处隔开。接着,当他看见当我们触动一个,另一个就动时,他想像一个圆柱形的连接物。“你有其他的想法吗?”*有*。他通过画两个尖端接触的钻石形,在独立的物体和两个锥形的连接物之间找到一个折中。之后,他没看出其他可能性。

Ali(5;4) Ⅰ:*盒子是紫色的,且背面的颜色相同*。“肯定吗?”*是的,因为我知道所有盒子每个面的颜色都一样*。对于支撑物,她的回答一样。Ⅱ:她将两个三角形连接到一个普通的矩形底上。她通过画对称的半圆将半圆画完整。

在亚水平1B,对于虚假必然性显出一定的犹豫。但被试尚不能想象各类协同可能

性。他们仅开始质疑，提出的解答是否真的正确，或是否有其他更正确的解答。

Pie(6;0)　Ⅰ：白色(背面)。“可不可能是别的颜色？”可能。“肯定？”不，我不肯定。但对于支撑物，他猜是红色。“但是，为什么你说是红色呢？*因为我想它是红色的*。Ⅱ：简单的扩展，此外他看出关于一个“岩石”的可能变化——将它变得更厚。Ⅲ：他坚持圆柱体的解答。

Fab(5;9)　对问题Ⅱ，想象出两种但仅两种不同的方法：扩大三角形看不见的部分，或将它放在有平行的边的底上。之后，他发现了使两者结合的可能性：一个有一条直边和一条斜边的底。

Lau(6;7)　对问题Ⅱ，想象不出三角形被隐藏的部分：*我不知道(下面是什么)*。当我们用一个结晶体代替它时，他通过扩展使它完整。不过，他断然否认下面隐藏的可能是一大块。*不，它像那个，我肯定，因为岩石结晶体绝不会像那个*。Ⅲ：他看出两种可能性——一个长长的连接物或两个分开的部分。

这些反应提供给我们的信息，是关于儿童在想象可能性概念时遇到的困难。可将主要障碍归为如下几类：在真实的世界中是它所是的东西，它们像必然性；没有其他的可能性存在。由于盒子的每个面通常颜色都相同，儿童将这看成一个普遍法则。它的必然性来自区分事实与规范的失败。这意味着由于一个必然的事实不能被否定，所以只能存在一种可能性。我们所有水平1A的被试给出的答案，与Phi关于盒子背面颜色的回答一样清楚，其他许多水平1B和2的被试——包括Ali——都以同一方式开始。至于部分被隐藏的物体，它看得见的部分看起来是规则的，由于类似于刚讨论过的虚假必然性，它看不见的部分的形状肯定也是规则的。这说明了简单的扩展或对称的解决办法的优势。由于虚假必然性的补充——“虚假不可能性”，通常想象不出其他的解决办法(诸如在水平2中发现的)。

这样问题是解释儿童是如何从现实性=必然性=唯一的可能性这个无差别的概念，到一个开放的系统的可能性。你可能把这个过程描述成辩证的过程：论点是A是必然的，反论点A'是它的否定，综合论点是A和A'联合在B类多样的可能性中。这个联合是这个过程的最终结果。[①]这个辩证的否定过程，和发展到新系统的可能性的心理发生的根源，存在于一个更一般、基本的过程中——平衡、不平衡、再平衡的连续。虚假必然性的最初状态视被试遇到的问题而定，可能在较长的一段时间内持续稳定，但它由于两个原因倾向于不平衡：这是纯粹主观的肯定，且被试没有积极寻找辩护理由。不平衡表现在一种怀疑状态中：Pie对盒子背面的颜色不肯定——完全相同或是不同，Lau对于三角形被隐藏的部分不冒险猜一猜。如此似乎清楚的是，再平衡在这个例子中在于被试承认可能的形状有多样性。这意味着，怀疑状态的不平衡带来关于想象中的差别的一种新平衡。这种新平衡通过集合协同可能性，开始代替虚假必然性的状态。

① 这在所有水平上都是如此。在科学史上能发现一个例子：A=代数学认为必然是交换性的(虚假必然性)。A'=交换性的否定(汉密尔顿的四元数)，以及B=一般代数学。

在过渡状态的亚水平1B,我们只发现这个系统的协同可能性的开端。事实上,被试只讲到“两种不同的方法”,如Fab所说(Lau在问题Ⅲ中也这样说)。至于Pie,当被问到关于盒子背面的颜色时,开始带着怀疑猜测它可能不是白色的,如此还提出了支撑物的一种不同颜色:但他没有看出一些可能性,而断定是“红色”,仿佛白色的非必然性质仅导致这种二选一的唯一可能性。

水平 2

从具体运算阶段的最开始(我们必须试着解释这种紧密的同步性),被试发现一些协同可能性。根据这些可能性的产生模式,能将它们系列地归类。

Zul(7;4)在盒子背面颜色的例子中仍处在水平1。但对问题Ⅱ,她想象了三角形的三种可能性:只能看见顶的一个大三角形,大部分被隐藏的正方形的一个角,和一个相似的矩形的角。对于半圆形,她首先画了一个球,接着是两个重叠的球形,较低的球连在另一个球的约四分之三高度处。

Mon(7;9)同样在回答问题Ⅰ时失败,但回答问题Ⅱ时她用两种底——一个线性的底和一个半圆的底,将三角形画完整。最后她把它画得像极不规则且明显不对称的球体上的一个尖(像一个两侧是小山丘的山顶)。对于问题Ⅲ中的两端,她将它们描绘成被一个棒连接起来的物体,或每端各有一节棒,且长度不同。

Fre(7;9)回答问题Ⅰ时,想象盒子的背面的颜色可能与看得见的部分相同,但不肯定——它也可能是红色的,等。加上支撑物后,Fre做出类似的回答,补充说也可能有一个从中戳过的洞,或可能由“*粘在一起的不同颜色的小片片*”构成。回答问题Ⅱ时,他提出三角形可能更高或有圆形的、规则的或不规则的扩展。但回答问题Ⅲ时,他只能联想到两个分开的三角形——事实上,是两个相互对称的隐藏的钻石形。

Ben(7;11) *是灰色的,但也可能有人把它的背面涂上各种各样的颜色*;但对于支撑物,她想象不到它可能是空的。回答问题Ⅱ时,她想出大约10种可能的扩展,其中只有一个形状是规则的;随着她继续想象,其他的就变得越来越不规则。但她仍没有就此得出结论说,有可能将它们画得无限复杂。回答问题Ⅲ时,Ben只想到了规则的形状,或像Fre的那些分开的形状,或由一个点来连接。

Cat(8;7) 问题Ⅰ:*可能是许多不同的颜色:白色、黄色、灰色、橘红色、粉红色、绿色、黑色、蓝色、红色。也可能有不同的条纹*。又回答了一次:*它里面可能是空的或满的*。Ⅱ:*有几种可能*(她画了几个连续的和不连续的形状)。*那可能真的是许多不同的东西*。“有多少?”*7、8或9、10、11、12个*。

Tie(8;o) 问题Ⅰ:所有可能的颜色,还有点缀,除非没有要闭合的面。在问题

Ⅱ的回答中，多样的、不规则的形状。“还可能有多少种不同的？”*1 000*，或*100*，或*200*、*300*、*400*、*500*。“哪个更接近，1 000还是100？”*200*(！)。在问题Ⅲ的回答中，对称的物体又一次导致回到规则性：两个三角形，或分开，或通过一根细棒或一个矩形连在一起。

Fel(9;6)在回答问题Ⅰ时：*它是灰色的*。“会不会是别的颜色？”*可能——绿色的、紫色的、蓝色的、白色的、黄色的。就这些*。支撑物：*一样*。*不过可能有个洞*。在回答问题Ⅱ时，规则形状和其他形状的混合。但在问题Ⅲ的回答中——在若干对称形状(分开或连着)之后，在它们之中有个横着放的钻石形——带两个不同的尖的长矛形。

Bir(9;0)回答问题Ⅰ时，能清楚地看出所有可能性，包括在(盒子本身)底部有一个或若干个洞；还有所有可能的颜色。但稀奇的是在她这个年龄，她没有将所有协同可能性想像成在抽象意义上同时协同存在，而是想象成具体、连续的现实化：*哦，是的，如果你做一个不同的盒子……如果我在你每涂一种新颜色时闭上眼睛*。对问题Ⅱ的反应与其他被试相同；但对问题Ⅲ，在一些规则形状的连接物之后，Bir继续想象一些锯齿形和一些不规则的曲线形。

Lai(10;0)　*任何颜色。也许背面什么也没有*。

这些反应提出了若干问题，第一个是怎样解释从局限于两种可能性的水平1B，到这里所观察到的增加的数量的变化。不过，即使是对于“鹅卵石”(Tie将它限制在200)，这个数量仍不多，这与水平Ⅲ不确定的无限性特征离得很远。此发展过程当然与缺乏论证两种可能性的局限性有关。只要被试将他们自己局限于仅一种可能性(水平1A)，他们就能找到用于那个末端的虚假必然性的根据。但除非两种(或如Fab所说“只有两种”)彼此间是否定的关系，它们才能得到解释：A和非A。但这里我们要论述的不是否定，而是差异，且每种差异能通过混合或变化引起另一种差异(Fab从他的“只有两种不同的方法”得到了两者的混合)。总之，两种程序的发现引起了怀疑(“为什么只有两种”)，且这个不平衡提供给被试再平衡的推动力，激励他们寻找其他的转换。

这种靠形成新的有效可能性的再平衡机制，与程序转变类型的特征有关。从第一个程序转变到第二个程序(水平1B)，构成一个将会在水平2导致更大转变的开始。这类转变不同于运算的概括化(甚至简单的扩展类型)，它在于使一个较早的系统从属于另一个更一般化的系统，其中较早的系统仍然是一个子系统。由于程序转变通过类比进行下去，因而事实上是横向的——即，通过利用相似性(作为对应)，同时不忽略必将发现的差异。转变以像范畴的算符那样一种方式起作用，但没有“遗忘”维度，因为(相反地)新可能性，即与以前知道的那些不同的可能性，必须被揭示出来。

由于增加新程序靠的是横向的类比，而不是包含，这些转变仍然是开放的，而且是相互依赖的。因此，不可避免的是，一旦一个特殊的转变发生(像水平1B两种可能性之间的转变那样)，它就必然伴有新的转变，它产生的不是(至少不是立即产生)分类——

由于没有从属——而是我们称作系列的新开端和可能性。例如，将问题Ⅱ中可见的角，转换为一个大三角形的角，之后，Zul继续将它转换为正方形的一个角，接着转换为矩形的一个角。Ben把这个角与一个非三角形连接起来，接着她将它转换成越来越不规则的形状。但，在保持转变的类比特性时，问题Ⅱ中的三角形本身产生了越来越不同的可能性；不过，在问题Ⅱ中，被放在对立端的那些，继续朝对称施加长时间的压力——这就解释了由我们的被试(从Mon到Pie)所提出连接物的规则性。只有9岁的被试(Fel和Bit)通过创造对称的接合点，和问题Ⅲ中的不规则形状，才表现出从水平2到3的转变。

总之，在类比的基础上，程序转变成为全新可能性的无限源泉，是由于相似性和差异性的结合，A和B之间的类比之后是另一个B和C之间的类比，然后是另一个C和D之间的类比，但A和C或D之间没有清楚的类比。在不存在类包含或系列化时，连续的类比仍缺乏任何一种递归。如果有时一个程序包含一个目标指向，这个前驱的特点不影响这样的类比——尽管事实上这一探索由它来指引(但只是作为一种趋向来指引)。这样，程序转变的系统处于持续不平衡状态；或者你可能说它表现演变中的平衡过程的特点——它实质上是不完整的，直到我们在水平3发现一个相对完整的状态。但要了解它准确的特性，首先我们必须试着解释水平2的局限性。

事实上，很容易看出它们的原因。水平1A表明完全缺乏现实性、必然性和可能性之间的差异。通过比较，水平2标志了差异的开端，但有一个局限(这并不令人吃惊，已知具体运算阶段的时期)：被试能理解的可能性仍是具体的，被试能通过所执行的动作将它们都实现。水平3的被试(11至12岁)，将谈论“无限”，不再依赖于物理动作，而是依赖被试的推断能力。而Fel在回答问题Ⅰ时，列举了6种颜色并得出结论，“没有了”。Bir(也是9岁)确实谈到了“所有”颜色，但她补充说，实验者必须一个接一个地将那些颜色涂在盒子上，她将“每次闭上眼睛”。这确实离形式的概括化很远。Tie声称他看见了“所有形状的鹅卵石”，但他将可能性限制在200种，与Lau的拒绝(在水平1B)相比，这的确是个进步，但与无限性相比仍不够。

这又将我们带回了通常遇到的问题：造成这个水平的具体运算的原因，是不是这些依赖具体现实化的可能性系列的本质局限性，或者是不是这种具体的性质减慢了可能性的发展？选择前一种解释的理由有三种。第一，类比和程序变化比运算更具一般性，且更早出现在发展中：在某些情况下，可能在感知运动水平它们就已出现。第二，协同可能性系列实质上由识别相似与差异而引起，另外，运算结构需要各种类型的积极陈述和消极陈述之间的精确平衡。第三，似乎从对现实性、可能性和必然性这三种模式的无差别知觉状态，导向越来越有差别的概念(且最终导向三者的整合)这一过程，比逻辑运算发展更一般化和遍及各方面；因此，似乎是这种全面发展决定了运算结构。

水 平 3

大约在11岁或l2岁,你可以观察到一种突然变化,在水平2变化的一些具体、有限的协同可能性后,突然导致无限可能性概念的形成。

Pat(10;7)　首先,回答问题Ⅱ时,通过相当有限的变化继续进行试验,但这些变化因显现出连续性的可能性而显得有特色;对于“鹅卵石”,他通过扩展继续进行:*它可以一直向下延续,或也许更短,也许向下延续到底的一半*。“为什么你要说‘也许’?”*因为鹅卵石可能是各种形状*。(处于水平1B的Lau否定了一种想法,即结晶体可能是一大块物体的一部分,他说:*如果它位于一个岩石上,可以*。)对于半圆形他先将它画完整,接着切割它。切割两次后,他说:*可以有更小的,如果你再切割……直到无限(!)*。

Ber(11;0)在问题Ⅱ的回答中,根据长度、宽度和曲率进行了两个或三个较小的变化,然后说:*你没有做出许多,仅够激发我们的想象……让我们假设这代表所有的形状*。在每个例子中,他都重复,*可能是任一种形状*。

Cla(11;3)在回答问题Ⅱ时:*任何形状,只要你能看见一个突出的顶*。对于问题Ⅲ中直线形和弯曲形的反应相同。

Ano(11;2)　问题Ⅱ:*任何形状,只要它伸出的末端是三角形。其余的不重要*(=可以是任何东西),*因为看不见它*。

Sam(11;10)　*不能断定,形状不确定*。

Arl(12;0)　*你能想象所有可能的形状*。

从通过类比实现的可能性,转变到演绎可能性,且立即被推广到不确定的和无限的可能性,这种看似突然的转变,使我们对此产生了一些兴趣,并需要对此做出解释。首先让我们回想一下类比作为程序转变的内源原则,并由此产生新可能性的作用。已知解决一特定问题(这里是画出隐藏的物体)的特殊的开始程序,被试可能会问自己,是否有更好的形状,或仅仅不同的形状。在我们的实验中,我们问这些问题;但在日常生活中,必须查明也能够查明,由反复试验造成的初始程序,及被试的格式和数据所需要的调节之间的平衡,所以要不断地提问。如果这个新的尝试与前面的相比过于简单,它就增加不了任何新的东西。如果它太不同,就不可能立即弄清楚。这样,唯一可理解的方法是类比,它既不是简单的等同,也不是纯粹的不同,而是两者的协调。这里因为连续的类比是非递归的,所以更容易想象新可能性:B之于x特点可以与A类似;C之于y(B和C共有的)而不是x(不是出现在C中的)可以与B类似;这样A与C之间没有类似,即使A是通过B到C的。正是凭借这种类比过程,水平2的具体可能性,在不要求运算的解答的问题中产生。那么,我们如何解释,这些同样的问题在水平3产生演绎程序,甚

至到了被试用“任何种类”(Ber和Cla,等)和“无限”或“不定的”(Pat和Sam)这些词来思考可能性的程度呢?

让我们返回到类比(正如我们已经看到的,其中每一个相似之后总会有一个差异,反之亦然),甚至在Pat的反应中出现了两个新要素:第一,所提出的变化趋向更多或更少(越来越长或越来越短,等)。第二,在被试想象的不连续状态之间存在连续的无限中间状态。与类比相比,这种双向的量化意味着,相似和差异之间的关系,未变成简单的外部变化的线性连续,而是组织在内部表征的变化的递归系统中。结果,即使是看不见的差异——更不用说极小的变化——能在不同等级的相似性后被察觉到。在其他的研究中,被试容易识别甚至完全觉察不到的那些相似性[①],它们掩饰在不同程度的转换之下。这些是标志着形式运算阶段的特点的一般特性。另一个有关觉察不到的差异的研究是,那个棒靠感觉不到的微小推进力移动,所以它的移动只有复制若干次之后才可见。像较小的被试一样,这里11岁的被试同样不依靠他们的感觉;但是他们说,例如,“也许它只移动了一点点(一开始往右),要不然它从来不动。”同样地,他们不求诸观察或测量,而通过纯粹推理得出结论:当他们面临这种情况,即假定相似性以表面上差异性为前提时,每个动作将产生相应的反应。

这将我们带回在水平2遇到的问题:是不是运算结构的发展,引起所观察到的向新可能性开放的进展?或是其他途径?关于这点能说的只有两件事。第一,如我们相信的,由于导致运算发展的是平衡和自我调节机制,我们必须也假定,在可能性的形成中存在某种调节过程。在协同可能性系列的构造中,及趋向递归变化的心理表征发展中,这种调节过程清楚地表现为相似性和差异性的相互影响,以及它们的平衡。这样,由于任何一种调节过程都涉及可能变化,所以可能性的调节和引起运算的调节所固有的可能性,必然是平衡化的一般系统的一部分——一种内含的、整体的机制。第二,我们必须考虑必然性概念的发展(将在另一部分中研究),它受平衡的一般法则支配(如我们已在水平2结尾详述的):现实性、可能性和必然性(虚假必然性)之间的最初无差异,随后逐步发展的差异性,以及最后在水平3,现实受可能性之间的必然关系影响。换句话说,差异与整合之间的平衡。如果是这样,显然,通过将运算结构的发展与一般发展(本身是平衡机制的一部分)相融合,我们较早的分析结果与这个假定决不矛盾。但是,在相似性和差异性的稳定群集的意义上,仍需证明这种程序类比中的调节是如何发生的,尤其是后者如何通过否定的组织过程——仍依赖水平(2)具体运算的特定内容,但当可能性通过必要环节协调时,获得纯粹形式的特征——实现它们最终的形式。

---

① 参见本书第八章。在那里,用同样的积木建造最大的建筑物这一任务,11岁被试认识到无论哪种方式安排积木其体积都是守恒的。

第四章　分割正方形

与 E. Marti 和 C. Coll 合作

我们决定观察一种像剪纸一样平常的行为，以比较在两种情况下可能性的形成——一种情况是不提问题，另一种则有预先规定的问题。在前一种情况中，我们向孩子呈现若干 7 cm^2 的正方形纸板，唯一的指令是用“任何你喜欢的”方法剪它们，将白色的正方形放在橙色的正方形上，并注意到它们大小相等后，再用剪下来的纸片覆盖橙色的正方形，也是 7 cm^2(粘在一个不规则平面上)。即使这种相等构成了一定的约束，它并没有给被试造成任何问题。它只是使我们发现，他们如何解释“纸片”和整体的关系。在另一种情况下，我们提出两类问题：(a)用所有可能的方法将正方形剪成两片、三片或四片；(b)将正方形剪成两个、三个或四个相等的部分，就数量和大小提出问题，如下面所展示的那样。

自由切割：水平 1A 和 1B

在这初始水平上认识到的唯一可能性，是赋予部分某种特殊意义的那种可能性——即，使它们离开整体，离开要剪的正方形纸板的意义。让我们同时注意到这些与整体无关的“纸片”或“部分”，不能用像“一段音乐”或“一个愉快的晚会”这样的语义表达来解释，以指明一套或一类中特殊的和自足的部分。水平 1A 被试的反应揭示出相当不同的一类问题，这类问题起源于我们在 1921 年观察到的那种类包含(在此例中为空间)的困难，那时我们看到儿童把像“我的一部分(或一些)花”这种表达的意义，比作“我的很少的花”。所以我们像这样换着问：“什么是部分？”*就是被剪掉的东西*。“那另一部分呢？”*没有其他的了(!)*。这里有两个例子。

Nic(5;5)在证实橙色的正方形是相等的，并接到用从白色正方形剪下的纸片覆盖它的指令后，剪了一个比橙色的正方形小的正方形。“有多少纸片？”*一片*。“它是什么？”*也是一个正方形*。“你能盖上橙色的正方形吗？”她放下她的小正方形。“那么那个呢(剩余部分)，你可以用它来干什么？”*我们也可以放下它*。“它也是一片纸片吗？”*不，它不是一片纸片*。“你能想出别的方法吗？”她又从白色的纸板上剪下一

个小三角形。一个三角形!“有多少纸片?”一片。“你能盖上橙色的正方形吗?”它太小了……我们放下另一端(注意中性的术语!)“还有其他办法吗?”她剪出:一个矩形。“你能盖上它吗?”还是太小了,我得把剩下的放下。“有多少纸片(我们指着所有的)?”还是一片(跟前面一样)。“还有其他办法吗?”一个圆(同样的反应)。“还有吗?”没有了,我想不出其他的了。

Pat(5;o)开始只剪出有具体意义的形状(与Nic的空间形式相反):脚、字母(P和T)、货车的两个轮子(剪一个圆是容易的)、拧紧螺丝的东西(螺丝刀)。当我们要求他盖上橙色的面时,他回答道:无论如何,我知道该怎么做。但当问道:“有多少纸片?”不,那个(剩余部分),那什么也不是,其他的也什么都不是;只有有意义的纸片才算数。接着他剪下一条腿和一只脚的形状。他把所有剪下的纸片放在橙色的面上,一共四片,但他只算作两片。不过,当要求他只剪两片时,他把正方形剪成10条平行的长条,说加起来是五片,其他的不是(纸片)。

可以发现,直到6岁或甚至7岁,其他反应中混合着这些反应及与之相似的反应,这清楚地表明,对于这些被试来说,用剪刀切割一个正方形,不意味把它分割成部分,再分配它们,这样就能在橙色的正方形上重新组合它们,使它们与最初状态相同。切割正方形的行动只产生了一种一般程序(不管表达的多样性和可变性):为做出代表经验的或空间的内容的形状,从整体中取出任何需要的东西。这些东西失去了与整体的所有联系,像这样整体不再存在;它被摧毁了,且只剩下一些“残片和剩余物”(Nic)。Pat竟然说“那什么也不是”,虽然他能用这些小纸片覆盖橙色的正方形(“无论如何,我知道该怎么做”),但他把它们看成所保存的最初整体的标记。

一些居间的、混合的反应可被归为水平1B类。其中一些与那些刚描述过的完全相同,而其他的开始呈现出一种新可能性的迹象:将剪下的纸片当作部分。然而,虽然这里将剩下的部分看成整体的一部分,它与其他的仍不同等,所以仍享有特殊的情形。

Rez(5;10)剪下一个三角形,接着是以某个角度连在一起的两个三角形,她把它称作一个蝴蝶结,接着一个球、一个雪人、一个地球仪、一幢房子、一张床、有一个顶的喷泉等。当用纸片(三角形和剩下的)覆盖橙色的正方形时,她说:有三片,因为加上橙色的,它共有三片。但在做最后的尝试时,她只算作两片:喷泉和顶。“那个怎么办(剩余部分)?”我不知道。这与整体-部分的概念仍相距很远。

Mur(5;5)类似地将三角形、它的剩余部分和一个椭圆,以及当把它们放在橙色的正方形上时的剩余部分算作三片。但将正方形剪成三条相等的长条后,她只算作两片,忽略了剩余部分,仿佛剪下的这两片是不同种类的。

Kat(6;7)沿正方形的边剪下四条窄长条后,准确地算作五片;但剪两片时,她却声明只将正方形剪成两部分,而忽略算作中心的那一大片。接着她剪出六个三角形,然后是四个圆形,她把它称为猫脸,“有多少片?”四……五片。“四片还是五片?”四片。“一共有几片?”剪下了四片(她指着白色的正方形的四个洞),还有里面

的一个正方形(=剩下的)。

Ari(7;0)剪下一个圆形,然后是正方形的四个角(只算作四片);接着是一个半圆、两个三角形和两条长条,这些共有五片。"能不能用那五片,盖上橙色的正方形?"*不能,我们还必须用那个(剩余部分)*。"为什么你不算上它?"*因为它不是小纸片*。

Isa(6;0)像在水平2那样,从彻底分割正方形开始,并准确计算出纸片的数量。但覆盖橙色的正方形时,她看不出将纸片放回原处,以重新拼出原来那个整体的可能性;所以她把白色的正方形剪成12个非常小的正方形,她将它们在橙色的正方形上,放成不连续的样子。她不知道该如何处理剩余的那部分大纸片:*没有地方了*。

Cat(6;1)剪出一个矩形,接着是一个半圆,然后是两个连在一起的不规则形状等;她只计算这些,因为*其余的纸片(剩余的)不那么重要(!)*。要覆盖橙色的正方形时,她只用了她剪出的五片纸片中的四片。当她注意到,*不,橙色的还有一部分露在外面*。她拣起另一个白色的正方形,并剪下12个小正方形——将它们分开地放在正方形上。最终她不知道如何处理剩余部分而放弃了。

Rol(7;6)剪出四片纸片(一个圆顶建筑、一个球、一片云和一个正方形),但她只算作四片,而不是五片纸片。"那个(剩余部分)是什么?"*共有五片,对,它也是一片纸片*。"和其他的一样?"*不,它满是洞*。同样,她不能用四个规则形状和一个不规则形状覆盖橙色的正方形面。

将剩余部分看成另一纸片的新趋势,预示着一种新可能性,即将切割行为看成剪成部分。呈现的每一个例子都与此新水平相距甚远,由于一些人除了橙色的正方形之外(Rez和Mur),不把整体看成一片纸片;对于其他被试,剩余纸片状况不同(Mur、Kat和Ari)。最重要的是,被试看不出放回到一起的纸片与整体相等(Isa、Cat和Rol不能完成覆盖橙色的正方形的任务)。

一个例外的例子值得一提,值得注意的是他的早熟。这个例子使我们能亲眼看见,通过分割正方形,或不留任何剩余部分地划分正方形,而发生的新可能性。即使他达到了,这个例子仍不被归为水平2的原因,是他一般不在他的分割中使用正方形,他唯一的企图是剪出"大的""中等的"和"小纸片"。

Jer(5;0)通过沿着四条边剪,直到最后剪出一个小得实际上不可能再剪的正方形纸片,从一个惊人的类比的系列开始:*以前,这是一个正方形*。"那现在呢?"*小纸片*。"你能想出其他的方法吗?"*大纸片*。他将正方形剪成八个不规则的形状,沿着各个方向剪曲线和直线。"很好,有别的方法吗?"*中型的*。同样的程序,仅以六片纸片告终——他不觉得它们比他的"大的"那些大。"还有其他方法吗?"这次他像在水平2那样使用中线,接着剪成不规则的四片。*我把它们剪成了大的*。"别的方法?"剪了两下,接着又平行地、横向地剪了六下。*我真把它们剪得很小了*。然后,他又返回了他最初沿四条边剪的办法。他把所有的纸片都放在橙色的正方形上。"那样有多少片?"*五片*。"把它们指出来。"他沿着周线连续指出八处——事实上不是分开

的，是一片虚拟纸片。*有八片*。“那用来盖橙色的正方形的呢？”一、二、三（他实际剪下的）……*我盖上它了！*

可以看出，被试如何不再试着构造经验的（特殊物体的形状）或空间的定性意义的形状，而试图创造仅仅大小不同的纸片（小的、中型的和大的）。这导致他们放弃取出单独的纸片的程序，这总是留给他们不能确认的剩余物。我们已经看到，被试如何从那儿发现一种新程序，即简单分割程序。这反过来导致对部分和整体之间关系的新概念化，现在逐渐将它看成仅仅是部分的再组合。关于水平1（A和B）的有趣之处，是被试逐渐发现这种新可能性的长且艰难的过程，而分割的办法可能从一开始就是强加的（事实上，像他们在其他的情况中那样：见第五章）。

自由切割：水平2和3

这样，水平2的特点是从整体到部分的分割程序，另一方面是从按次序剪成部分，到费劲地试着将这些部分与不可避免的剩余纸片联系起来的分割程序。并不奇怪，在使用正方形的这样一种特殊情况下，被试在最初的分割中将使用这种规则形状。这解释了对称在获得中最初所起的作用，其他的组合和变化在不同的时间间隔后才出现。这里有一些例子。

Bel（6;5）将正方形剪成两部分：首先竖着剪，接着横着剪。“不一样吗？”*是的，方向不一样*。“有其他的办法吗？”一条对角线，接着是其他。*那样有四片*。接着她又沿更多对角线和中线剪。*那样共有八片*。“你怎么想到的？”*因为我能再剪两条线*。接着她剪了一条对角线和一条中线，剪出四片，接着是两条对角线，中间留一个小圆；仅在中间有一个圆；两条中线（还没剪）；每个角有四分之一个圆，中间也有个圆；同样的地方有五个小圆等。接着我们让她剪出一个大圆，她发现对称的等距半径，共有8条。

Pie（7;4）立即剪成四片，每片又剪成四片，剪出16个小正方形。但由于他剪得不精确，在覆盖橙色的正方形并且不允许出现某些不规则时感到困难。“你认为那会组成一个比白色正方形大的正方形吗？”*不，因为它们以前是相等的*。接着他运用中线和对角线组成六种不同组合；然后是三个三角形组成的两种形状，它们覆盖了整张纸；然后是一个完全沿对角线剪的形状，再剪四片中的一片（创造了两根半条中线）。“还有没有其他的办法？很不一样的？”他剪了六片，三对相同。在最初剪了一些对称形状之后，他由一个圆想到锯齿形和绕着剪的复杂的方法。

Rik（7;6）展示了约20种与Pie的那些相似的组合，不过其中包括沿与对角线平行的线剪；从正方形的四个角和中间剪下小三角形；垂直地将正方形剪成三部分，水平交叉地将正方形剪成四部分（最后这种模式的16种组合）；以及复杂的、对称

和不对称的嵌套形。

Ros(7;6)　除沿直线剪,包括一系列小正方形和三角形之外,还剪出类似于水平1的那些弯曲的、对称的形状——例如,她称作云的四个不规则的形状。当问到有多少纸片时,她从1数到12,然后看着剩下的纸片数出8片。"那是如何有12片的? 那里,只有4片。"*我在心里算的*。她的意思是没有剪的"*剩下的纸片*"包含8片潜在的纸片,可以与那些已经剪出的纸片相加。

Gin(8;1)　在沿一系列直线剪之后,在正方形的中心剪了单独一个圆形。"有多少纸片?"像Ros那样,他在剩余部分中数出四片潜在的纸片。"我们怎样计算这两部分(圆纸片和剩下的纸片)?"*两片*。在一个大的圆形上,他坚持一种对称的形状,但展示了一种置换:两个半圆,首先触及底接着回转。

Fer(8;2)　先将正方形剪成两部分,然后剪成四部分,然后把每一半剪成四个横长条,再将每四分之一剪成12个同样大小的小正方形。接着他继续进行对称的联合:将四片纸片中的三片剪成单元,最后一个保持完整。进而,沿20根斜线剪整个正方形,这些斜线靠得很近,并且与对角线平行。最后,在角中或沿着边剪出一些三角形,以及沿一些对称曲线剪。

Man(8;4)和Rom(8;9)剪出许多不对称的形状。例如Rom,将正方形剪成四个不等的部分,如四分之一个圆,每张纸片式样不同。

Ana(9;0)　除上述的以外,发明了各种"波浪"形和锯齿形。

这些例子足以表明,当包括分割正方形在内的新程序引起一整套新目标系列时,不对称的和对称的变化如何增多。但与我们在约束任务中观察到的相反,没有观察到对称的和不对称的切割方法之间的界线,即使随被试年龄的增长,及不断增强的创新性,后者变得相对更频繁。在我们检查了两分和三分的划分方法之后,将回到新可能性产生于较早可能性的不同方式这个话题。我们也将再次思考对称的和不对称的分割之间的关系问题。

最后让我们引用水平3的一两个例子,它们的特点是发现能无限扩展的递归变化。

Val(9;9)　在最初剪出一些不对称的形状之后,剪出一个十字形,它将彼此相对的边连接起来,从那又开始一系列能产生几千种剪法的嵌套的形状。

Jea(10 7)　他在用递归方法剪出许多形状(如一系列包含两到八片纸片的七个正方形)之后,类似地继续沿正方形的三条边连续地剪出嵌套形,他已在正方形上剪出嵌套的矩形——没有哪两个完全相等,每次都变得更小。

这些就是这个水平典型的反应。

将正方形剪成两部分

自由切割之后,我们要求被试随意切割正方形,但最后用所采用的方法应刚好剪出

两片。所提出的这项任务暗示着,把正方形剪成部分,而不是简单地剪成纸片。此外,除了第一个问题,我们还要求两片纸片刚好相等。这样两个问题涉及的是预定程序,而不是自由选择,我们还想就它们揭示可能性形成的能力,来比较两种方法和它们的结果。特别是,虽然第二种方法产生的结果与一般发展过程十分类似,但两种方法在各个水平仍揭示出个体的差异。

水平1A再一次在留下无法使用的剩余部分的策略中清楚地表现出来。

Jer(5;0)对于我们上文所讨论的彻底分割程序异常早熟,当面临剪成两部分的任务时,退回到剪成独立部分的更简单的策略:“现在,我们要把正方形只剪成两部分。”他剪了一个三角形顶的圆弧。*那是蜗牛的家*。“现在,剪成相等的两片。”圆的两段弧,一个在另一个上面。*那是一片和两片*。“我也有一个主意了(我们沿正方形的垂直中线剪)。你喜欢这样吗?”*喜欢,那是两片*。“还有别的办法吗?”他不用剩余部分,剪了两个四边形。

Pat(5;0) 正如已经注意到的,他剪了10片——作为对我们所要求的“只剪两片”的回应,他保留了其中5片。“我要的是两片,不是五片。”*那儿*(他剪下两条竖长条,并把它们横着放在橙色的正方形上)。“那样有几片?”*两片*。“那片呢(剩余部分)?”*不是的*。

Cat(6;1)沿一条中线把正方形对半剪。但她没有让它们保持这样,而是把其中一半再剪成两半,并把两个四分之一片当作要求的两片来呈现。

Rol(7;0)剪下一个小圆和一个小四边形。“有几片?”*两片*。“但我们不想要任何剩余部分。”于是她把正方形剪成两个大小不同的矩形,并把那个大的拿在手中。*不能没有一片剩余*。“你能解释吗?”*只要你剪,总会有一片剩余构成两片。否则你只能剪一个像那样的大的*。[①]我们没有要求她剪大小相等的纸片。

在这些被试身上,要求彻底分割的程序,仍处于不完全减法水平,即使是像Jer这样的被试,他在自由切割程序中,成功完成了彻底分割的任务。在水平1B,我们发现被试仍通过减法继续试验,但把剩余部分当成一个有效部分;他们甚至可进行自发的分割。

Nic(5;5) 她被发现做出典型的水平1A反应(剩余的不是一片纸片),我们一要求她剪成两片,她就把正方形剪成两个不等的矩形。接着她沿竖中线把另一个剪成两半。但当我们要求她剪相等的两片时,她剪下两个小三角形,而没注意到她刚才已成功地解决了这个问题。

Mur(5;5)剪出一*辆汽车*(有八条边!)并自发地说那有两片(加上剩余部分)。对于一*幢房子*和一*棵树*与剩余部分是同样的反应。但当要求他剪相等的两片时,出现了一些奇怪的变动:她正确地剪出两半,但对此办法不满意,所以她将其中一半剪成两个小三角形,并总结:*就是它了*。之后,再一次对半剪(沿中线),这次她似

---

① 这令人回想起,7岁的Ari(在上面)约定“一片”必定“小”了。

乎感到满意;接着她通过沿其中一片的对角线,将它剪成两片,并在另一片上重复这个做法。

Rez(5;10)同样剪出一幢房子,然后一张床等,每次算上剩余部分共有两片。对于相等的要求,她先沿一条对角线剪,接着沿一条中线剪。然后回到用单纯减法切割。

Kat(6;7)剪出有三个弯曲部分的形状。*那里,那是部分:一片纸片,另一片是留下的纸片*。跟着是四个相似的反应,伴随增加的不规则性。当要求剪两片相等的纸片时,她把正方形的下端剪成五到六个小单元(通过移动剪刀),但没有计算它们。而是从中间的分线开始,沿竖中线剪正方形。之后,她继续这样做,总是从正方形的下端开始剪,然后在中线周围剪(但随着她继续剪,变得更不精确),剪曲线,且在将正方形剪成她认为的相等的两部分时,变得更规则。她最多只在从底往顶剪时,承认*有一点偏*(指向左边)。

以前的被试执行约束性任务的成绩,并不比执行自由切割任务的成绩好,反而在一些例子中(Jer)更差,与他们相比,刚刚所说的同龄被试显然有进步。现在甚至在被试剪剩余部分时,两分被理解成彻底的分割。不过,当要求剪相等的两部分时,Nic只剪成部分,而Mur和Rez用准确和对称的两分将这些混合。Kat的反应中不同寻常之处在于,她对正方形底的测量,选择中线进行两分,趋向愈加不相等和不稳定,连续地偏离此线。这充分说明通过联合解决限定可能性问题的程序,达到可能性的多样性。

在水平2,自由切割之后,不再是减法程序而是分割程序,预计有助于对分和两分。但上述反应没有显示对称与不对称切割之间的间断,当前任务导致水平2A,它区别于水平2B是基于如下事实,即只有沿对称轴剪才能成功地对分,但在水平2B不沿对称轴剪也能达成。这里是一些水平2A的例子。

Bel(6;5)通过沿正方形的中线和对角线剪来实现对分:"你能用别的方法剪吗?"*能*。她沿相对的边剪了两条长条。*一片和两片。不,那就有三片了*。"那么,有别的办法吗?"*有,那一种(竖中线),但我们已经那样剪过了*。她找不到其他可能性了。

Nat(7;4) *我在想那种办法(中线)。有很多剪两片的办法*。但一旦她在中线的左边剪了一小片,她就在右边剪相同的一小片。*那样就有两片了。啊!……三片!我只剪那儿(中线)*。

Mar(7;6)也只发现了沿轴剪的办法,接着她剪出两个相等的小三角形:*两片……啊!三片!*

Nat和Mar已在自由切割任务里进行了不对称的对分(角落里的一个角或一个不在中心的圆,同时清楚地算出"两片")。现在他们被要求剪两个正方形,他们退回到对称剪的方法,仿佛增加的约束使被试不能回到前面他们已经达到的,那时目标仅是产生某些新奇的东西:这样在水平2A的约束性任务中就存在一种倒退,类

似于已在水平1A观察到的倒退。不过，在水平2B，我们观察到了相反的趋势。

Ros(7;6)在一些对称的切割之后，在正方形的一个角落剪了一个狭窄的角：*你剪一片像那样小的，然后你留下(=保存)那一片大的。*然后成一定角度的一条长条，_|，外加剩余部分，一个星和剩下的等。当被要求剪成两半时，她返回对称形状。

Rik(7;6)在自由切割的情况下，创造出许多对称和不对称的式样，但除了对称的式样以外没有对分，从沿轴剪开始，但很快达到了在不同位置剪小三角形、小正方形、更多不同形状的三角形等，每次算上剩余部分在内有两片。

Fer(8;2)在自由切割的任务中，只创造出一个沿中线的对分，在结构任务中发现了许多不对称的对分——一些与Rik相似，另一些是沿曲线剪。

Ana(9;6)首先进行了一些沿中线和对角线的分割，然后沿许多不同的曲线和锯齿形线，从正方形的一个角剪到对面的角。

此结构性任务导致可能性数量的大量增加——这是被试仅在自由切割情况下没有想到的，因为他们更急于剪出比对分更有趣的式样。在水平3观察到的新反应，只是当要求他们剪出两片相等的纸片时，被试不像在水平2B那样，将他们自己限制于对称，而是成功地通过调整切口，沿角和曲线剪，建构相等的表面。

Val(9;9)首先沿中线和对角线剪正方形：*只有四种方法，也许有更多，但很难剪。我大概知道该怎么做。*她沿三条直线段(她在它们之间插入两个方向相对的半圆形)从顶边中间剪到底边。*有两个一样的圆，中间的也是。这是一样的。*你可以回想一下她的"*成千个*"可能的切割法(上文)。

Cel(11;4)在许多对分之后，当要求他剪"两片相等的"时说，那很容易(中线或对角线)。"有别的吗？"*那难多了。*他用一条拐弯处平衡的波浪线，接着用有两个相等的角的锯齿形线(左边一条，右边另一条)来代替对角线。

在下一章中我们将回到这一问题。

剪成三部分

将正方形剪成三部分确实显示，减法和分割的程序如何互不相同。对于前者，没有问题。

Nic(5;5)当被要求将正方形剪成三部分时，剪出了小正方形，接着剪出三个小三角形。

Jer(5;0)(见上文，他成功地分割并随后退回到减法)剪出*一幢房子、它的房顶和前门，共有三片。*

在水平2A，被试竟然否定剪成三部分甚至相等三部分的可能性。

Bel(6;5)仅通过对称进行对分,当被要求剪三片时说,*不,那不可能*。"想一想。"*没有三片*。"为什么?"*因为像这样(中线)有两片,而像那样(两条中线)有四片*。她忘记了不久前,她以为她将获得两片,剪出两条平行的长条,结果自己得出结论说:*不,那样有三片*。

Mar(7;6)很清楚剪一条长条,就有两片,接着三片,有可能获得三片纸片,但她力争彻底分割,结果发现她得到四片而不是三片。像Bel那样,她以前通过剪出两个小三角形获得了三片。就像许多其他的被试那样,她不能理解剪n下你就能获得n+1片。

掌握了三分和2B的不对称的对分,但均等仍是有问题的。

Fer(8;2)　*剪三片,那是困难的,我不会*。"为什么?"*现在,我知道了*,(他通过对角线剪成两部分,接着再将其中一半剪成两部分)*啊,是的,一片、两片、三片*。

Ani(9;9)沿一条横线剪,很容易地剪成三部分,并竖着剪剩下的等。但对于三个相等的部分,*不可能,剪不出来,因为要么不够大要么不够小*。"有一个不同的形状,你就能剪了吗?"*是的,用一个矩形,那个长些,你就能剪相等的部分了*(剪它)。"很好,那用正方形呢?"她尝试剪三个三角形,而不是使用同样的程序。*不*。

Pie(10;7)沿直线或曲线剪,很快创造出剪成三部分的五个例子,但当被要求剪三个相等的部分时,他只成功地剪出相等部分,但总是有一个剩余部分组成四片。

在水平3不再有任何问题了。

Gel(11;4)　剪成三部分:*那很容易*(他自发地给出了正方形上三个相等的部分)。

这些剪成三部分的问题,已和英海尔德在一段时间前就研究过。可能性的观点很有趣,因为它们揭示了限制它们形成的初始的虚假必然性,以及稍后在所有发展水平的虚假必然性的出现,一如在水平2上观察到的对称的限制——那只是限制。

对于四分,与两分相比,除了被试有时就像孩子在三分法时通常认为会获得三片,而不明白"n次切割$\supset n+1$个部分"(见Mar)一样,在预测剪四下就形成五部分而不是四部分时有困难以外,他们没有提出任何新问题。

总　　结

在这项任务中,关键性的发展,是儿童在7—8岁放弃有利于分割的减法程序。这也是部分性运算(相当于逻辑-算术类包含的半逻辑)的形成的平均年龄。所以像通常那样,问题是产生新可能性的是否是这些运算,或是否是其他原因。为了回答此问题,我们可思考Jer(5;0)这个有趣的例子,一方面,他用大小表示他剪的纸片的特点,将它们给予同类的剩余部分,并达到彻底分割。但在另一方面,对大小的集中注意和引起的

分割，不足以区分外延（部分的数量）和内涵（作为特征的大小）：[1]这样，他相信八片纸片比六片“中型的”“大”，仿佛情况不是部分的数量与它们的大小呈逆相关。而当被要求进行对分时，他退回到更简单的减法程序。这样的事实表明，作为程序可能性的分割，早于运算的分割。在水平1B，将正方形剪成两部分时的事实也证实（仍明显是前运算），当在指示中特别提及扩展时，只达到彻底分割。

朝逻辑运算方向发展的可能性，提出了新可能性在每个连续的水平成为可能的方法，以及它们如何与平衡过程相关的一般问题。从这个角度看，水平1的特点同时是一种缺陷（被试不能发现部分和整体之间的关系），从这种缺陷而来的一种虚假必然性（赋予这些纸片以独立意义的必然性），最后，由上述这两种特点导致的一种虚假不可能性（将“剩余部分”当成另一“纸片”利用的失败，因为它不再是整体的一部分，并因而没有意义）；由此，有三种局限性。但在这有限的可能性的领域里，存在着原则上很一般的开启可能性的办法：每种一旦被实现了的可能性会通过类比或（或多或少）自由的结合继续导致另一种可能性。如果被试赋予他们的创造物的意义是几何的，就像Nic的例子那样，这导致其他的创造物——在Nic的例子中达到了四个她能命名的。不过，如果意义是具体-经验性的，由于上述创造物的任何标志都能促成下一个（如在Rez的三角形中，提出了“蝴蝶结”或“球”或“雪人”等），这些类比就没有界限并在它们的行动模式中仍更有限。然而我们必须解释这个发展如何在从水平1的程序到那些与彻底分割相联系的程序中发生。我们已经在Jer的例子中看到（自由切割任务），它不是由形成部分的行动导致的：相反，它在这些之前，并可能因此促成它们的形成。要决定的恰恰是，在被试完全感觉不到局限（在观察者看来似乎是潜在的混乱）的初始状态，与所有局限被新彻底分割的可能性的突然出现所克服的状态之间发生了什么。在这两种状态之间，被试似乎开始对自己提出疑问。从我们对水平1B中自由切割的分析，一个人可能会提出如下问题：一个人怎么处理“剩余部分”？它的重要特点是什么？一个人应该怎么样计算纸片？它们怎么样与整体（橙色的或白色的正方形）相关等。显然，我们年幼的被试不能像这样阐述它们，或更准确地说是完全不能阐述：他们只是体验到了一定的困难（这样局限变成混乱），且他们的提问仅在活动中发现解决办法时——实际上是使剪切部分的计划适应到那时还不能被同化的物体（剩余部分）——才清楚地显现。因此，由于已有活动但还没有适合的办法，这种新可能性的根源应被描述为一种力争发现它现实化形式的适应活动。解决办法或新程序通过要被克服的障碍渠道和要被除去的限制所调节。这清楚地表明，处于阶段转化水平的新可能性，是有导向的活动并因此服务于再平衡，而不是稳定的平衡状态的工具，因为它们的现实化与发展一起进行，且每个平衡状态一旦获得就变成现实的一部分。这里我们简单涉及一种可能性的特殊性质并且有点

① 在我们早先与英海尔德的研究中[《儿童逻辑的早期发展：分类和序列》(New York：Harpen and Row，1964)]。我们曾强调在外延与内涵之间缺乏初始的分化。

悖论:对于观察者和报告者,克服水平1的限制似乎是"可能的";但对那些处于那个水平的被试,这仍不可能。尽管如此,一旦这个解放成为可能,新可能性就会现实化并因此进入现实之中。所以这样的可能性根本不是一种状态,而是由不平衡而来的过渡,并作为过程表现再平衡的特点,且一旦过程终止就转为现实。

曾经这样说,水平2——如它所是,彻底分割是它的特征(没有"剩余部分")——很快达到了协同可能性的状态,因为,一旦正方形通过一条中线剪成两部分,它也能通过另一条来分割等。在这一点上,似乎强调在可能性的形成中,选择扮演的角色以及区分两种类型的选择是适当的。当从一水平变到下一水平时,如从水平1到水平2,自然地有一系列选择,包括在上述段落中我们讨论过的适应活动中。这些选择存在于"最好的"选择中。另一方面,连续的选择在一水平中做出,如在水平1中新可能性的产生,便从如下的事实继续前进(将在第十一章中更详细地谈到),即被试一发现由一个自由选择造成一种可能性,就足以引起这种实现,即至少一种其他组合能被选择,两者彼此相当:这解释了水平1逐步发展的特点。另一方面,以转变到水平2为特征的发展和分割程序,以及协同可能性的出现,存在于这样的事实中,即下一个(相当的)可能性不再在事实之后发现(也就是一种选择变得可见的结果之后),而是在与上述那个相同的时间里,被预测和概念化为一个类比。这样,例如被试Bel,从垂直地剪过正方形开始,但立即改成水平地剪,就仿佛当他实施第一剪的时候,他已打算这样做,第二剪即使没有被选择作为开始的一剪,但被想象成与第一剪彻底地相当;在两条对角线的选择中类似的反应是很明显的。回想一下处于相同年龄水平的被试在路径情形中选择的协同可能性(第二章),他们指出在A和B之间的路线可能是直的、弯的或锯齿形的。

不过,即使协同可能性在可能性的增加中构成一个清楚的发展,它们并不排除进一步偶然使用连续类比,特别是当被试从一系列协同可能性到另一系列时。这样,正如在将正方形剪成两部分和三部分的段落中注意到的那样,即使彻底分割的程序通过对称促进了协同可能性,当要求被试创造对分时,后者倾向于产生新的虚假必然性,甚至像那些按指令剪出三个部分时(如Fer的例子)所观察到的虚假不可能性。为此,我们必须区分水平2的两种亚水平,一个是在对称强加这些限制时,另一个是被试将他们自己从限制中解放出来时。这两种亚水平部分符合已经讨论过的两种类型的协同可能性:一类"具体的"——被试将他们自己限制在他们能实现的之中,另一类被我们称作"抽象的"——实际的切割只代表许多可想象的变化的例子。

要总结观察到的一种关于新可能性影响对随后的可能性的发现这一事实,我们应在"变换"(transposition)的术语下对第一水平使用的那些进行归类:(1)例如,使用一条中线接着另一条,从一种对分变到另一种,或从那儿变到一条对角线或两条。(2)第二,我们发现重复的再创造,如当被试剪下一条长条时,接着两条、三条等,直到五条时他们才停止(Pat,7;6),或通过剪掉边线(每边剪下一条长条)直到只剩中间一个小正方形(已被5岁的Jer发现,但没有意识到继续的可能性)。(3)接着是两种变化的结合,当在

一个单一计划中,中线与对角线结合(Bel,6;5);或当正方形最开始被剪成两个重叠的或横向的两半,每一半被进一步剪成三或四部分(Gin,8;1);或者,每个横向的一半(也就是矩形)再一次沿它们自己的对角线分割(Pat,7;6),沿由原始正方形的对角线形成的四部分中的一部分的中线剪。(4)最后,当被试(Fer,8;2)将正方形剪成四部分再将每部分剪成更小的正方形,再没有继续这样做时,我们发现了嵌套形的分割。

另一方面,当被试放弃对称的或规则的形状时,他们最终达到了抽象协同可能性的水平,其特点是,实际的实现被认为只不过是实例这样的可能性的多样性的观念。例如Ana(9;0),在用简单的并且成双的曲线代替竖的和斜的、对称的长条后,补充说她可能做"更多",并且对于一个对分,她将正方形的两个相对的角通过不同的曲线和锯齿形线连接起来。另一类变化在于,首先将正方形剪成两个异类的不同大小的部分,接着,当将另一个保留完整或用其他的形状加以装饰时(Man,8;4),用小正方形或小的不规则的段片布置这一个等。这些变化随着连续地从一个正方形到下一个正方形的设计和实施,能影响一整系列的正方形。我们能进一步注意到次序改变或分解(如从一个内圆到不同的曲线),或再一次一个小成分在正方形里不同区域的位置的多种改变。

一旦由对称要求所导致的限制被克服,被试就能迅速超越一些具体现实的水平以跟随数量无限的多重可能性的新程序和变化的过程,直到标志水平3之特点的无限制的反复的递归程序出现。

第五章　两分和复制

与 A. Henriques—christophides 合作

为了完成我们对部分性的运算，和在它们之前并可能为它们做准备的程序之间的关系之分析，我们决定比较两分或分割成两半与它们的反面——复制。两分已在前面的章节中讨论过了，但只是作为将正方形剪成任意大小的两部分的一个特殊例子。在这一章中，我们将仔细检查将一个正方形分成两个大约 10cm×20cm 的矩形，它将促进这项任务(由此，我们将再次在最年幼的被试身上，找到不彻底的减法程序，这很有趣)；我们将使用折叠、切割和绘画。这项任务的新颖之处是，一旦一张纸被分成两半(或分成"相等的两部分"等被试所适应的词汇)，在重新组成整体的指令下，这两半会照那样呈现出来。我们如此对被试说，"我有一张纸，而且我已将它剪成两半(或其他一些被试能理解的术语)。这是其中一半，另一半被藏起来了。你能猜猜在我剪这张纸以前，它是什么样的吗?"像往常一样，每次回答之后，我们又问:"你能用其他的办法做吗?"等。显然，这个分成两半后，再将这些与整体联系起来的任务，对可能性概念提出了一个特殊的问题，而且不奇怪，我们发现对它的解答，表现出一种相当晚的获得。我们不需要总是呈现同一种纸——事实上，任何类型的面都行，且只要两部分面积相等，就能使用许多不同的形状，但它们不需要是同型的(isomorphic)。

水　平　1

这里我们不再进一步坚持，被试已在第一水平体验过将表面分成两半的困难，因为这在第四章中已讨论过了，那里对它的解释是，在分割成相等部分的基础上，由*减法*优先原则所导致。我们发现最年幼的被试不理解分成两半的任务。为此，我们换了一个更简单的任务，呈现两个躺着的动物，其中一个比另一个长两倍(我们不坚持用术语"长两倍"，年幼的孩子在相当长一段时间不理解)。大一点的动物吃得比小一点的动物多两倍，我们给小一点的动物两到三个豆子，即以一个小矩形、一个三角形和一个长矩形的形式出现的"食物"，要求孩子想象大的动物应该得多少。

Cri(5;5)　如果给小动物(*S*)一个豆子，就给大的那个动物(*B*)两个；如果给 *S*

两个豆子，她就给 *B* 三个；如果给 *S* 三个，她就给 *B* 四个；这样每次都是 *n*+1，没有加倍。“给 *B* 六个公平吗（如果给 *S* 三个）？”*是的，因为它大些*。我们给 *S* 一个小矩形。她开始给了 *B* 相同的一个，然后把它换成了稍大一点的。对于给 S 一个小三角形、长的矩形和最后一个正方形（给 *S* 和 *B* 的东西之间没有大小关系），表现的反应相同。

Jea（5；6）表现出的反应同样是增加豆子：1→2，2→3，等。对于小矩形，我们要求他给“一个大一点的，两倍大，因为你的猫是我的猫的两倍大”。他只给出了一个稍大一点的矩形，但不是近乎两倍大。对于三角形也是同样的反应。对于一个长矩形，他似乎明白了，补充说给 S 另一个，给 B 同样的一个（这样片刻间达到随后的水平）；但他放在一张纸上的正方形，沿着比正方形稍大一点的矩形的周长来剪。

May（6；7）最初表现出的反应同样是增加豆子，包括对矩形和三角形。接着我们要求他给出比我的小甜饼大三倍的小甜饼：大且还是与我的一样大。这次他将两个相同大小的放在一起，似乎是一个复制，但被理解为 1+1，如在要求中所阐述的那样。证据是他只为 B 将正方形做得稍大一点。

在水平 1B，被试像在 1A 那样从简单的增加开始，偶尔组成两个小项目的样本，但只是矩形；他们没能组成三角形（任意扩大），甚至正方形（例如，6 岁 3 个月的 Mic）。只是到了 7 岁 1 个月（Tot），被试继续（但对于豆子仍是 2→3 和 3→4）这样阐述：我两次做的是同样的事。我知道：*它是两倍大*。这个实现直接导致水平 2。

总之，即使用这种简化了的方法，被试在这个水平也没能形成加倍。因为他们不理解倍增，受虚假必然性的影响，它使他们所理解的*比……更大*的概念仅局限于加法程序。

水 平 2A

在水平 2A，分成两半不再构成任何问题，并从对称不知不觉过渡到各种分割方法，使两半总保持相等。然而，由于加倍，我们当然发现了重大的进步，因为被试现在明确地理解这项任务，并试图找到整面纸的形状（可见的部分代表其一半）；但在水平 2A，被试仍不能形成相等的面，或仅形成近似的面。

Phi（7；7）从沿中线和对角线开始剪，接着剪成四份，并将这些进行分配，说，*有两个太多了*，甚至将它们藏在他的手里。他花了很久去理解，即在这个例子中，半片是第一次分割的那些，即使稍后对每半片再进行细分。至于加倍（“猜一猜另一半在我剪之前是什么样子”），他以一个适宜的（长度的）近似值开始；但当我们问道：“它会不会是别的样子？”他将它画得非常大。“那不是太大了吗？”*我觉得它很长*。“你这样想？”*它是一个正方形吗？*在他的眼前，他的确让实验者剪出了一半。

Suz(7;1)沿中线和对角线只剪成两半，且只通过折叠继续试验(尽管我们已建议她可以剪和画)。对于加倍任务，我们给出一个相当大的三角形，让她在纸上再画一个：她想象另一半是一个大的半圆形。我们给出一个小一点的矩形：这次她画了一整个圆，比刚才的半圆小，但是比矩形大两倍。接着她发明了有用的方法，将小三角形贴在纸上，将从这张纸上得到她要找的那一半：这有助于产生与原始面积相同的部分，但形状不同——三角形和不同的梯形。我们说是一个半圆，她发现它与所给出的半边相比“太大了”；接着是另一个——她发现“太小了”；最后，一个小圆形——她承认相等。

Kat(8;5)最开始跟通常一样，接着沿与一条中线接近的斜线剪成两半。但在加倍任务中，她展示了一张非常大的纸；即使我们告诉她另一半与她拿的这一半一样大，她还是将这张大纸分成两半，在其中一半上画了要给出的“一半”，并用不与它相等、而是这张大纸本身一半的面，当作它的补充物(这样，要建构的另一半)，证实她的选择说：*我已经刚好在中间剪了*。实质意味着：*我也已经剪了一半了*。在做了另一个解释之后，最后她呈现了一个对称的形状，虽然是用不规则的东西。

Isa(8;3)不仅沿斜线剪出两半，而且沿锯齿形和曲线小心地剪出两个相等的部分。在加倍任务中，她表现出进步，给出面积大约相等且在不同位置的补充部分。但是，当给出四分之一个圆时，她不再注意这个要求，给出一个正方形，接着给出一个三角形作为补充——似乎这项任务不是去找另一半，反而是从它上面取出这四分之一个圆。

除对水平1的问题不理解以外，这些水平2A的反应清楚地表明，从一个整体的部分对它再建构，比将整体分成两半更难，即使形状相似。事实上，能完成复杂的两分任务，并因此达到的水平超过在前面的章节中被称作减法(除了在Phi的例子中短暂的失误，因为没能在连续的对分之间建立一个层次)的被试，仍然推论，通过简单减法似乎已获得呈现的一半(特别见Isa的例子)，并且他们的任务仅是产生类似的一片。或像在第三章中那样，他们试图想象出，只有一部分可以看到的物体，被隐藏的那部分是什么；但实际上结果相同，因为可见的部分仅由从一个更大的部件中取出(通过减少)而产生。尽管在第三章中，甚至处于水平1的被试，立即认出可见部分与不可见部分之间的对称，在当前的情况中，只有在水平2B，被试才达到这个结论。原因是在第三章中，即使部分被隐藏，整体仍是用某种方式呈现出的；而在当前情况中，整体已经被实验者剪去了，不再像这样存在了。

因此，构成当前实验情境的独特之处的基本困难是，问题不需要趋向于要执行的具体实现的可能性建构(如在分成两半的例子中)，而需要倒摄推论，或在任务前就已实现的可能性的重建。换句话说，问题中的可能性，是实验者可能已经*做了什么*来获得她的一半，而不是被试能做什么来将一个面分成两半。我们知道的所有关于孩子怎样开始发展意识的觉知表明，他总是首先把注意力贯注在一个目标和行动的结果上，而不是前

面的状态:尤其它必须是这种情况,即过去的、历史的或由另一人的行动产生的,需要比完成的可能性更复杂的推论,它涉及对趋向要获得的结果的程序进行选择。事实上,在实际的行动中,被试必须解决的,不是简单分成两半的问题,这在这一水平很容易解决,也不是简单地加倍,在实际行动中,它不比分成两半更困难;而是,需要将加倍与两分进行组合,为了重建最初的面,被试必须执行加倍,这样被试必须归因于实验者,以便正确地理解那一半呈现给他们的形状与表面。这样,我们预计被试在这项任务中,一般将在比他们在第一部分访谈时要低的水平上做出反应,因为对过去可能性的重建,需要这种互反动作的组合。

水平 2B 和 3

当观察 8—9 岁的儿童时,我们看见除了对称的部分以外的中间部分,且根本上解决了复制的问题。

Lau(7;6,发展超前的)分成了对称的两半或剪成斜段;但对于后者,他总要检查通过重叠所建构的部分之间是否相等。可能主要因为这样有条不紊的试验方法,他成功地解决了复制的问题:对于一个小三角形,他立即在模型的顶端画出它的双倍,接着用横切做了同样的处理,将整个结构旋转 45°。"你认为这是不同的吗?"*是的,因为它放的位置不同。还有另一个*(另一边的对角线)。我们给出四分之一个圆:他立即将它完成一个半圆。

Ala(9;2)首先通过垂直的平行线继续试验,说:*我将给你六片,也给自己六片,或者给你八片,也给自己八片。*接着她正确地画出将矩形分成两半的对角线,并正确地剪成两部分。接着她画了一个大三角形,顶触及横矩形顶边的中间,底与她面前的矩形底边平行:她查看其他的三角形是否有同样的面。这个角连接那个角:*这是给你的,那是给我的。*接着她分割了中心的三角形和底部长条等。对于复制,她通过对称继续试验,将相似的部分并排摆放,或摆成 L 或 T 的形状以代表可能的最初整体形状。

Sid(9;3)对于分成两部分做出同样的反应,除了矩形里面的角采用了对称和相等以外,这样使两半的相等变得明显。为了复制,创造出与 Ala 相同的组合。

Mur(10;10)沿中线和斜线剪,使样式保持最简单的对分,在以不同的方式将两半放在一起之前,简单地仿效复制。

Phi(10;10)利用角状和锯齿形剪出多种半片,但他不认为有许多种可能性。为复制矩形形状,他进行通常的组合;但对于四分之一个圆,他首先给出两片不相等的纸片,接着他使其相等,并以不同的方式将它们放在一起。他估计可能性的总数*大约在四到八个。*"再没有了?"*我认为没有。*

Nan(11;5)除通常的半片外,剪出大纸片中的一个矩形,说,*有交叉线的纸,如果我算得没错*(矩形中心的正方形和边),*我能像那样剪*。在复制时,她以不同的方式将矩形的半片放在一起:"还有其他的吗?"*有许多。我能以各种各样的方式转动这两片*。"有多少种? 10种,100种,1 000种?"*10种,我想*。

Fre(10;5)进行了多种分割,改变斜的切口,并补充说:*我能继续像那样剪,剪出越来越多的像那样的纸片*。"有多少条线?"*100条,就这么多*。在复制任务中,他第一个认识到,我们向他呈现的小矩形,不一定非得是同样形状的图形的一半,而可能来自包含有这个矩形A,两个三角形B和C,B+C=A的不等边四边形。

可以看出,除了Lau以外,9—10岁之前的被试不理解复制。即使由于已经指出那些原因而成功的Lau,对部分-整体关系只有一个初步概念:当包含有一个横向部分的一整个图形稍微倾斜时,他将它看成是不同的图形。好像它在平面的位置能改变它的内部结构。[①]从最初认识到呈现的一半是整体的一部分,且另一半肯定是相同的面,仍要做出一些进步。例如Lau,认为两半肯定是与彼此邻近,且整体形状肯定与半片的形状相同;而接着Ala和其他人则知道,两半可能来自一个形状完全不同的整体(如L、T,等等),即使他们还是只创造出与刺激物形状相同的半片。下一步是朝着渐增的相对化这同样的一般方向发展,如当被试开始明白,要重建的一半的形状也可能与呈现出的形状不同:这是Fre的例子,他认为这一半可能是从一个不等边四边形上剪下的。最后,考虑到的可能性的数量也是相对化的一部分,因为如果被试能将不同的形状,看成一个内在变化的递归系统的一部分,那么可能性的数量就是无限的。当Fre(这些被试中最优秀的)说"我能像那样继续做"时,他离这样一个概念并不远。但当他接着确定"100种,再没了"时,他的估计仍是相当保守的。Phi和Nan更加保守:总共有4、8或10种可能性。

在水平3,如Fre的抽象的协同可能性(也就是,比那些作为例子给出的可能性更多的可能性,但仍数量有限),内涵变得不确定,且外延变得无限。

Dav(9;10)介于水平2B和3之间。已经发现可以沿锯齿形或正弦曲线剪成两半,他补充说:*我还可以像那样继续不断地剪,只要你愿意,沿两个方向*(纵向和横向),*我可以剪许多许多的怪形状。与你所希望的一样长*。这一表达是"无限制的"很好的解释,但许多仍是更加受限制的,当他试着剪出不同形状的半片时,这变得很明显:*那更难。它必须是相同的形状*。"你能在很长时间里继续做?"*不是做这些:这更难了*。

Pat(10;7)实现了能给出转换法则的进步。在复制时,他将建构的半片纵向地使用到模型上,并开始以非常少的方法移动他的半片——先往上,再往下:*有1 000种可能性,甚至更多*。接着他横向地重复这一程序:*像那个那样也有1 000种*。"你能解释一下吗?"他在稳定的边上标上一系列点。"我不明白。"*你画一点,然后一条*

① 可以回想一下,年幼儿童认为一个正方形转动一下之后就不再是正方形了。

线，然后你再开始画得更远点。“那你能计算它们吗？”*不能，你不能……它是无限的。*之后，他使一半在另一半的角周围转动：*仍有1 000种，也是无限的……可以是任何东西。我可以想出无限多的办法来做不管是什么东西。*“用任何一种半片？”*是的。*“那么对于任何一个整体，一个人都能得到无数个一半吗？”*不*（想不出所有可能得到的不同形状的一半）……

Yve（11；4）对于分成两半：*有无限多种方法，包括那些不成立的*（不相等的对分）。*为了把相似的一半放在一起，有各种可能性。*“有多少？”*10 000种。甚至更多。*“你能计算它们吗？”*那需要巨大的耐心。*至于非趋同的但相等的一半，*你可以使用所有可能的形状。*

这一进步说明了更高级的协同可能性的两个特点：不确定的内涵（见Yve的例子）和无限的外延。当暗示一个递归的法则，例如，Pat提出连续的点，就成为内在变化的很好的例子。

第六章　铰链棒的自由构造

与 A. Blanchet 和 D. Leiser 合作

这本书的前三章讨论了儿童的自由组合,自发地朝着一个如此普通的目标思考,以至于总能达到目标(三个骰子在一个纸板上的可能位置,一个平面上两点间的可能路径等)。其他的研究(第七到十章)涉及解决实验者所提出的难以立刻解决的问题的可能办法(提高水位等)。在当前任务中,我们研究没有问题,但有由复杂材料造成的约束的自由组合。这样,被试要处理的唯一问题,是学习如何使用这种材料,并想象各种各样的能实现的组合。在这样的情形中,某些目标或理想化的事物会自然地产生;它们绝不是强加的,而是儿童自己提出的(不管他们是想做一个"正方形"或甚至是一只"老虎"):如此构造的意义或内容是次要的。这里有趣的是程序可能性——即,在构造方法本身中所注意到的发展的进步。

材料包含有 30 根棒,12 cm 长,8 mm 粗(正方形的段),外加两个相同宽度但只有 7—8 cm 长的小条。另外,我们给儿童 20 个完全相同的由两个凹槽部分(可以将棒的任何一端插入其中)做成的金属接头。接头是可调整的,这样可以将棒插向不同的方向:这两根棒可以被放成或者是彼此的延伸— —;平行的||;成直角⌈;或成任何角度(在一个平面上或竖直地)。我们只问被试:"你能用它来做什么?"仅对于最小的儿童,我们问他或她是否能"用这搭起个什么东西",这并不强加任何特殊的目标,只是激励被试想象更复杂的连接。每次作业之后,我们继续问通常所提的问题("你能做出一些不同的来吗?"等),但不做任何暗示,除了有时展示三根棒如何被连成一个有三面的角,并了解被试对于三维模型能做些什么。

这样,这项研究的特殊性质在于,考查两种联系越来越紧密的可能性——由不同的根源而来的可能性。一种是被试必须通过或多或少粗糙或定向的探索来发现那些由材料提供的可能性。这些实际上基于经验:像物理可能性,它们可以比作与一个机械系统的连接相一致的潜在输出,但被试只能靠自己尝试所有不同的连接来学习它们。另一种是被试自己能通过他们的动作获得的能力,即利用所提供的物理可能性,通过想象更高级组合(可能包括也可能不包括特殊目标和最佳表现或进步的标准),来超越简单连接。被试的动作或能力中固有的可能性与在前面章节中讨论过的那些类型相同(第二章中可能的路径,第四章中可能的分割等);但在当前例子中,被试也可以利用具有与一

套事先必须知道，或在建构过程中发现的物理可能性相关的特征的物质工具：在这个例子中我们谈及工具可能性。简要地说，物理可能性与材料的特定修正的可能效果有关（一个特殊的接合点和它对建构的稳定性的影响），然而工具可能性涉及为要获得所选择的构造而执行和协调的那些动作。但前者涉及确定无论任何组合的因果关系，后者（一种程序可能性的特殊例子）使这些组合服从目标。

水平 1

水平1A的被试停留于物理可能性——他们通过没有明确计划的尝试来发现。因为被试试图发现某某连接是否可行，实际上是把它当作可能，所以每个尝试都构成一种方案，但他们仅在它被实现之后，才承认它是可能的。因而这样的方案产生导致失败或成功的假设可能性，其中一种可能性在类比的连续中引起下一种可能性。

Car(5;0)首先将所有的接头或多或少断开地排成一排。她称这个是一条大蛇（在事实之后）。接着她将两根棒平行插入一个接头的两端(⼆)。之后，她将它们调整成这样：顶端有一个接合点∧，接着将两根棒并排放，且从第二根延伸出第三根。接着是个直角⎾，跟着是├。她尝试构造一种未立起的垂直的结构；她返回到她的线性和横向平行的样式，继续使用直到6根棒，接着10根，到最后她再加两根连接成斜的样式。她以这种方法继续不停地做，并一遍又一遍地开始。最后她创造了一个Z形和两个更宽的角。

Val(5;6)首先也只将接头放在一起，但将它们从中间隔开。当知道可以将棒插入后，他将两根棒连接成平行状。之后，他变化角度，并为发现这个而高兴，他创造了大量这样的结构，要么将它们全部杂乱地拉到一起，要么围着一个他能建造的正方形排列它们。当他偶然将一个铰链旋转180°之后，成功地将三对棒垂直排列。由于他最初宣布：*当我完成之后，我就说它是什么*。他现在发现它是一架飞机。一堆直角和其他的变成了一个车库。当他将⊤称作一个锤子，用三根棒当伸出的把手时，就更容易明白他的解释。

Ari(4;1)从一个没有完全闭合的正方形开始，接着将棒平行地拉到一起；这样她用其中腾出的一个接头做一根竖直的杆。另一个接头10°的弯曲使她想到，可将第二个铰链放在同一个拐角中。她成功建造了一个两层的围栏，用没有接头但并排摆放的棒覆盖它。不过即使现在，她仍坚持她的谨慎的*以后我再告诉你*的行为。“那是一所房子吗？”*全部做完后，我再告诉你*。

与其他更平常的自由构造相比，这项任务表明：当这些年幼的被试面对的情况，是必须发现用不知道的材料能做出什么连接时，他们并不直接地思考可能性。他们看上去好像相信任何格式都能与任何目标相适合：有点被由材料呈现的阻力吓着了，并且在

一次错误的移动后，还不能纠正他们自己，似乎怀疑调节是可能的(像处于感知运动水平的儿童面对一个完全不熟悉的玩具时那样)。这样，被试被放到了这样的位置，即他们必须将材料所允许的，和他们预料能通过自己的动作所完成的相区别。他们由可能性的初级形式而来的尝试——能被表达为："可能(如果我以某某方式做)这将是可能的(在实际可行的意义上)。"这解释了我们观察到的一系列纯粹的尝试错误；自然，有某些成功格式的类比式的再运用，但还不是自动修正或再调整的任何标志。无疑，这也解释了一些被试所表达的奇怪的谨慎，即使在构造过程中，他们也拒绝指出目标："当我完成后我才说"(Val)或"我以后再告诉你"(Ari)。[①]

这样，水平1B的特点是两种新发展：自我纠正的能力和愿望，以及被试乐意宣布他们从一开始就想要建造的东西。这样，我们在这里论述的是工具可能性的出现和扩展。

Kat(5;6)宣布她将造一幢房子，在纠正了一个铰链的错误方向后，将棒摆进一个正方形。她设计了两个代表二楼的部分来扩展四边形，但对确定整幢建构物的方位有困难。在做了一些纠正之后，她成功了(建构物是二维的)。接着，她打算在柄上造一朵花，一个钻石。这需要纠正最初的两个角。她加上两个斜的部分作为"叶子"。由于她所有的建构物都在一个水平面上，我们建议她建造一根能立起的旗杆。她先将两根棒放在手中对准，用另两个造了一个楼台。接着她花了很长时间试着将一个接头放进去：*就是那个东西不行*。她又加了两根棒跟其他的连在一起：*那更立不起来了*。

Cor(5;6)在造一个教堂的屋顶，后来是一个男人戴一顶帽子——均为二维设计——时进行校正，成为毅力的一个范例；不管怎样，她试着以连接状摆放，而不是简单地将棒并列摆放；试图将第二个接头插入一个铰链的90°角内，并在角内放入一个十字架形物。接着她说，*我有个更好的主意了*。然后将一根顶端带一个45°角的接头——她将一根朝着错误方向的(向下而不是向上)斜棒插入其中——的垂直棒，插入房顶的一个接头。她纠正了这个错误，解释说：*也许像这样来放*(改正了方向，但有简单的重叠)。*不，那样不能保持*。最后：*我有个更好的主意*。*这次我在脑子里彻底想好了*。于是她重建了整个正方形，将接头重新定位直到成功完成任务。为了使一根棒像一根旗杆一样垂直立起，她仅将它安进底部的一个接头(两个并列摆放的部分)。它倒了，所以她加上了一根短一些的棒：*要用一根小点的把它捆起来*。这个结构又倒塌了，于是她将棒之间拉得更远一些。当这样做也失败了之后，她修正了棒之间的距离直到相对成功地完成任务：*这样可以了*。

Gil(6;8)为了使一根棒保持竖立，他将它安装进一个接头，并将这个结构放在一个水平的棒上。当它倒了之后，为了纠正错误，他用更多的棒将底围起来。

Jos(6;11)从通过将一个直立的接头安进一个棒的底部，使它保持竖立开始：

① 英海尔德和她的研究组经常观察到这一年龄段的这类行为：这种行为不是例外或偶然的。

“你能使它更结实吗?”他又在顶端加了另一根棒,在这样做失败了之后,他在底部又加了另一个刚好贴近第一个的接头。*腿。人们可以站立是因为他们有腿。*由于这样做还是不行,他有些可笑地试着以90°角安装一个底部接头,它只有一端在底部。之后,他用一个接头将两根竖直的棒连接起来;为了使它更结实,他在一根棒的三分之一处加了一个接头,在棒的三分之二处加了另一个接头(没有将两根棒连接起来)。但这个无意义的操作使他想到了一个好办法,将这些接头的外端转向底部,并插入棒子来支撑结构。

在这些反应中(与水平1A的那些相关)明显的进步,是被试确信成功是可能的,直率地构想计划并将它们宣布出来。在失败的情况下,不放弃他们的努力,至少不是立即放弃;相反地,他们试着纠正他们的结构错误,并改进他们的操作。不过,这些积极方面的缺陷是,被试对能力的自信导致他们尝试一切——做出荒谬的修正和适当的校改。当Jos试图为建造旗杆用接头的一半来支撑它时,或当他在两根棒中的一根的不同高度处安装铰链时,对于他来说,为这些想法找正当理由是困难的,且后一个想法使他发现支撑结构的巧妙的解决办法。被试尝试任何办法,看结果如何,实质上他们仍然处于经验的、外部变化的水平;不过,一些成功的改正为他们提供了更内在地理解的开始。

水 平 2

从这一水平起,甚至水平2A的被试也尝试建造三维结构。但除了一些成功的、附加的结构之外(如建筑群等),只有在水平2B我们才发现更概括化的协调。这里是一些水平2A的例子:

Mar(6;11)打算建一幢房子,首先建了一个很不错的正方体,接着他建了一个正方形的复制品。“这将做什么?”*像这样,像这样*(他指明几层水平)。立即纠正了一个摆错了的接头。当这些水平被重叠放好之后,他就用一个平顶将它们盖上,但由于更喜欢倾斜的顶,很快建了一个三角形,也被很好地放在了一起(在顶端用一个60°角的接头)。这样建造的三个三角形,被简单地放在一个顶端没有接头、通过一根棒相连的空立方体上。一切都倒塌了,但他用两根连在一起的棒成功地纠正错误。他试着在单独一个接头上建一个旗杆,接着在两个接头上:*不行,这永远也立不起来。*他安装了两根横的棒,一根在另一根对面,使棒落到旁边。他发现还需两根交叉的棒,但他将它们放在总高度的三分之一处——成功了一半:*它始终没倒下来!*

Los(7;5)建造了某种*帐篷形的东西,但它站不直*;接着是一个连接得很好的三角形和一个类似的矩形。之后,他继续建造三维物体,棒子堆成(没有接头)立方体,一个用三堵垂直的墙建的车库。他用一个倾斜的支柱支撑旗杆,当这样做结果

仍不行时，他用在平面上紧密排列的棒使它稳固。接着他发现不用支柱保持旗杆直立，这个系统也足够了。

Van(7;8)很快建造了立体的堆，没有用接头而将棒重叠摆放；她也在平面上建造了连接得很好的结构(菱形，等等)。为了了解她要用它来做什么，我们向她展示了以90°角连在一起的两根横棒做成的三面体结构，以及在这个接合点上举起的一根垂直的棒(这意味着这根棒穿过两个接头)：*哦，是的，你怎么做的?*“你能用它做什么?”*像那样的正方形*。她打手势指着一个立方体，接着她用将三根棒摆成四个角中的三个，将其他的棒简单地堆在顶部，这样建造它的底。“怎么样才能使它站住呢?”*哦，我知道了：你把两个连起来！*她使用三面体结构，在另一个角上调换两个接头，最后以一个立方体结束——由于它的一条垂直的脊包含有两个并列摆放的上升物，而不是简单一根棒，所以它有轻微的缺陷：*我不知道我做了什么*，(两根棒之间)*有一道缝隙；它不像其他的……这儿有两个!*

Ant(7;2)为了使旗杆站立，将它放在相反摆放的两根棒之间：它落到了一边，于是他想到了改正的办法。即加一个从中穿过的棒，首先在底部，接着在最初的一根棒的末端附近。但这样做时，他好像混淆了平面和方向，使旗杆横着倒下。不过，他已打着手势正确地表明了他的计划：“告诉我你将怎么样放这根棒。”*像那样*(又用手势正确地指明)。然而，他还是像以前一样重复了相同的程序。

Ced(8;6)用三根棒建造了一个隧道⌈⌉，尽管两个底上放了接头还是倒了；他在平面的右边加了两根棒：又失败了。他给每一边又加了一根棒并在左边对称地放了六根，这样使结构稳固了。接着他试着建造一张桌子，但没能成功地使交叉棒直立。最后他决定继续建造桩。

在阅读这些口语记录时，你可以发现在平面水平工具可能性得到实现(连接完好的正方形和Mar的三角形、Van的菱形等)，同样的可能性对于某些例子中的垂直旗杆也是真实的(Los)。同样，只要三维结构是简单的附加的堆积，就能成功地建造它们，因为在所有这些例子中，物理可能性仍然是简单的且能很好地被理解，它促进了行动。另一方面，三维组合失败了，既不是因为缺乏对结构设计的想象，也不是因为三维空间引起了比平面多得多的关系，而是因为物理可能性意味着更复杂的协调和连接(如当Van解释接头的位置时说的“哦，你把两个连在一起了”)，且因为被试在考察工具可能性之前，未留心考察物理可能性的特殊形式。现在，惊人的是在水平2B，被试开始更彻底地考察这些可能性，似乎他们刚经历过水平2A，并由于失败变得谨慎，知道必须回头分析物理可能性。更简单说，他们因果概念的发展更先进，猜想在计划任何工具可能性之前，必须从详细地确定各种物理可能性并理解它们开始。

Vil(9;1)拿走接头，开始制造基本线性的和平行的连接：“你想试着做什么?”*我想看看我能做什么*。之后他制造了各种角，最后是一个构造得很好的正方形。我们向他展示了一个三面体的结构：*这让我想到了一个主意*。在十分困难地为较

链定位，重建了三面体并最终明白了它们的连接后，他便成功地建造了一个立方体。他指出了再建造另一个类似水平的立方体的可能性。

Col(9;7)同样从简单的线性和角形的连接开始，接着建造了一个正方形。之后，他在两根水平的棒上调整两根竖直的棒，接着用一根垂直的大梁将这些盖上。这个结构似乎是容易散架的，所以他将铰链移向中心并使直立的棒子倾斜，又加上另外两根棒，沿着底部纵向摆放的一根棒巩固了结构。我们提议建造三面体，他改建了它，用一个对称的复制品完成此任务，结果建成了一个立方体的底。此外，他增加了一个层次而不是关闭它。

Ris(9;6)在试图建造一些初步的线性和角形的结构之后，建造了两个顶点相连的三角形，但这些仍是不稳固的。类似地，她建造了通过两根横向的棒的上端相连的两个正方形，且为了巩固结构在底部附近又增加了两根棒，但她在为铰链定位时感到有些困难。最后她成功地建造了一个稳固的立方体，她加了一个背将它变成了一把椅子。

Jan(10;10)在进行了一些非常简单的操作之后，仿佛打算建造一只老虎：身体是一个棱柱，头有点像M，但向前倾。

这个水平不同于以前的水平的两个相互联系的特征清楚地显现出来了。第一个是我们在许多简单的、初步的、渐渐变得更复杂的尝试中发现的，对物理可能性更认真的考察。然而，此考察最惊人的特征是，被试需要理解而不仅要成功。当遇到三面体时，被试并不立即着手他们自己的类比方案；而是（即使像Vil所说，"这让我想到了一个主意"）他们首先试着重建同样的结构，以便领悟铰链的工作原理：这解释了他们在建造立方体和其他形状时的成功。这一建构的第二个特征（和他们成功的原因）是，在协调性地改正各种组成部分的意义上，他们趋于倍增——例如，改变铰链的方向，同时也改变它在棒上的位置和棒的方向。相比之下，在单纯积累附加物的意义上，水平2A的组合仍是附加的——例如，几乎所有的被试所建造的桩，对底的修改（同类元素的加法的积累）。回想Ant的惊人行为，她为巩固旗杆的底而加了几根横着的棒之后，以将杆放倒而告终，似乎目标并不是（即使他两次用手势指明）使它站直。

水 平 3

11—12岁的被试表现出一种对于这项研究很特别的独特情境。我们认为，这个情境是可能性的双重性质的结果：物理的和工具的。这样，这些被试没有展示出共同的或类似的行为，而是分成相当不同的两组。一组清楚地表现出连续性和在水平2B中观察到的，他们在计划和工具的实现方面的进步，而另一组集中于微小的、持续的和准递归的变化，这些需要分别予以考虑。这些是来自第一组的例子，没有表现出特殊的问题。

Dav(11;3)将他自己限制在两种初步尝试之中,一条直线和一个90°角:*我看看那个是怎么做的*。接着他继续建造了一种竖式的十字架十,他将它放在一根横向的棒上,这根横棒也被与它垂直的也在平面上的其他棒固定,但每一根棒都配有┤和├形状的竖式的结构。当然,他遇到了一些困难,他一个接一个地改正错误克服困难。接着他做了一个正方形,他正确地将它完成为一个立方体,而不需要我们像在水平2B时那样向他呈现三面体。

Syl(12;9)从平面开始,但补充说:*我试着做一些不那么容易做的东西*。她继续做竖直的棒,经常关注精确性:*我并不总能立刻看出,我应把铰链朝什么方向转,它朝哪边弯才能成为我所想的那样*。对于一个立方体:*你用它做不成对角线……你不能把一个接头放到另一根棒上*。她向我们展示由于*接头那儿的正方形*,所以这是不可能的(她指出不可能的位置)。建造了一个立方体之后,她建造了一根棱柱。

Arc(13;10)从建一个正方形到建一个五角形,再到顶端相连的六条垂直的分支的结构,这样它们构成了一种星星的形状。在失败了几次之后,他成功地将它闭合。

当我们比较水平2A与2B时已注意到的事实是,这些工具的成功依赖于被试对使用过的连接的理解。不过,第二组被试似乎有相当不同的定位和目标。他们力争最简单的变化和那些使用最容易的连接的结构,而不是计划各种困难的目标,似乎游戏的目的是去发现材料的基本变形(Syl想回避的"太容易"的结构),即使冒着稍后出现的风险;然而有太多这种被试像这样认为。

Isa(11;0)花了两小时描述这样连续的变化:她以直线开始,接着呈现了三种连在一起的平行线,然后是各种各样朝上或朝下的角,接着是一个直角。她从角进行到菱形、正方形,再到一个多角形。她将两条平行线从中相连,好在上面建东西,这使得她建成其他字母形结构。这些角随后被结合起来,形成由3个,接着6个,最后10个角形的部分组成的金字塔形;她将这些换成房子的形状,或回到角形将它建成由4个,接着5个角组成的星星的形状(在接合点做反复修改)。之后,她将竖直的棒变换着数量排列在单独一个底上。只在将近结束时,她才返回三维结构,她把它比作水平通道,向我们展示如何安装铰链以获得垂直的关系。

Cla(11;2)表现出同样的反应,角形和金字塔形,接着是一系列通过直角成对相连的平行线,接合点左右变动。

Jos(10;7)建造了许多水平的或垂直的平行线,像这样排列;＿‾‾＿‾‾＿,接着建造了一些Z字形,再通过Z形接近建成角形。

如果这些操作持续期间较短,可将它们看成在水平2B中发现过的简单考察之类的开始。但在它们的持续期间似乎使这些行为在一定程度上终结。如果这个解释是对的,那么这些行为可被看作是:尝试使一个人自己行为的作用减至最小(工具的可能性)

和使潜藏在材料中的物理可能性的变化增至最大。当然,这些被试在比那些第一组的被试要低的水平上起作用。尽管前一组被试在他们对物理连接的理解的基础上,加上了能得以实现的富于想象力的计划,从而对两者进行了完美的综合,但直到最后阶段,物理可能性与工具可能性之间仍有两重性。

在第七章,我们将回到对物理可能性的性质的讨论上。在这一点上,简要描述物理的与工具的可能性之间进步的协调已足够了。在水平1,被试或者集中于前者(1A)或者后者(1B)。在水平2,协调有进步:在水平2A,协调仍是不完美的,但在水平2B,两者之间存在可能仍只是局部的或已相当普遍的相互促进。在水平3的第一组中,有对两方面的理解的综合,但第二组被试将他们使用工具的能力集中在对物理可能性的变化的更详细分析上。

第七章　升高水平面

与 C. Brulhart 和 G. Tissot 合作

在第六章中,我们注意到必须在物理可能性和工具可能性(程序可能性的特殊例子)之间做出区分,前者与修改复杂材料所产生的影响(因果的性质)有关,后者利用物理可能性建造自由结构。在这一章中,我们不再察看自由组合;反倒是被试的自由将服从于一个目标,即将各种物体浸在玻璃缸中以提高其水平面。不过,由于这些物体大小不一,重量不同,我们将集中分析物理可能性。这一类型的可能性提出了一个重要的认识论问题:我们将看到的存在于被试身上的可能性,或所有的变化和关系——特别是那些被转变为法则的——只不过是"现实"吗?我们看作物理"可能性"的东西(包括"实际效果"),只是物理学家的主观预料和推论吗?特别是,制定科学法则的科学家建造因果关系的解释模型,它们的状态的必然的或可能的特征,与此问题相关。也许对物理可能性的起源的心理发生分析,与解决此问题有关。

材料包含有一个圆柱形的玻璃缸,儿童可将一块木头、一个烧杯、一根蜡烛、三个铅锤、一片海绵、一个有盖子的果酱瓶、一个管状的金属盒、一块石头和一个可充气的气球投入其中。我们只要求被试用这些东西将水平面升得尽可能高。

水　平　1

正如我们在早期实验中经常看见的那样,预计产生因果效应的初始行为,并不能将导致产生这种结果的客观过程与暂时改变现实但被认为将持久产生所希望的结果的被试行为加以区分。

Val(4;11)将两个铅锤投入水中,接着她试着用手将一片海绵按在水底。它总要浮起来。她又加了一个大的铅锤和一个石头。水没有升得很高。她又放入不带盖子的瓶子和那块木头。*啊,这次水升高了一点*。之后,她宣布:*我还要再做一次,使水升得更高*。她将所有物体拿出后倒空,并将它们放回水下。"它跟刚才一样还是不一样?"*不一样*。"为什么?"*我不知道*。这次她试着将蜡烛放在水底。"有没有哪种东西能使水升得比其他东西使它升得更高?"*没有,都一样*。

Isa(4;11)不厌其烦地将较轻的物体放入水中,使它们漂浮在水面上。*为使水升高我们需要更多东西,但你也可以仅将它们取出再放回去*,似乎这样做产生的结果就是增加。

Ali(4;9)认为她只需要用气球就能使水位升高,并搅动水使它产生波浪:*如果你那样做*(她现在用蜡烛这样做),*就会使它真正升高*。接着她将其他物体放入水中并得出结论说,*水升高了一点点*(木头、大铅锤等),*或者没什么不一样*(另一个铅锤和石头)。最后,她发现*可以同时将所有的东西都放进去*。

Cor(5;0)用烧杯盛水灌满果酱瓶,接着她又倒进玻璃缸中。她又用其他空的物体,甚至用瓶子的盖子重新做了一次。

Lis(5;5)拿起同一个烧杯,将它灌满,又将水倒回玻璃缸。"水升高了吗?"*是的*。"你肯定?"她看着水平面。*没有*。她将管子投入水中:*它升高了*。"你有其他的办法吗?"*我要把气球里的气放出来,那就会吹出风来使水升高*。她试着做了。*什么用也没有!* 她又想到了一个办法,即*树桩(木头)将使水升得最高,因为它最大*。但她不是凭大小判断,只是比较木头和管子的长度:*那将使它升得一样高*。

Olg(6;4)处在她这个年龄却仍旧在说,*你必须使它起波浪*(她用瓶盖这样做)。"你能用另一种办法使水升高吗?"*不能*。"试一试。"*不知道*。"用木头?"她把它浸在水中。*那样做,水能升高*。"那么如果你不把它放进水中,它还会升高吗?"*不,绝对不会*。但做了一些试验之后,她逐渐将水平面的升高归因于物体的大小。从这一点,她得出结论:*我们必须将它们全都放进去*。但随后她预言,即使气球大,*也没有用,因为它必须重才行*。

Sca(6;8) 相反,首先拿着各种物体(蜡烛、铅锤、管子)刚好停放在水平面的上方,似乎它们能吸引水,然后将放了气的气球放在水上,说也许它能将水抽起来。接着,他做了一系列尝试之后,逐渐意识到铅锤的重要性;他将大铅锤放在烧杯上,在管子里灌满水,并将它浸在水中,因为*灌了水的管子一定很重*;他不明白为什么水平面下降了。

正如曾预言过的那样,这些观察数据表明,一个人自己的动作和物体相互之间的动作,在一个惊人的程度上缺乏差异。当被试用手将物体按在水中,否则就会浮起来时,他们认为这能持久地影响物体的特性。当Val和Isa想把所有的东西取出,再把同样的东西放回玻璃缸时,他们相信通过重复自己的操作就能够产生目标结果。类似地,Ali和Olg认为通过搅动波浪就能够提高最初的水平面。最令人吃惊的是Cor和Lis所计划的可能性:将水取出再倒回,仿佛这一操作能增加它的量。Sca甚至认为,通过将物体放在水面上方能把水吸引起来;类似地,Lis,像Sca一样,想让气球吹出风将水泵起来。因此,在每个例子中,物理可能性看起来是由工具可能性造成的,且没有试着寻找真正的客观原因。在有些情况中,仍有被试暂时地援引重量或体积,但缺乏系统的考察,或甚至对所观察到的事实有充分理解。

水 平 2

从7—8岁开始,物理可能性逐渐被看作是自主的。被试将它们理解成具有自己的特点和变化,能够预见并依据事实检验它们能否被物理地实现。这导致这一水平的被试逐渐发现物体的特性。他们找到了使那些会浮起的物体停在水底的办法,这样就产生较小的影响。更优秀的被试(水平2B)逐渐提出更令人满意的解释——基于作为浸入水中的一个因素的重量,以及作为水平面的高度的一个因素的体积。这是一些从中级水平例子开始的水平2A的例子。

Son(7;2)提出一项原则,成为这些新反应的基础:她注意到那根管子自己不停在水下,便插入一个铅锤看那样是不是能让水升高。这里我们考察了对预期的因果关系的理解的影响,而这并不引起充分的解释。*应该让它再重点*是Son在这之后所做的唯一评论。当她观察到实验者通过在水中将烧杯浸至杯颈(使水升高),并接着将它灌满水让它沉入水中,使水平面升高[①],她仅注意到了一个总的关系:*这是因为烧杯沉下去了,使水也沉下去,要不然如果它在顶上,水也会升上去。*

Xav(8;2)　另一方面,在看到每个铅锤使水升高之后,将一根蜡烛放在铅锤下,将它浸在水中,接着以不同的组合及相同的方式处理了所有浮起的物体。但他没有注意到其中有些物体这样做是不行的,如将一根蜡烛放在瓶子里并盖上。他也不能理解由管子和瓶子的相对位置造成的不同效果,同时正确地注意到了水平面的变化。当问到有没有可以做得更好的办法时,他将所有的东西取出再重来一次,意识到他没有把它提得比以前高。他找到的唯一的解释是铅锤最有用,*因为铅锤很重。*

Fab(8;8)做出相似的反应,但又发现了一些新的但仍未做出解释的东西。当第三次考察所有的物体时(将它们取出并重新排列),她注意到,它总是*相同的,甚至低了点*。她认为这是瓶盖的原因(仍只有一个),她取出瓶子,移开铅锤、石头和水,并盖上盖子。接着她把倒空了并盖上了的瓶子放入水中:*它升高了!*但她不理解为什么她要试着把水灌进去:因为那使它更重,所以会使它升得更高(她试着做了)。它沉了!*没有水它却升高了!*但她不知道为什么。

Eva(9;0)将管子直着放入水中:*我希望它能站着——那会使它升得更高……或者蜡烛不能这样……如果用铅锤就能使它升得更高,因为它们重。所以那会装满一点*。烧杯在水中,她预料将石头放到烧杯里面会引起一个变化。(试着做了。)它没有升高!你知道为什么吗?"*可能因为它很重,它沉下去了*。"使它升高的是重

① 根据下文推测,应为使水平面降低。——编者注

量还是大小呢？"是那个重的。"大小重要吗？"是的，也重要（但仅在与重量联系起来的时候）。

这里是一些水平2B的例子。

Cro(8;8)在一个接一个地尝试使用了这些物体之后："使它升高需要什么东西？"重东西。"为什么？"因为如果它重，就会沉到底部并占地方，水就升高了。为做得更好，他将一个铅锤放入空瓶子中，盖上，并使它下沉。那升高了好多，我要把另外两个铅锤和那个石头放进去（他这样做了）。哦！哦！那比刚才升高得少了！我放进去太多重东西了。真令人吃惊……这样，他没发现实际上减小了体积。他拿出一个铅锤和石头，放在桌上，但瓶子紧盖着并装满水：水降得更低了！放在没有灌满的立着的瓶子中的蜡烛使他很吃惊，他对这个成功的情况解释说：有些轻东西还有些重东西。管子灌满了，他评论说：它降了！啊！因为那里面有水！他通过让管子立着将它倒空，证实了他的解释：它升高了！但他忘了已经将一个作用归于所占据的空间了。

Ste(9;8)也在重量和体积之间犹豫不定。他试着将所有东西浸入水中。"如果东西都在水底，水会升得更高吗？"我认为是的。"确定吗？"我认为确定(!)。"是什么使水升高了？"增加的重量……哦！不，机件越大，水平面就升得越高，因为它占的地方越多。这使他想到了吹气球的办法：它升高了。但他没有推广到管子，因为它是空的。

Jea(10;0)很快提出假设，即升高水平面需要在水底放最重的东西。他把一个物体放进另一个物体中以便节省一些地方来使用更多的物体。但比较了铅锤——更重但更小——和蜡烛——更大但更轻——之后，他总结说当东西更大时，就使水升得更高：（重要的是）它的大小。他仍然不明白为什么没有装水的管子，……升得更高，仅得出结论说这与重量的主要作用相矛盾——他很想使其颠倒。

在被试对这些物理可能性所做预料或推论的范围内，它们存在于物体的相互作用之中。接着被试又使这些推论服从于选择性的、经验的检验。这要求被试遵照物体行事——即，采用在材料的变形中实现了的程序的甚至工具的可能性。这些变形和它们的结果涉及物理的"现实"：它们仅相对于在活动中或在思想中修改此现实的被试是"可能的"。

这样，水平2的主要特点是工具的和物理的可能性之间持续的相互作用，前者在增多的尝试中（不成功多于成功）和假设中（可能或更可能错误多于正确）清楚地显现自己；然而，物理可能性被逐渐地发现，但仅通过或多或少准确地理解可观察到的效果，以及与它们相对照的、因果关系的解释的持久的效果。换句话说，以被试的行动开始的过程，引起关于物体的信息和发现，以及它们起作用的方式的可能的变化。这些观察结论起反馈作用，提出引起新的观察结论的新程序，如此等等。

被试使用的两种通常有效的程序，是将尽可能多的物体放入水中，并通过用较重的

物体阻碍浮着的物体，或将它们限制在角落中以压低它们，使它们停在底的附近，而不是漂在水面上。另一方面，许多错误的策略起源于对因果关系的错误理解(将水平面的上升归因于一个物体的重量)。这种理解在整个水平2A中占支配地位，并使水平2B的被试不能将体积的作用，推广到瓶子、烧杯和管子(满的或空的)。因为被试将效果归因于重量，他们用重的材料填满空的物体以增加它们的重量(如Son所说"使它更重")，而不是或不只是使它们沉下。铅锤，被看成一种重量的表达，在有些例子中，可能被当作无所不能以降低水平面(Eva："也许因为它更重，它就沉下去了"；Son提出类似的表达"因为烧杯沉下去了，所以使水降下去了")。但是，一般而言，重物被看作能将水推高，这解释了程序之中的大多数错误。在水平2B，被试发现了体积的作用。这样Cro说重量只是使物体沉下，所以"它占了地方，所以水升高了"；但这并没有阻止他稍后在犯了个错误时说："我放进去太多重东西了。这真令人吃惊……"他没有注意到通过把重东西放进盖着的空瓶子中，他减小了有效的体积。他甚至坚持认为，由于蜡烛使空瓶子沉在水下而获得的意想不到的成功，是"一些轻东西和一些重东西"的组合的结果。这表明，即使在这一水平，重量仍是一个通用的概念。

但是，最特殊水平2B的关于体积的反应，是被试不理解当像管子这样的容器灌满时或空着时的效果。在与A.Henrique的较早的研究中，我们看见，直到11—12岁，当水平2B的被试逐渐考虑体积时，仍预料一个有洞的乒乓球将比没有洞的同样地球使水升得更高，因为当洞里灌满了水，球就会变得更重，推开周围的液体的力量就会更大。[①]事实上，重量的重要作用，可以用类似于在类包含中遇到的、估计排水体积的困难来解释：被试没有考虑总体积B，即周围水的体积A与物体中的体积A'的总和，只考虑A'对A的作用。这使他们不能发现通过将空心的物体倒空，他们把A'的值设定为零并增加了A，使它变得与B一样大，这意味着水平面的升高。总而言之，由于他们不将B理解是由$A+A'$组成，他们也不明白如果$A'=0$，那么$A=B$；或者，更简单地说，A增加了同样的量，A'变成了$A+A'$。

事实是演绎推理应运用于物理可能性，这没什么异常。容易表明的是，仍在水平2A中存在的所有这么多错误程序，可追溯至未充分理解前面观察到的效果，以及成功的解决办法起源于复杂性不同的归纳的和演绎的推理，即从被试能证明什么是可能的而预测到什么是物理的可实现的。很清楚，在这种可能性中物理的仅是真实的或现实的，而可能的东西只能来自预测或重构——换句话说，它们与被试的行动有关。由于这些总是服从于事实的调节，它们不能只包括自由组合，而只能包括由事实调节的推理。

从这方面说，考查水平2中可能性产生的方式是有助益的。但在水平1，它通过从一种尝试到另一种尝试的不连贯的跳跃继续。在水平2，它包括概括化和准内在的变化。我们至少可以区别七种不同类型：(1)首先，从用手操作到选择物体代替的转变：被

① 参见皮亚杰和英海尔德：《儿童的量的建构》(London：Routledge & Kegan paul，1974)。

试把较重的物体放在较轻的物体上，以此代替用手将物体按在水底的行为。(2)大小的变化：被试观察到轻物体对水平面的影响之后，就再加进一些这样的物体，或换一个更大的物体。(3)数量的变化：看到铅锤将一个物体压在水底之后，便将几个铅锤一起放进去，让它们压在它上面。(4)从部分的到最大限度的操作：观察到未充满气的气球产生的效果之后，便将它吹大。(5)对一个动作的逆转：水平面在一次错误的操作之后下降了，被试尝试相反的操作，获得了成功。(6)位置的变化：观察到将一块木头横着放所产生的效果之后，将它竖着放。(7)几个因素的结合："为了使一个物体占尽可能大的地方，它必须大，而且必须在水下。"在这些类型的过程中，请注意每种过程的推论性质。

水 平 3

这一水平的两个创新是，对体积(包括空物体体积)的一般作用的理解，以及涉及最佳程序的演绎假设思考事实上指导着所有尝试。

Flo(11;6)将气球放入水中时有些困难，之后成功地将所有物体放入水中。对于瓶子，首先令Flo感到惊讶的是，当瓶子浮在水面时，水平面比当瓶子被灌满水沉在水底时高：*哦，是的，如果我把水灌进去，那么玻璃瓶中的水就会减少，所以水平面就不那么高了。*

Jos(11;6)已谈论过海绵：*那没有使水平面升高，因为它吸水。*对于瓶子，他将它倒空并盖紧，接着用一个铅锤将它压在水下，说*如果瓶子是开着的，那么水平面将下沉，因为里面会进水。*

Mar(11;10)谈论烧杯，说*如果烧杯里不进水，那么因为烧杯占空间，所以水平面会上升。*对于瓶子，*当它是满的时候，水就减少了：水不能从瓶子中流出来(流进玻璃缸)，所以水平面下降。*

Cat(13;5)将一个铅锤放进瓶子，看到没什么效果，立即得出结论：*在任何情况下，你都不能再说，重量更重，水平面就升得更高。*

Pat(15;4)总结了一切，对体积的压力感兴趣。他立即关紧所有敞开的物体，并将气球吹大。他所有的操作，都是为了使沉在水下的所有物体，占据可能的最大体积。

最后这个阶段明显演绎的性质，使再次处理物理可能性的性质问题成为可能，但是以更一般的方式。从最低限度说，容易表明，没有被试的这些活动，如演绎、预测、不同抽象程度的推论，或仅仅在具体行动中作为假设的试验，无论如何都不能到达这种可能性。因为物理可能性涉及尚未实现的方面，所以它们必定与预见不同水平的复杂性相关。它们决不能被认为等同于事实的简单记录，因为只有在知道了预期的结果后，这才是有效的。但如果物理可能性不能还原为对可观察到的现象的解读，那么它们是潜在

地呈现在物体之中吗？我们想坚持的最强的主张是，对于此问题的回答绝对是否定的。在一给定状态中，为接下来的 $n+1$ 状态作准备的某种东西，可能会被说成是虚拟的，因为它是不可观察的或至今还不可观察，但这仍不是一种可能性，相反，它是现实的一部分，因为即使它不能被直接观察到，而仅通过推论才知道，但它仍是有效的。

你可能否认有这样的情况，在一种状态 n 之后可能跟随一些同等概率的状态 $n+n'$，像一个骰子可能落在六面中的任何一面上。但一种重要的差异将与被试有关的可能性从物理事实中区分开：前者作为一组同步的协同可能性而存在，而后者仅是一系列事件一骰子落在它的一面或其他面上。至于同等概率性(同等可能性可以还原成同等概率性)，当有很多事件发生时，它根据频率得到测量。作为一系列独立的状态而实际存在的，仍是合并成一个同时存在的概念整体的被试活动。如格言所说，机遇既没有智慧也没有记忆，但可能性需要两者。

第八章　用相同部件可能建成的最大结构

与 E. Ackermann valladao 和 K. Noschis 合作

和下一章一样(涉及等距关系),这一章论述有关两种活动的可能性的形成:理解目标和实现这些目标的方法之变化。但发生在等距情况中的进步,在于通过更准确的关系,取代部分错误的近似值,我们将在此章中——儿童必须对“最大的可能性”赋予意义(我们注意不对它们下定义,即使他们要求给出定义),观察到的发展,在于增加了由于最初对单独一个维度(长度或高度)的注重而被忽略了的两个维度。另一方面,就部件的数量而言,呈现给儿童的材料是相同的:三个小的立方块加四个中型的和三个大的平行六面体(那些大的是中型的两倍)。结果,当被试根据体积估计可能最大的,11—12岁被试所理解的事实是:所有不同的、可能的排列大小相同。假设这项任务相当开放,即被试可按他们所希望的那样去理解,那么,我们在这里所关心的问题又一次落在可能性的动力学上。这将从两方面进行考察:通过关系的组合(甚至它们的过于决定)及它们的进步得到的可能性的倍增。在这种特殊的情况中,这样的进步需要可能的关系或变化之间的组合,因为大小包括三个维度。这些组合提出了可能性与必然性之间关系的问题,当然,因为可能性通过演绎的过程而获得的所有情境是真实的。

由于希望把各种产物的建构考虑进去,我们使用做成像商业拼装玩具块那样的木块,以适合于建造不同的线形和角形。首先提出的问题是:“用这些建一个你能做的最大的结构。”之后:“你能做个更大的东西吗?”等等。稍后:“有别的办法把它做得更大吗?”最后,“你认为‘大’是什么意思?”以及“你还有别的办法吗?”在每次成功地建构之后(即举起),我们问为什么它比上一个大。

水　平　1

随尝试而改变的产物的局限性和样式,是我们在最初这一水平中看见的特点。与前者有关的是目标(仍然是一维的)和方法(尽管目的在于改进),但是没有注意最佳化的要求。关于第二点的有趣之处是,在可能性的增加中的过于组合(overcomposition)现象;即在考察的过程中,无论什么方面都可能与另一方面相关,但没有任何能识别的次

序或计划。

Ter(4;5)将大小理解为高度,木块堆成横着的、重叠的阶层:底部一个大木块(C),顶部一个中型的木块(B),另一个C,一个B,接着一个C支撑两个排成直线的B,还有三个小木块(A)排成顶。[①]对木块的这种排列构成了以高度为目标的全部计划的一个例外。它表明被试缺乏对最佳化的注意。“你做的是什么东西?”*它们互相都在顶上*(对于最后的五个木块来说完全不是这样)。“还能将它做得更大些吗?”*不能,它们互相都在顶上*。“真的吗,不能再大了?”对于这一点,Ter犹豫了片刻;接着,他将构造物拆掉并重新开始建造,而不试着对它进行修改:在底部重叠摆放两个B,接着并排放一个B和一个A,接着放一个C,又在顶部放一个B和一个A,排成直线。接着横着放一个C,正当他拣起最后的C,开始将它竖放着时,他高兴地大声说:*啊!*然后将它摆成结构顶部的那块那样(一个未计划的过于组合的好例证!)。接着他运用这个发现,将两个C握在手中放在底部上方;但又将两个A和一个B横着排成直线,而没有重叠摆放,虽然他仍旧说:*最大的就是最高的*。

Eri(5;10)以为大的意思就是只由大木块组成,所以他拣出三个C木块并将它们以90°角放成一个正方形。“其他的呢?”*不要,只要大Lego*(木块)。“可不可能用别的办法做个大的?”*哦,可以*(他以A为接合点将三个B连起来)。*像这样,做了个大的*(他用这些B和A的木块把他做的正方形闭合起来)。“它是什么样的,你摆的结构?”*大的*。“为什么?”*因为这些Lego也是大的。那个*(C)*是大的,那个*(第二个C)*也是大的,还有那个*(第三个C)*也是,那个*(三个B)*更大——它摆了个比这个和那个都要大的*。“你能摆什么不同的大的结构吗?”*我试一试*(他将三个C木块纵向连起来,两个B木块摆成一个角,再将剩下的木块——两个B和三个A——摆在C行的顶部)。*那比我以前摆的大*。“为什么?”*它更长*。

Dav(5;6)需要在具体的物体中体现大的概念。首先将七个木块堆成三层,做了个大手枪。“你能用所有的木块做一个最大的吗?”他将两个C纵向地集在一起;将三个B放在顶部,一个放在中间,然后每端放一个;接着将三个A加在一个B的顶部。*那是一条船*。“它大吗?”*不,它只是长……啊,我想我有办法把它做得更大*。他将所有三个C排列成直线,再将另一块木块放在顶部。“你的办法是什么?”*做一条更大更长的船*。“可以把它做得更长吗?”*不,没有木块了*(他没有想到移动B和A)。

Dora(5;6)横着将所有的木块堆起。“还能把它做得更大吗?”*可以*。他推倒堆起的木块,并把相同的所有木块重新摆成几乎一样的样子。*它更高*(这是幻觉)。“为什么?”*因为它更大*。“为什么?”*因为它更高。另一个小些*。

Emi(5;9)首先做了一幢宽度大于高度的房子。“你能把它再做大点吗?”*可以*。他把它拆掉,只留两块C在底部,将它们竖着排列。他继续垒高,但也在边上放了

① 在下面的描述中,A指小木块,B指中型的木块,C指大木块。

一些木块，结果高度几乎没有超出两块C。“还是大些？”*不……是的*。他拿走了已放在第二层上面的两块C，并用B和A遮盖所有的东西。“把所有的Lego加上去怎么样？”*哦！是的*。他将一块C竖着放并将剩下的B和A加在边上。“这幢房子比第一幢大吗？”*它更小，因为我刚才让它“往上”，而现在它斜向一边*。

Jos(6;3)将三块C纵向连接，中间有接缝。“你能使它更大吗？”他加上四块B，做了一种楼梯，接着他通过将台阶拉远一些延长了楼梯。

Niq(6;5)将三块C横着排成直线并在中间留有接缝。第二次做了同样的尝试，只对接缝的位置做了改变。但在第三次尝试中，她纵向地加了一块B。接着说：*现在我要做一种高的东西*。但她只成功地搭起六层。*它没有另外一个大(用手指着长度)。这个更紧*。她又将10块木块排成一列且中间不留接缝，使它变得更大。

Osi(6;11)在将三个C和一个B排成一列之后，当我们要求他“用别的办法做”时，提议说：*如果你愿意，我将把它堆高*。她将三块C和一块B堆积起来，并在边上又加了一块B，将构造物延长了三分之二。“它变大一点没有？”*没有，它更小了*(错误的)。我们试着给了她一个很明显的暗示：“如果有人做了个又高又宽的东西会怎么样？”她做了。*我要做个正方形。啊！但那样不行。我只能把它做长*。

水平1的被试提出的第一个问题是，为什么我们把大小理解成一维的(高或长)。在严格意义上说，它不像是由虚假必然性造成的。更恰当地说，我们在这里论述的，是由协调几个维度的困难所导致的无意识的局限性。将它与水平2和3相比较，我们认为，有两个途径构成以程序中的变化和形成新可能性过程中对目标的理解为特点的关系(许多中间型的组合是可能的)。被我们称作调节的组合的办法是较为先进的途径(例如，逻辑关系或前运算功能等)。在这个例子中，可变量在一种抽象水平上被选择出来，并凭借必然性增长的固定法则加以协调。另一途径没有抽象或规则，可观察物由于它们的异质性由多种因素所决定。被试倾向于在这些可观察物之间建立各种关系，数量上不断增长的类型，经常从一种活动变到另一种活动：在这些情况中，常常建立起新关系和新组合。这解释了可能性的生成动力学。但是，这些组合之于调节性组合正如过分决定之于划界分明的系统：由于这个原因，我们决定称它们为过分组合。它们可以是相当丰富的，如在Ter的例子中，他在拣起木块的过程中发现将它竖着放的可能性。但他们轻易地得出错误的结论和理解，比如一个儿童在当五块木块在结构的顶部并行排列时说：“它们互相都在顶上。”

组合的模式——促进了新关系的产生，但缺乏对协调的调节——这既解释了程序的缺陷，又解释了理解仅一维的目标的限制。程序的引人注目之处不仅是缺乏最佳化，而且也是在被试自己对“大”这一术语的理解范围内，估计什么是“大”的时所犯的错误：在Dom的眼中，与前一种结构仅在部件的相关次序方面不同的(很轻微)一堆木块“更高”；Osi认为比前一种结构实际上稍高一点的柱子“更小”(在高度上)。Emi称一个更高但同时也更宽的结构为“更小”，因为除放在其他木块顶部的木块之外，“边上”还有一

些木块。这些被试所用的针对高度或者长度的一维概念,并不涉及两点间的线性间隔,而涉及一个外壳的整体观念,被外壳包围的部件的位置,甚至可能与大小的总概念的一般定位相反(参见第十一章,涉及等距离的水平1的表现),这自然导致了最佳化的缺乏(除了Niq以外的一般情况)。

在这些条件下理解目标的一维性是容易的。几乎这一水平的所有被试,能从长度转向高度,反之亦然。但到目前为止,他们还不能根据总面积来思考大小——即,对同时存在的一个整体的两个维度进行协调。要做到这一点,必须使用一种调节的组合方式,即以一种协调系统的方式,或换句话说,根据两个方向之间的垂直关系,在关系中建立关系。Emi的例子很好地说明,对于一个又高又宽的结构,放在边上的部件被认为有损大小(被理解成重叠)。换句话说,既然是这样,这种组合产生两种可能性。但这两种可能性直到后来才被合并,形成一个潜在的整体,一个二维的概念。这不意味着有一天,调节的组合以从不同的根源而来的运算形式出现。相反,你必须确定关系间的关系的结构,即在前面章节描述的行为方式中重复见到的更高的次序可能性的结构,是如何逐渐调节过分组合的。我们已看到协同可能性是如何逐渐取代顺序的类比,更一般地说,最初在更外在的变化中体现出来的可能性,是如何逐渐被演绎的过程(在一个划界分明的系统中内在的变化之上运算)推论出。因此,在一个二维的(后来是三维的)整体中,与以前曾一个一个地设想过的所有变化相联系的能力,当然由这种可能性的组织过程而来。

水平 2

二维性和它隐含的调节性组合的起源,是由从外部影响可能性的建构的运算引起的,还是刚好相反的情况才是真的? 这是在水平2中提出的基本问题:即,是否最初的过分组合,被内部自主的过程所调节,反过来此过程又是运算及其结构的来源。这里是一些水平2A的例子。

Ser(7;8)首先将木块平行堆集起来;接着,为了用“另一种办法做”,他重复建造了前述结构,不同的是他将三块木块(一块*C*、一块*B*和一块*A*)垂直地放在前面的木块上:这使一块*C*与底部的*C*呈90°角。第二种结构在他看来更大,他的理由是那块竖直的*C碰到了那儿*(底下的*B*),但不是很明显。另一方面,最后两种结构与前面较长的那种结构及三个垂直的结构重叠摆放的结构是相同的。“哪一种最大?”*另一种*(仅最后一种)。“为什么?”*因为我把它们全都混合在一起,所以它变大了。*

Car(7;1)立刻建造了垂直的结构甚至是倾斜的形状,接着说高度相同的一个简单堆叠的结构没有其他结构大,因为*其他的有更多形状*。她有两次这样说。

Nic(8;5)也估计一种垂直的结构“更大”,即使他没有使用所有的木块。

Tri(7;11)在将横着放的木块简单地堆起之后,用较高的部件建造了另一种结构,较高的部件比那些被远远地放在右边的部件伸得远。第二种模型的高度与前一种相同,但她认为稍大一点,因为有一些空地方,似乎大小要从整个结构,至少左边结构周围的虚的矩形框架来估计。接着她立即重新开始,在右边建造了类似的伸长部分。"你做了什么?"*我不把它们放得太紧*(即,做了一些伸长的部分),*这样来设计一个人能想象得出来的最大的巧妙结构,但我做的另一个大些*(高度相同,但空地方更多)。

Mic(8;6)首先从长度着手,接着继续做桥梁模型,由于桥洞下的空地方更多,她认为它更大。接着她换了另一种标准:*因为有很多块*,所以更大,将木块拉得就连接所允许的那么远。

这之后,被试开始明显提及两个维度(水平2B)。

Ala(7;1)首先建造了一种有四层水平的形状,每一层与前一层垂直,并说这种奇妙的结构是最大的,因为它非常宽广:*它像这个*(上上下下的手势)*和那个*(平伸的、朝两边的手势)*那么长*。接着他做了一个正方形,并重复做了这两个手势,补充说:*但还不够高。我还可以把它做得更大,但那很难*。接着,他建造了一个矩形的底,其中三条边用C,第四条边用一块B,又加上一种塔:*那儿又高又宽*(前面的C),*但那儿不够宽*(后面的B)。

Myr(7;8)首先建造长的结构,接着以将它建高结束:*这样它就很大*(朝两边的手势=长度),*那样也大*(上上下下的手势)。她建造了四种相同主题的变化更大的结构,但没有提到广度。

Ria(8;4)做了个围栏⊔,她将它建得很高:*它又高又宽*。接下来的六次尝试通过过于组合采用了许多变化,但没有超出她最开始成功建造的结构。

Ana(9;0)首先建造了一个与Ria的相似的结构,并且在靠近中线的中点处A建造了一个塔:*它很高,我也试着将它做得尽可能宽*。接着,在进行了一些相似的尝试之后:*哦,我有个办法了,我可以把它改得更好*(她做了一种楼梯)。*不,它没有更好,因为它更长,而不是更宽*。

如果我们只有水平2B的观察数据,你可能认为,程序中的进步,特别是对最大这个术语的二维的理解(甚至Ala和Ana谈到一些三维的理解)是由空间运算造成的。事实上,从7—8岁开始,被试就知道,要在一个平面上定位一个点,需要相互垂直的两个度量;即,在这一年龄开始了表面积的守恒。在有了这些结构之后,我们认为被试将超越对最大这个概念的一维理解。

然而,即使我们知道运算的特点是调节的组合,而且正如我们所反复试着表明的,这种调节是渐进的平衡过程的结果,我们仍需要了解,如果给定一个初始状态,这个发展过程是如何运算的。在水平1,可能性由定位于任何方向的过于组合产生,仅依据做某个大的东西这样单独一个标准在可能性中进行选择。现在,被归为水平2A类的被试

特别有趣，因为他们逐渐明白平面上存在的关系，或至少有一个二维的概念，这个发展被一个过程指导，这个过程潜藏在被试最初建造的过于组合范围以外的可能性的涌现中。这些最初在于从以前的结构中得到一种关系或一种变化（在被试的操作过程中连续产生可观察到的效果的支配下）。这些根源以一种连续的类比的模式发生；并且，因为目标是"做一些大东西"，所有连续的变化和可能性在一个方向中变得协调，以致结构的大小在一个维度当中增加。这些扩展可以从高度或长度着手，平行或垂直于桌子边缘，依最初的位置而定。而水平1的被试，当说到"高"或"长"时，仅仅从一个维度变化到另一个维度，而没有将它们联系起来，因此就停留于一维的行动。像Ser和Car这样的被试，使我们能观察到逐渐形成的可能性的一个一般的特点：即，从类比的、连续的模式变化到协同可能性的模式，即每一种变化同时促成其他一些变化，而不像在邻近的方式中一个接一个地变化。当Ser和Car建造出混合结构时——将垂直的关系和单纯的堆集加以合并——这使他们能根据这种混合结构，或已建造的"更多形状"的新可能性判断大小，这样我们就能观察到这种情况。换句话说，他们用多维的外壳代替以前那个线性的。这种改变在Tri和Mic身上表现得最明显，他们排列木块以包围空地，提出整个结构包含环绕占满的地方和空地方的虚的边界。这样的反应隐含地但清楚地显示出这些被试有关于表面的概念。

协同可能性的出现，不仅标志着从连续的模式转变到同时的模式（尽管这已经是一个决定性的进步），也标志着新型的可能性形成，它有利于过于组合之外的调节性组合。这些新型的可能性存在于关系间的关系，或变化间的关系，这自然地为运算的发展铺平道路。事实上，如果这一点是清楚的，即最初的关系和变化是在外部观察的基础上形成的，那么这一点也就是清楚的，即关系间的关系引起广泛的内在变化，当它们达到平衡时，就导致调节可能性产生。如果说水平2A的被试只谈到"形状更多"，"混合所有的东西"，或空的还是占满的，水平2B的被试则不再满足于使用像"高""宽"和"长"这样可能含糊的词语。而是用明确说明垂直关系（已在水平2A时建造，但没有有意识的计划）的手势描述他们建造的结构：现在，像在这里用手势所表示的垂直的关系，是需要内在调节的关系之间的关系的原型。这种关系不可能是按过于组合的样式所想象出的简单的、连续的、不相关的建造的结果。

我们已在关于水平2所发生的另一重要的进步中，看见了协同可能性本身的形成：目的在于进步和最优化的行为发展。以被试立即感觉到必要的修正而开始的行为，后来当被试将新计划与以前的结果相比时，就变成预期的行为（避免而不是纠正）。当这种情况发生时，被试可以随意支配的不仅有各种连续的可能性，而且有范围越来越广的同时可能性和选择。当协同可能性导致产生二维结构时，被试逐渐认识到最好不要仅仅选择一个维度，而是协调两个维度。说明这一点的是，Ser和Car发现为获得"更多形状""混合"所有东西，允许一种新的大小概念——发展成表面这个概念。

水平3和结论

最后这个水平的特点是两种进步：自然地认识到大小通常包括三个维度；后来发现由这一点引起的——如果根据体积理解大小，那么10块木块所组成的所有可能的形状，大小相等。

Rin(11;0)首先建造了形状是⊓的结构，有些重叠的地方。“这个为什么大？”因为它宽。当然，可以将它做得更大。她改变方法，将长度增长。嗯，这次它更长了，另一个更像一个大块，这个更长。“哪个最好？”一个到处都大的东西(她试图找到合适的比例)。现在它很高、宽和长；它比以前更大(通过补充)。

Fab(12;2)依旧首先想到高度，并把10块木块堆集起来，不过做了如下有希望的解释：如果我把它们倒过来，那也是一样的东西。从那儿她接着又建造了一个大又长的结构，然后很快将两者结合：像这样，它又高又长。当问到“哪个最大”时，她突然受到启发：那个(最后一个)……不，它们都一样，因为它的表面都是相同的(因为整个结构所用部件都相同)。但那时她不确定是否真的依赖表面。

Den(11;0)首先使横着的和竖着的部件成一定比例：它很长很宽也很高。但最初她同意试着做一个更好的，后来反对，部件的数量一样，你不可能将它做得更大……你可以做一个真正长的火车，但那样就不会高：因为我们没有改变部件，结果总是一样的。“但比较一下这两种(结构)？”没有区别：它们是相同的部件，只是放的位置不同。

Top(11;1)在建造了一些他所说的矮一点但长一点的结构之后，总结：系统总是相同的：长度、高度、宽度；但大小总是相同的，因为用的是相同的Lego。

Rem(11;2)：你可以按你所希望的那样，在周围做改变……但结果总是相同的。

跟随水平2中协同可能性的特点而来的，一种新类型的可能性形成了，像往常一样，“任何东西”这个观点标志着它的特点。三维的大小，即实体不能被改变，因为改变一个维度，必定会改变另一维度。对于给定的数量不变的部件，所有的变化彼此补偿，无论创造了什么形状的结构，总的大小不变。外延的无限与内涵的“无论什么办法”相符合，正如Rem所说：“结果总是相同的。”

这样很清楚，这一类型的可能性，涉及一个系统的内在变化，通过直接观察可推论出而不易理解，它与运算的和结构型的可能性相符——即，凭借内部组合的调节得来的推论。

因而，这里所观察到的从一种水平到另一种水平的发展，在于可能性的类型的变化：从通过类比的连续性创造的，到协同可能性，最后到可推论的、结构的可能性。这样，这一发展主要特点是，最初的过于组合被调节性组合所取代，较早的外部变化被内

在变化的系统所取代。如对Fab和Rein的观察报告所表明的那样，所有这些最终导致可能性和必然性的综合，发展的平衡过程中两个部分的综合。

但就我们认为的这些获得的意义来说，根据可能性的动力学和它们与运算结构的关系，我们强调较早的那种更原始的可能性的形式，在最高水平上并没有彻底消失。当水平3的被试未根据补偿和守恒的整个系统来推理，而试图实现某种特殊的结构，比如与不同形状相联系的维度，他们以与更小的被试很相似的方式继续(除了更高程度上的灵活性以外)。与前面的结构相比，每一种结构都导致可能的变化的新办法产生，它可能是预料的，在建造过程中想到的，或仅仅在事实之后再考虑。这里人们观察到同样的反复试验的行为，同样的搜索和或多或少定向的、探索性的行动。[①]

可以从可能性与运算的关系中得出两个结论。第一个是，在所有水平，被试产生的任何变化将使其他的变化成为可能。不同模式的发生出现在发展的不同时间：类比的连续、协同可能性和推论。发生的变化以在可能的建构物中不断增加的成果为媒介。

第二，新可能性的增多——最初从过于组合产生——由于被试逐渐发现关系之间的关系，在抽象水平上定义每种变化，迟早将导致调节性组合的产生。这样，他们把内在变化加到由直接观察得来的那些变化上(在协同可能性水平上已观察到这一点)。结果，主体活动的第二极——某些可能性之间的必然的关系的构成——逐渐起作用。这样，就像在水平3时曾清楚说明的那样，运算结构似乎是可能性和必然性的综合——数量无限的可能的形状在必然的守恒的框架内被调节。

---

① 详细地描述每一被试的活动及其产物(常常相当长而面广)不在本卷的范围和目的之内。这些主题在A. Karmiloif Smith和B. Inhelder《如果你想要进步，请获得一种理论》中进一步探讨。[载《思维：认知科学读物》，P. N. Johnson—Laird和P. C. Wason主编(New York：Cambridge University Press，1977)，第293—306页。]

第九章　用雕塑泥做的棒和球建造的结构

与 I. Flickiger 和 M. Flijckiger 合作

在这章中,我们将再次在两种情况下考察,一种是自由建造,另一种是有目标导向的建造。在前一种情况中,我们给出圆柱形、两头尖的小木棒(事实上,它们是牙签),和用雕塑泥做的很小的球(约 25 cm^3)。可以用无数种方法将牙签插入雕塑泥。在有目标导向的情况中,我们使用雕塑泥做的大球,据说它代表装满了小麦的包。任务是将它们放得尽可能高,即离地面尽可能远,使它们不被洪水冲走(既可以抬高它们也可以建一个水坝)或使它们不被雨淋(一种办法是建一个雨棚)。由于目标并未被狭窄地定义,被试就不会真正地犯错误,除了在较低水平估计平衡的问题以外。除这以外,没有哪种解决办法能被完全称之为错误的。既然这样,新可能性的形成,便着手于试图改进结构,或用另一种结构取代可能是一个改进的结构,或可能不太让人满意的结构(比如一个坏的预测)。这项任务表明了可能性的形成和不断增多的平衡问题(以前曾根据混乱和结构的补偿分析过)之间的关系;而关于可能性的特殊问题(必须进一步分析)涉及被试对混乱变得敏感的方式,在最初缺乏意识之后,对目标的界定的需求不断增长。另一个要处理的重要问题是对需要的来源(就它们被感觉到的来说)或可能的满足的缺乏(或消极的障碍)。简言之,所观察到的对目标的界定和进步的类型,将使我们得到对再平衡的一般机制的说明,根据可能性及其实现来对它们进行分析,将使我们更清楚地理解新认知能力的发展。

水 平 1A

即使在有些情况中,纠正错误相对容易,水平 1A 的被试在进行纠正时仍感到困难。对于这些被试,通过建造新的物体,比通过改变那些已建造的结构而增加可能性的数量要容易——即,通过改变目标而不是调整手段。[①]

Nat(4;6)用彼此紧紧挤在一起的 *b* 建造了一个围栏,来保护 *B* 中的小麦:*我可以把它做成圆的或者方的*。接着她决定将一幢房子和一些人放进围栏中。第一个

① 在下面的例子中,*B* 代表大棒,*b* 代表小棒。

形状由与顶端的另一个C相连(*那是头*)的两堆球做成,每堆有三个b(这些是腿)。做第二个形状时她使用了牙签,试图用它在顶端连接另一个b,但结构散了。她继续做房子,其中将一个B粘在牙签上,只用一个b做底。当这一结构散了之后,她在底部加了一个b,但它还是站不住。接着,她将整个结构搬到一个新的底上——由两个横着放的B做成。在开始做另一幢房子时,她重做了一个与前面散了的那种完全相同的结构。随后,她把一些b排成圆圈,在中间放了另一个b,她将一根牙签插在它上面,再没插别的东西了。这激发她改变计划:*我要做一朵花*,她通过重复先前的结构来做,除了将茎横着放。*我想做个更高的*,于是她又重复做,第三次,将牙签尖上的B放在一个b底上。结构又散了。

Man(4;11)　作为一次自由建构,将两个b平放在桌子上,并用一根牙签将它们连接起来。她在每个b上竖着插了一根牙签,并且说:*这是一辆手推车*。接着她决定做一幢房子。为做这个,她放下一个B,在它外围插了六根牙签。她得出结论说,*这是一个太阳*。接着她试着做一朵花:在一根牙签尖上放一个B,她把B拿在手中。"如果你不把它拿在手里该怎么办呢?"她把它放在桌子上,把B当成底。*像那样,它就不会动了!*"你知道使它自己不能动的窍门吗?"*知道*。她将B放在一个插在牙签尖上的b上。整个东西都倒了。"但怎么样才能让它站着呢?"*我要做一幢房子*。她在一个平面上建造它,用牙签将四个b连成正方形。她试图像以前那样使它与顶端的B竖直——当然又翻倒了。

Oli(4;7)为了保护小麦,决定建一幢房子,首先在桌面上做了一个平躺的人形。为了使它站起来,他试着将一根牙签扎在桌上。我们提醒他用b,他就把朝顶端的一个b倾斜的两根牙签连接起来,他又将另一根牙签横着插进去当作他的鼻子。当这些都散了时,他决定改变计划:*我要做朵花*(外围插了8根牙签的一个b,在一个平面上),*一个太阳*。"那花呢?"*是啊,一朵花*(他将他做的结构扎在一个B上);*它像这样站着*。

Pie(5;6)做了一个印第安帐篷后,他想到了一个办法,即三根牙签的顶端粘起来并将B放在那里;但他没有将B放在三根牙签之间,在那儿可以固定它,而是插进其中一根牙签的末端,这使结构全散了。他没有进行纠正或试着做类似的结构,而是继续做*一个印第安人*,*一幢房子*(一个平放的三角形),接着一个房顶和一个正方形等,但所有的东西都建在一个平放的表面上。

就目标而言,自由建构(Man)和对保护装小麦的包的指令的反应之间没什么差别。在每个例子中,被试从一个计划跳跃到下一计划,像Nat,她从最初建围栏到房子,到人,到花;或Oli,他也以花作为结束,但它又变成了一个太阳。缺乏前驱性(方法对目标的预期性的隶属)当然在这一水平的可能性的形成中扮演了重要的角色,在这一水平,类比的连续比顺化和进步更普遍。这些被试创造的结构中第二个十分重要的方面体现如下:试着使人、花等等竖着立起,在将它运用于牙签的这一端时,他们几乎系统性地失败

了(除Oli最后的发明以外,部分是出于偶然获得的)。对于理解可能性的形成的有趣之处是,他们对这些多次的失败的反应,是优先选择放弃计划,而不是修改它们。只有Nat,将一个*B*放在顶端,将一个*b*放在底部,结构散了之后,就将两个*b*放到底部以纠正错误。但是她从不试着放三个或四个;另外,她在后面两次重复了错误的结构。但似乎通过将一个*B*放在底部,并将一个*b*放在顶部,或增加牙签来改进结构,是一件简单的事。这个问题可以这样来阐述:问处于这一初始水平上的被试为什么会发现,改变计划并凭借连续类比来实现一种新的可能目标,要比在他们的原初计划方面做出改变,并因此按手段和程序产生可能性——他们对不改变整体设计只做部分改进感到满意——更容易。

对我们来说,最自然的解释似乎与前面章节中(例如,第三章)给出的那些相似。它与虚假必然性的概念有关。选择一个计划或一个目标意味着用手头材料建造一个物体,它与呈现性的、同化的格式相一致。接着,这种建构性的同化创造了想象的和真正的物体,其特征由使用的工具(*B*、*b*、牙签)直接形成。另一方面,修改这些工具以改正或改进结构,是要采取顺化的方法,但就像在第四章中所阐述的,"力求找到其实现形式的顺化活动。"不过,在这个例子中,顺化不是简单地由外部强加的,而是要寻找和选择。在这些条件下,如果一种呈现性的同化未达到其目标,诉诸一个新的目标,比想象在已实现的模型中进行顺化的变化更容易。

水 平 1B

水平1B的特点是,在以改进为目的的可能性的形成中实质的、功能的进步:最初的失败之后,对目标或计划的坚持及寻求改正——证明对成功的可能性的信念。结果,我们找到了第一种类型的成功:具有各种巩固类型的柱子的结构。这里有一些例子。

Lor(5;5)将三根牙签以发散的方向插到一个*b*上,对它进行检查之后,加上两根横着放的牙签作为支撑;他试着将一个*B*放到顶端,说,*我还不知道我该把它放在哪儿*。当所有的东西都散了时,他立即着手拉紧三根竖着的牙签,并小心地试着重新放*B*。但他察觉到散架的危险,解散了所有东西,并开始用两根交叉的牙签做一个水平的底,他在它上面竖起另一根牙签,并在顶端放了一个*B*,这又导致了一次失败。于是他说:*我又有一个办法了*,但事实上,停留于相同的程序设计:他用四根交叉的牙签重新做了一个底,小心地在中心放了一个圆的*b*(那成了一个太阳);接着,他将两根牙签竖着扎进去,这样球就会停在原地不动,在给球定位之前,他更是又加上了两根。在这样做成功了之后,我们要求他再做另一个系统。现在他将两根交叉的棒从底部拿走,并试图将它们放在边上当作支撑。因为它们太短,他将它们斜着连在上方的球*B*上,但它散了。他仍然坚持这种做法,并用三个排成一排的

*b*和八根牙签(其中第四根、第五根和第六根与第七、第八根垂直;后者将*b*固定在原地,使他得以在其上面将三根牙签竖立成三角形,一根竖在中间,另两根斜插在边上)做了一个底。这保证了*B*的稳定*因为有更多的东西支撑它*。做三角形的程序使他想到了将它与竖着的柱子联结起来的主意。结果是一个*b*而不是一个*B*在顶部的两层结构,因为要不然它就会在那里散架(在它中心的底部):*雕塑泥不够多*。接着他颠倒了层次:三角形在下面,柱子在上面,然后,在一个星形的底(17根牙签)上,他建造了一个两层的,接着三层的结构,底部有柱子和倾斜的支撑。

Lau(6;3) 当要求她针对洪水做一些东西的时,她提出建造一堵墙。她从顶部开始,将两根,接着四根牙签横向地连到一连串重叠的*b*之间。接着,她试着将这个结构靠着一个竖着的支撑物上。它散了后,她将此方案重复做了一遍,但是从底部开始,并用力将球压进牙签,使它们固定在一起。

Isa(7;6)像水平1A的被试一样,首先将一个*B*扎在一根牙签上,这根牙签插在单独一个b上。当这样做失败了之后,她立即得出结论,即一个人*需要很多球(b)和茎(牙签),那么你就能将B放在顶上了*。但她并没有将牙签插得足够紧,所以所有东西都倒了。于是她将它们插紧并使它们稍微交叉,这样做成功了。这样受到了鼓舞后,她用直立的柱子建造了两层,接着三层的结构,每层有四个*b*。她理所当然地将连接处插紧,但不敢将一个*B*放在顶端。

如果不是那些在它们之前发生在水平1A的反应,即被试从不试着改正和顺化他们的结构,这些反应没有特别有趣之处。水平1A和水平1B的这种次序似乎再一次表明,可能性不仅作为一种状态之后的另一种状态而产生,而且实质上是作为在儿童心理中发展的一个命令而产生的,但儿童对此潜在性完全无意识。我们观察到被试面对他们最初的失败时,并不像水平1A的那些被试那样放弃,而是立即注意到他们能改进结构。这些进步不在于改变整个过程(即使Lor说"我有另一个办法"),也不在于准确预见要做什么:而是在于决定,固执地赞成(像5岁5个月大的Lor重复地尝试)做出一定的改正,原始计划就能得以实现,甚至之前他们就知道改哪些。这里有一种纯粹的可能性,只布置了大体框架,其中成功的改正能根据它们的结果想象得到,但对决定以怎样的次序做出这些改正未做考虑。之后,我们看到了标志着所有尝试的特点的假设可能性的出现,被试在不知道是否会成功的情况下进行尝试(Lor在他第一次和第二次失败之间)。最后,出现了可实现的可能性,当儿童从被证实的方法转变到新的结构——区别最初的目标与新的计划;或当他们使用新的,但与较早的成功的那些类似的方法。在水平1B获得的最决定性的成功在于,能协调新综合中的两种方法,像当Lor将他的柱子与三角形的形状结合起来时一样。

这样,我们就能观察到在可能性的发生中一系列新的发展。它们不再由连续的类比引起(忽略失败),而是由一种更高层次的机制引起。在此机制中,连续的选择由假定

失败后的改进是可能的这样一种纯粹动态的可能性所决定。这个发展发生在被试能识别必要的改正类型，或赋予它假设的内容之前。[①]鉴于一次失败代表一种不平衡，且最后的成功与一种新平衡相一致，因此似乎清楚的是，发展中的可能性激发对改进的探索（在后者能被想象成任何类型的细节之前）是再平衡过程的一部分。它们代表它的机制，既是补偿性的又是建构性的，并且不同于再平衡过程中先前和随后作为最终状态的那种状态。

水 平 2

被试在试图达到他所保持的一特殊目标时犯了错误，而在水平1B中观察到的进步，对于改正这一错误是必要的，水平2的被试所做的改进更在于完满或完善：被试不再仅仅力求抬高B球，而是将它放在平面上。我们可以识别水平2A，被试仅仅试图建造一个平台，而不加固它们。

Mar（6;5）首先竖起两根牙签，在每一根的末端放了一个b；他用一个横向的牙签将这些连接起来，接着他又加上两根横着的，以获得一个潜在的立方体，但仍是张开的。最开始Mar相信这个结构会是稳定的，但它散了。接着他又将它竖起，将其他牙签与已经放好的部件对称地摆放，完成了立方体的形状。他通过将牙签平行地摆在较高的表面上，改善了结构，做成了一个好的桌子。他继续做桌子，将结构作了一些简化，用一沓沓的b当桌腿，用一堆堆的牙签当桌面，随后用它稳稳支撑了B。

Pac（7;9）首先将一个三角形改变成一种三面的结构，但不是非常规则的那种。这种结构只能支撑非常轻的B。为了支撑较重的B，他首先用平行的牙签做了一块地板，每排牙签的两端各有一个b，这样以固定牙签。接着他在每个角落放了一根牙签，再将整个结构翻过来做成一张桌子。结果当B还是太重了时，他将桌腿稍稍朝外折了一点，这成为加固结构的开始，使其足以支撑一个B，虽然不是最重的那个。接着Pac做了另一个三面的结构，这一次将一连串b围在底的周围；结果他做了一个像那些水平1B的被试做的那样的柱子。

Mon（8;6）为了抬高B，想出了居于使用柱子和横向的支撑物之间的一种中间的解决办法。她将一个B放在由四根紧紧连在一起的牙签组成的柱子顶上，接着

① 可反驳的是，儿童很少说出他们的想法，一旦发觉到失败，极可能有特别的校正。因而不是必然假定，改进本身先于随后而来的特别选择；事实上，反之可能是真的。的确，在某些场合，可能的两个时期——纯粹动力学的、无内容的可能性和假设的可能性类型——似乎是不可分离的。但仍然是，被试自发的校正意味着相信改进是可能的，这一信念在它作为欲求行为明显化之前就是纯粹动机性的，或处于一种欲求的状态（因而就有搜寻其现实化的方式中的顺化活动这一表达）。

又做了一根柱子,每一端都放了一些 *b*。她通过另外四根平放的牙签将这些 *b* 与 *B* 连接起来。这样,这个 *B* 就不是被放在一个平台上,而是通过牙签与它相连。

在水平 2B,被试继续建造桌子。他们一感觉到这些桌子有多么不稳,就用不同的方法加固它们。

Phi(8;6)用八个 *b* 和八根牙签,四根竖着放,四根横着放,迅速做了一张桌子。接着他试着用平行着放的牙签做桌面,但发现它们太短了。于是他将它们交叉着穿过四个角,再用与四条边平行的牙签完成了桌面。但随后,其中的一条桌腿变松了,他就开始做一种新的结构,这一次,他将一些 *b* 放在桌面相对的两条边的上方,以连接横向的牙签。他通过将这些斜靠在桌腿上来进行加固。他继续做更多的结构,比如一张八条腿的桌子,和一个用朝不同方向摆的牙签做成的平台。

San(9;0)做了一张普通的桌子,并且为了加固它,加上了不同高度的斜着的牙签,首先检查它们是否构成了一条对角线(在这个年龄,许多孩子仍认为,一条对角线与边的长度相等)。接着她想出了一种绝妙的办法:让边上的牙签伸长至顶上的 b 之上。这有两个作用:两根斜着的牙签能与同一个 *b* 相连,桌面能被平行摆放的牙签覆盖得更好。这样,桌子更小但更结实。不过,她的计划实现得不太好,所以她又在外边加了更多支撑物。

Ani(10;10)同样地做了一张桌面被盖得更密的更小的桌子,她继续用同样的原理做了第二层,每根牙签上扎两个 b,并用斜着的结构加固较低的那层。

水平 3 和总结

从水平 2B 的各种反应到水平 3 的那些反应的转变是逐步的,有时几乎感觉不到。在水平 3,被试发现最结实的形状是四面体。这个发现在约 11—12 岁时变得相当普遍,有时是由于在水平 2 中建造了斜的支撑物。

Isa(9;0)首先做了一个简单的立方体,她试着用对角线来加固它。她发现牙签太小了。接着她在角之间安装横向的支撑物,使此立方体变形;这样使这个结构更结实,但它不再那么像个正方形了!她试着完成支撑的系统,并放开已放好的牙签。这使她想出另一方案:*我要做个三角形*。她逐步建造它,最后完成了一个漂亮的四面体,并立即看出了它的优点——*它更结实,因为棍子更小而球上的洞也更少:如果有很多洞,它们就会松散*。

Ste(11;6)也从做一个立方体形状开始,并将更多的牙签连在新的 *b* 上完成了它的顶,但他预见把很重的 *B* 放在上面*它就会像那个那样散*(准确的预见)。他想到了斜着的牙签,*但那个不行,因为它们不能站得像直的那些那么高*。这使他想到了将四根牙签连成一种金字塔形,将它放在中间的办法。它与刚才的很像,但柱子

更结实。他成功地发现了立方体与金字塔之间的综合物：四个金字塔放在一个正方形的四个角上。横着的牙签放在顶上，构成了一个规则的平台。

Luc(11;6)同样地从立方体到了金字塔，但有五面三角形；他也试着找到与一个平顶的结合物。最后他做的结构是一个固体，有两个正方形的侧面，还有两个相对的梯形的面。接着用横着摆的牙签做成它的顶，结果是所想要的平顶。

Jos(12;5)首先做了设计来充当底的一个正方形。但他没有做立方体，而代之以一个三角形，他在它上面做了一个四面体，像其他的被试那样，似乎期待改进而不是用它们减轻遇到的困难。但他仍想要创造一个平顶，他通过补充两个合成体做成了它。第一个是在三面体的周围围起竖墙——即用不同的和不平行的墙，在它周围创造一种立方体。第二个是它的相互补充——即建造一个立方体，将它插进一个斜着的支撑物的系统中，此系统相当于一个截断的金字塔。

Gul(12;5)在经历了加固立方体时通常会遇到的困难之后，做了三个三角形的面；不过，他没有将它们连成一个三面体，而是使结构的顶张开以安装一个平台。接着他做了一个与Luc的相似的固体，他在它的顶上又做了另一个。整个结构被斜着的支撑物加固。

在水平1B做出最重要的发现之后，不考虑最初的失败，相同的目标可能通过改进的方法达到(这又代表了作为顺化发生器的可能性的来源)。标志着水平2的特点的反应，是采用了一类新的改进：它们不仅用于改正一次不成功的尝试(仍然发生，甚至相当频繁)之后的一套程序，而且用于完善将获得更令人满意的结果的一套程序。事实上，给定最初的目标(抬高一个*B*)，这意味着采用一种中间的形式，我们可称其为新*目标-方法*(针对以前的目标的方法和通过新程序达到的目标)。这在于将一个*B*放在一个要抬高的平台上，它在一种或另一种立体结构上面。

新的成就从两个方面显示出来。在水平2A中，当在水平2B系统地做桌子之前，对于所有的被试而言，通常的想法是有两种抬高*B*的方法：每种都会抬高一个平台，*B*就放在这个平台上(或*B*被连在上面，像Mon提出的那一种做法)，或一个人将单独一个*B*吊在一个柱子上。这种代表性的方案可能不是特别巧妙，但就可能性的问题而言，它证明了一种通往协同可能性状态的新发展——即曾实现的一种结构(比如一根柱子上放一个*B*等)不仅是它所是，而且鉴于发现它由一种选择引起，被试明白有另一可能性，甚至一旦实现，就还有可利用的变化。Mar最先做的潜在的墙能导向一个立方体，而这可能反过来被一个平台覆盖。Pac做的正方形的底能被转过来变成一个桌面，或很容易地被恢复成一个柱子结构。至于虚假三面体，仍很糟地被放在一起，它们不再被使用，因为被试还不明白Isa在水平3理解的东西。在不同的情况中能观察到这一类反应，因为不能同化所包含的关系，一个明显高级的模型被拒绝。甚至Mon做的虚假平台逐渐向一张可能的桌子形状改变。

总之，随着水平1B的最初的探索——部分靠运气——朝单独一个目标方向，逐渐形

成了对被看作协同可能的新变化的寻找，这导致了中间目标和新办法的形成。这样开始形成可能性的内部动力，其原则是每一个感觉到的（和先前预见的）变化成为其他变化的根源。结合性的建造被两种机制指引。在结构脆弱的情况中，连续的变化通过所结合的相似性和差异（类比）相联系，导致非常新的组合，直到在前面章节中看见的无限递归的系列。在结构化的情况中，每一个变化与以前的变化和要达到的目标（前驱性）相比较。这产生了能被评价为促进或混乱的新关系。在任何一种情况中，新变化刺激越来越多的可能性的形成。这又导致两类进步的发生：量的进步（仅当变化同样有用时）和质的进步（可容许的完善和必需的补偿）。

这些进步在水平2B被试的反应中很明显，他们不将自己限制在堆高小棒和球，好像能通过纯粹量的增加来获得稳定性；反而，他们想到聪明的策略，如减小桌子的尺寸，这样牙签能将它覆盖，并使球停在原地，或用斜的支撑物加固竖直的支撑物（未诉诸外部支撑）。

在水平3，一类新的可能性出现了，通过在以前水平中已运用过的、斜支撑物的加固力量所发动。在当前水平，一种新的关系介入了：互反性。较早时，支撑物只用来支撑以防散架；在水平3，三面体的三个斜面自己通过它们支起的其他面所支撑。[①]另外，我们观察到经济的考虑，如Isa注意到的，其他有关牙签长度的（Ste），以及立方体与金字塔的结合性程序。

这样，可能性的发展由于它最终所达成的、具有我们称作演绎的可能性，其特点是推论的预见和对所包含关系的逐渐的理解。但这和在水平2中看见的具体的协同可能性（即同时出现的可能性，被试选择其中最适合他们的），都不能解释为这种发展能还原为运算结构的发展。也不能假定，与较早的变化相比较而产生的新关系的组合，能等同于关系的逻辑及其结构所固有的组合。更确切地说，可能性有自己的动力，像我们刚讨论过的那样；此动力与运算的动力不同，它只涉及必然的关系和转换（介于真实的和可能的状态之间）。它由一种过于决定所导致，过于决定引起我们称为过于组合的产生。事实上，对于被试采用的每种对棒子和球的系统的改变，他们能观察到一整系列的变量：它们自己的运动、结构的外观形状、空间关系的精确定义、因果关系等；这些观察得到的现象，在不同的程度上可被理解成呈现性格式（包括运算格式）的一种功能，就相当于它们在决定程序性意向中起作用。依据这些因素而言，存在过于决定，在这些因素中可建立各种各样的关系，它们之中有些相关，其他则不相关。从这种关系的混合物中产生了可能性。当然，被试不记得所有这些关系，但他们所利用的那些关系，是由不同于逻辑组合的一种过于组合所造成的，它们是前驱性的和适当的。

这样连续形成的新可能性（更像随意的尝试而非有计划的建构），被试接着从那儿

---

① 先前的研究表明，11—12岁儿童理解在互反性中包含的因果关系——在用卡片制造城堡的情境中被支撑和支撑之间。参见。我的《成功与理解》(London: Roultledge & Kegan Paul, 1978)第一章。

选择能被实现的适当的假设可能性：这带来了标志着进步的再平衡之特点的改进。我们能把这里呈现的行为区分为三种水平：在水平1B，一次失败之后，可能性引起新顺化，加之目标的守恒；在水平2，我们把基于排列协同可能性的可能性看作完善；在水平3，可能性被理解为最佳化，即目标不再产生数量上最多的不同结构，而是最有效的（这里是最高）和最结实、牢固的模型。请注意，不管怎样，平衡中的两个因素——新变化的产生和补偿的改进——不是独立的，而最开始就形影不离，在随后的发展中变得越来越相互依赖。从一开始，关系的过于组合仅部分是随意的：至少它全部由这样一个动机决定，即考察什么似乎是最有趣的（在杜威和克拉帕雷德的意义上）。所以它是一种选择行为，但它通常涉及非本质的变化。随着改进方法的进步，选择仍决定越来越集中在本质变化上的新关系。这种*可能性的动力*是对新创造和改进的功能统一做出说明（尽管有一些事故和局部的倒退）。即使在自由建构的例子中，重点完全在创新，我们仍然从一水平到另一水平中观察到了进步，此进步与具体结果无关，而与可能性产生的方式有关：从类比的连续性到具体的接着抽象的协同可能性，最后是无限的递归的系列。但即使只考虑实现的结果，这样去设想仍似乎合理，即一旦被试发现了一些不同的组合，他们可能还会为没发现更多组合而稍觉不足（因为n个不同存在意味着有$n+1$个不同存在）。即是说，当他们发现新组合时，这可能是对本质变化和外延增加的一种补偿。

至于裂隙，有时我们因将其看作混乱而被责备（将弥合裂隙等同于补偿），现行的研究提供了可能对回答此问题有用的数据。当被试预料或注意到一种特殊的结构，比如一根柱子、一个平台或一个金字塔是不稳固的，而且会散时，我们是应该谈及要消除的混乱，还是要弥合的裂隙？为用语简洁，人们必须说，一个结构的散架是一种混乱，而对它及时的预测只是一个裂隙。当然，只有当被试这样理解它时，我们才能谈及裂隙。例如，一位对法老的历史一无所知的物理学家，可能不认为这是一个裂隙。另一方面，如果数据的未利用率阻碍了问题的解决办法，并由此表现出一种需要，对我们来说，这似乎与任何其他的一样是一种混乱。

第十章　一个演绎可能性的例子

与 L. Miller 和 J. Retschitzki 合作

通常,可能性的发展包含四个水平。首先,一种变化通过类比的连续性导致另一种变化。第二水平涉及一定量的预见,它是协同可能性水平,这一水平的被试在设计上的变化,只限于他们将实现的那些。随后是抽象协同可能性,所想象的实际作品仅为大量其他作品的代表性例子。最后,当协同可能性变得不确定时,它们在数量上变得无限。这一发展显示了从一种状态开始的逐渐的进步,在此状态中,当看见所获得的结果时,就一个接一个地产生所考虑到的可能的变化——即它们源出于外部数据。当被试所演绎的本质变化形成可能性时,此发展就达到了最终状态。因此我们能谈及演绎的可能性,以及它们随年龄而不断增长的重要性,并表明它们是如何由可能性与必然性之间的协调造成的。此发展的普遍性可回溯至这本书的每一章节,但演绎的可能性只在两章中仔细考查过:第八章中,关于三维大小(体积)的概念,及第十一章中,关于相等距离的建构。但在这两项研究中,由于它们不仅需要设计新程序,而且需要被试理解要达到的目标,所以问题是复杂的。

由于这个原因,在目标容易被理解,以致在每一年龄水平都能以相同方式去理解这样一种简单情况中,去分析演绎可能性之发展是有用的。我们向儿童呈现几组 $3\ cm^3$ 的六个立方体或木块,其相对的两面是空白的,剩下的四面被标上了一个小红点(我们偶尔加一些六面都被标上红点的立方体)。一个洋娃娃,也是 3 cm 高,从侧面看着立方体,以不同的次序提出四项任务:(1)洋娃娃,当它是固定的时候,应看到尽可能多的点——即要求儿童随意排列木块,堆成堆或排成平面,记住洋娃娃看不见顶面;(2)洋娃娃,还是固定的时候,应看到尽可能少的点;(3)当洋娃娃到处移动的时候应看到尽可能多的点;(4)当洋娃娃四处移动的时候应看到尽可能少的点。访谈总是从一个自由建构的阶段开始,使被试能够发现聚集木块的不同方法。

水 平 1

在第一水平 1A,少数推论是在不考虑这样的事实情况下做出的,即前面的观察数据

有利于做出这些推论甚至使它成为必要。

Nat(5;8)　对于自由建构，将木块排列成正方形、六角形、半圆形等，每种形状中间隔有一定距离。当我们问她木块是不是能停在“地板上”，她建造了一个三角形建筑。对于第1个问题，她将六个木块排成一行，中间留有空隙，这样洋娃娃能看到12个点。但似乎不是为此目的而留下这些空隙的。它们仅仅是重复她在自由建构时的行为：“她能看见多少个红点？”*6个*。“你用的是什么办法？”*6个*。“你能用另一种方法摆，使她看到更多的点吗？”*不能，她看不见这里*(她指着侧面，实际上是看得见的)。“但你能不能用另一种办法摆？”*我不会*。第2个问题，她重复地摆出完全相同的一行木块，中间留着完全相同的空隙：“她能看见多少个点？”*6个*。“你能把它们变动一下，使她看到的点少一些吗？”*不行*。“总会看到一些点吗？”*是的*。我们把木块按这样的方法摆，使洋娃娃只看见3个点。“你能改变它们，使她看到的点少些吗？”*不能*。

Cha(5;10)稍稍显示出较多的灵活性。自由建构之后——竖立的结构——他对问题1的反应是将四个木块排列一行，空白面对着洋娃娃，再将其中两个放在┌┐前面，有点的面对着洋娃娃；这样，洋娃娃总共能看见两个点。接着，他进行了一次改正，露出另两个木块的点；这样，可以看见四个点，他一个一个地将它们指出。“你还能做得更好吗？”*可以像这样摆它们*(他将它们排成一行，但随后又变回他最开始摆的样子，除了将前面的木块再朝前摆了点)。“多少个点？”*那儿，那儿，那儿……6个！*“只可能这么多了吗？”*是的*。“试着再多看见几个点。”他将四个木块排成一排，再在前面放两个，使另两个木块不被挡住。“这样看见的就比刚才多了吗？”*不，6个和6个*。最后，他决定只摆一排，但强调最好把两个系列组合起来(我们并不明白为什么)。解决问题3时，他将三个木块紧紧靠拢，另外三个隔开排成一排，但他只数出12个点，6个在前面，6个在后面(那里一样)。没有数边上的点，也没有数木块间的点。“别的办法？”他将它们推拢，但没有使最旁边的面露出点。“那样做更好吗？”*一样的*。问题2，他将木块摆弄了一会儿便总结说：*没什么可做的*。“只要让她看见几个点就行了。”他将木块排成一行，使第1，2，4，6块上的点可见。“你没忘记什么东西吗？”他转动它们，露出6个点！我们拿两个木块为例，教他如何转动它们使得不露出任何点。“你能那样转动六个木块吗？”他将木块排成一行，使木块2，4，6上的点可见。“你还能做得更好吗？”*不能*。但他还是犹豫地转动着它们，似乎不能预见任何成功的可能，最后什么办法也没想出来。“只有那一种办法吗？”*是的*。“再试试看。”他排列出另一种混合的行，露出木块1，3，5和6上的点。“那就是可能的最好办法吗？”*是的*。

Mon(5;9)　问题3，她将木块放成一个三角形，但露出两个空白面：*哦！这里什么都没有*(她转动那两个木块中的一个，但最后露出的仍是空白面)。*哦！我该怎么办*(成功地露出有点的面)？“还能更好些吗？”她将它们排成一排，最边上的两

面为空白面，她又做了调整。“那样更好吗？”*对，这里还有，这里全都有点*（两面都有，露出12个点，算上了她刚刚调整露出的两个点）。“再试试露出更多个点。”于是她又排一行，但总留一面是空白的。“这样更好吗？”*是的*。“为什么？哪里不同？”问题1，她将五个木块聚集成一大块，再在顶上放一块。“她能看见多少点？”*3个*。“别的办法？”（一行）*6个？*“再好点？”她将它们铺开，这预示着水平1B，但没有调整边缘，也没有进一步地发挥。*她能看见好多个*（8个！）。“只可能这么多了？”*我不能肯定我能这样做*（将六个木块堆成一堆）。“那样会看见很多点吗？”*6个*。“比以前多？”*不*（一样多）。问题2，她只将5个木块排成行，5个木块，4面空白面，即使她试图转动木块将点藏起来（在几处位置）。

Jor(5;10)解答问题3时，他自己满足于考虑一个两层结构的两边，即使容易转动这个结构中的木块，仍看得见两空白面。解答问题4时，他首先将木块排成一行，前面露两个点，接着堆成一堆，只在两边露打了点的面，没有打点的面放在另两边。

在水平1B，被试仍在进行推论方面几乎无能为力，但他们发现将边沿排成一行的可能性。

Xav(5;10)　问题1：他首先将木块排成一行，六个有点的面对着洋娃娃，空白面朝上。“只能那么多了吗？”*除非她能看见顶*。“否则？”于是他堆了两堆，一堆三层，另一堆两层，用上了所有六个木块。*像那样*（从底指向顶，似乎他将此理解成“看见顶”），*她能看见两点*（等等）……*她能看见6点，她看见了很多*（似乎这样比排成一行时看见的多）。“但她没有移动。”这个缺点使他想到了一个办法，即在原地稍稍转动洋娃娃，再另排一行木块，但最后那个木块稍稍往前放，这样它与旁边的木块边缘相碰。*我已经转动了洋娃娃，这样她就能看见所有东西了*。“这样比以前好吗（比摆成几层）？”*不，以前的好些，因为她能看见顶*。“你有其他办法吗？”*我总是能试一试*。接着他将三个木块沿边沿排列一行，以同样的方式将两块放在顶上，再将第六块放在后两块的顶上，边沿对着洋娃娃；这使得总共有12个点能被看见。“那样摆很好吗？”*对，12个，比那样多*（他指六个木块堆成的一堆），*但与其他的一样多*。“为什么与其他的一样多？”*总是两个点*（他指着每个木块邻近的两边）。“但哪种摆法最好？”*最后一种，我想，但它是相同的*。接着他将木块边靠边地排列一行。他认为这样做好，但不能解释为什么。问题2：三个在上三个在下的块状结构，只露出两个有点的面，他又将它减少一个，再到零个。这个技巧没有被推广到下列变化的结构中，甚至没有被推广到这样一个结构中，即五个木块排一行，第六个放在顶上。解答问题3时，他巧妙地将木块无序地分散，这样做的结果是能看见非常多的点。但当要求他做得“再好一点”时，他堆出的结构露出了太多没有点的面。

Jer(6;2)解答问题2时，摆出一排六个木块，其中三面的点对着洋娃娃。她几乎再看不到更多了：*只看见3个点*。“你能调整一下结构，让她看见的点少于3个

吗?”他重新摆了一次,最后摆出只有两个点对着洋娃娃的结构。“再少些?”重新建构:1个。*她只看见1个点了*。“怎么做的?”*将它们全都转过来*(正确:零)。“你能用别的办法做吗?”一种两层三个木块的结构,但还是可以看见3个点!“但要让她一个点也看不见该怎么办?”摆弄了很久之后,一个点也看不见了。“别的办法呢?”他正确地将木块排成一行。解答问题1时,他将四个,接着六个木块排成一行,接着说:*如果她到处走动,她将看到稍微多几个点*。这使他想出一个办法,即将最后一个木块边朝前地靠着紧挨着的木块放:*她现在看见了7个点*。他将此程序重复运用于第二个和第三个木块,它们仍排成一行,不过:*还是7个*。但接着他想出将它们分隔开的办法:在将每个木块转动90°之后,这一做法露出了9个、10个和11个点。为了露出更多的点,他建造了一根柱子,改变了木块的方向:三个木块对着洋娃娃,另外三个的边转向她。这使得9个点能被看见,但Jer没有明白他失败之处在于未将此方法推广。

Ala(6;3)解答问题2时,将四个木块排成一行,另外两块放在最末端的木块上:这使6个点可见。“你怎么知道?”*我看见了那个*(空白面)。但这并没有妨碍他随后做的结构露出一到两个点。问题1:两行(四个木块上放两个木块),可以看见6个点。“你能做到6个以上的点被看见吗?”他将它们无序地排列,但这样只露出5个点,于是他将六个木块排成一行。“你能做得更好吗?”*不能*。“为什么?”*不知道*。“为什么不露出7个?”他将它们沿边放成半圆形,但在每一末端的木块上(看得见两面)只有一面可以看见点,这样只露出6个点。“你能稍稍改变一下吗?”他转动它们并使8个点可见。“比8个更多?”他转动所有的木块使它们的顶面为空白,这并没有改变任何东西。“更好点?”*啊,她能同时看见*(每一末端的木块上的)*两个点*。接着他将所有木块沿边排成直线。*那样有12个点!*“还有别的方法可以看见12个点吗?”*那可不容易*。他又回到了那个可以看见8个点的半圆形。问题3:好结构,四个分隔开的木块再加两个边缘相碰的分开的木块,这样有21个点。“你认为这就是最可能的摆法吗?”*是的*。“我不觉得。”他在一个平面上排列它们,使它们边缘相碰,但摆成一个封闭的形状,这导致显著地增加看见的点。

这些观察数据告诉了我们可能性与推论间的关系。很明显,使演绎发生的第一个条件是,肯定预见了,且不仅仅在作为尝试而开始的行动过程中发现了可能的变化。在最初始的水平(Nat),被试一个一个地排列木块,使上面的点可见;但之后他们不预测任何可能的变化,即使在解答要求点的数量达到最少的问题2时。这些被试似乎把现实化当成除所有其他可能性之外的现实(当Cha第一个对问题2做出反应时,我们观察到了相同的反应)。推论的第二个条件是,发现通过改变一个因素而可能做出纠正(例如,转动而将点露出或隐藏),事实上,推广到了同一结构中的其他因素。但最年幼的被试(Cha、Mon等)仅通过一个一个地改正而继续,且局部的预测从未导致涉及其他因素的类比的预测。这在最初级水平即同一结构中具开放性,是协同可能性的一个缺陷。同

样的缺陷会一个接一个地在不同的结构中再次出现(如在访谈末尾,Cha和Mon所表现出的那样)。第三个条件是被试能够比较连续建造的不同结构,并准确地理解它们。Xav(水平1B中)缺乏的正是这种能力,所以他强调在两个相当不同的结构中找出“相同的(东西)”,比如竖直的结构或沿着边排列的结构。

在水平1B,我们找到了通过旋转半个90°而发现的新可能性(边朝前,这样可以同时看见两面)。当Xav想到转动洋娃娃,她就能看见所有的东西时,就想出了这个办法,而Ala发现这一办法,是他在将排列的一行木块变换成半圆形时。不过,尽管存在这些重要的进步(导致最理想的水平1的行为),这些被试仍未满足演绎可能性的推论特征之必要条件——由这些较早获得的技能造成(水平3的Xan和Jer最后建造了一根柱子形结构)。

总而言之,观察到的行为表明,即便是演绎可能性的最初级水平为何都没能在被试身上起作用;这样的作用,在水平1A完全不存在,在水平1B局部地或瞬间地有所预示,根本上涉及同时想象到的协同可能性的形成(能预见到可能的变化之优势和劣势)。这些协同可能性与先前的成就(现实化)也必须相连贯。

水　平　2

为通过预见达到协同可能性,演绎推论应成为一个先决条件。我们怎么能根据可能性发展中的进步,来解释这些推论呢?要考察的问题是,由经验与对事实的观察所引出的外部变化,如何变成由对动作的协调之反省抽象而来的内部变化。这样,由于水平2的特点是协同可能性的出现,以及进入内部变化,需要仔细考察这些反应。

Vin(7;6)用四种两层或三层的不同结构,立即解决了问题2;有一结构在前面露出了一个点,他立即对此做了改正。“你怎么做的?”*我将所有顶部的点放在底下,并且将所有没有点的面对着她或放在旁边*。对于问题1,他首先用五个木块做了一种结构(后面放一个木块):*哦,那不是最多的*。*像那样*(四层),*我可以看见所有的点*(6个)。“所有?”*不是,因为后面还有一些其他的*。“所以?”自然地说:*如果这样做*(将一面转向被试),*我就不能同时看见两面,但如果我像这样做*(旋转90°,边朝前),*她就能看见每个木块的两面*。他以这种方式排列六个木块,排成两层,这样就得到12个点。在做了一些竖立的结构之后,最后一个是两根两个木块做的柱子,用两个木块连接,形成了一个拱形(将所有的木块转向洋娃娃),我们继续考察问题3。他指着最后做的结构,说:*她能到处走,那么她看见的点数刚好是以前的两倍*(这样就是24)。解答问题4时,他以两层结构开始。接着说:*现在我明白了,她看不见侧面的任何东西*。于是他排列了两行,每行三个木块,接着试图排列成T形:*她一共能看见3个点*。

Mar(7;9)解答问题1时，从一个竖立的结构开始，接着随意地将木块分散；当他注意到一个边对着洋娃娃的木块时，他建了根柱子，转动上面的五个木块，说：*我认为让每个木块都有两点可见是可能的*。接着，他继续装配一些结构，其中所有木块都以那种方式定位。“有没有可能看到更多?”*我认为不能*。

Rob(8;9)也是在解答问题1时，将木块排列成一个圆形，从洋娃娃的角度能看见6个点(即木块的边朝前)：*那样看见了6个；但那不可能是最多的*。他很快将三块加上三块木块边朝前地排成两层。*那样能看见12个!*“可能看见的就是那么多吗?”*我不知道。也许吧，如果我试试这样做(纵向地)，可能数量相同*。他试着建造了另一根柱子：*情况一样! 每个木块有两点*。解答问题4时，他将空白面转出来*这样她能看见更多点*。接着排列了仅仅可以看到末端的点的一行木块。解答问题3时，他沿着这行木块的轴心向侧面转动，这使两边都能看见6个点：*以前(问题4中)这可能是最少的。所以，当我转动它后，它可能是最多的(!)*。“再想个别的办法?”他排列出能看见24个点的一行木块。*可能那才是真正最多的*。

Lau(8;0)立即成功地解决了问题1和2，在解决问题4时做出了一个不正确的推论(与Rob的推论类似，只部分地证明了行的倒转是合理的)；他将“可能最少的点数”理解成“最多的空白面”。这样，他将六个木块排成直线，说：*她看见了12面没有点，这是真的*。接着他将三个木块放在三个木块之上，重复说：*十二面没有点，这也是真的*。只有在数看得见的点时他才注意到，在那一行中有2点，在那个两层结构中有4点。但在考虑到Lau对问题的理解之后(这也发生在许多其他被试身上)，他预见的协同可能性明显有效。

Olg(8;5)解决问题4时，将六个木块排列一行，每一边都露出空白面。*两边是空白的*。“那就是可能最少的吗?”*不*(像Lau一样，她把“最少的点数”当作“最多的空白面”)，*有两个点(两端)。我需要一个有三面空白面的木块*。

Pac(9;10)对于问题3，设计了若干或排成行，或有两到四层的结构，每一次保持“转动了的”定位(以90°角)。他没有数就总结说它是相同的，并且是最理想的，因为*每一个木块能看见4个点*。

Sul(9;7)对于问题3的反应相同，*因为她能看见所有东西*。

Ste(9;8)解答问题4时做了一个堆集的结构，评论说*多看见两个点，因为另有一层；但在一层的那行木块中你可能会看见最少的数量——即两个，四面只有一个点：一个有三面空白面的木块将使看得见的点更少*。Ste最后评论的已是水平3的行为了。

与水平1行为的差异是明显的。在那一水平，由于做了有几分随意且实现之后才知道结果的尝试，以及通过注意到发生了什么，一种新行为才变得可能。没有预测，只有经验的总结，也没有向完全相同的情况的转变，即使是在相同的建构行动中。相反，水平2的被试不在无任何计划的情况下行动，这直接导致了协同可能性的发展。例如，

Vin在解答问题2时,以做出四个不同的结构开始,并提出这四个结构的一般原则(将有点的面放在底和顶,这样侧面只有空白面)。协同可能性——在这一水平的被试身上经常观察到——是非常有趣的,因为即使没有明确的表达,它们仍意味着从一种可能性转变到另一种,所以它们代表推论(statu nascendi)。第二,协同可能性引起对结果的预见,事实可能或可能不证实此结果;但它们不依赖于对所产生的实际结果之经验地证实。肯定地,一个经验论者会说,这样的预见没有超出经验的范围,只不过是内化的或"心理的"经验。Rignano提议按这种方式解释所有的推论和演绎推理。但他忘记了被试的行动,他们自己——首先仅以可能性的形式——产生推论。例如,当Vin在问题1中,记住后面的点,突然想出了将木块转动90°的办法(边朝前),这样"她能看见每个木块上的两个(点)",正是这种行动使被试演绎出结果——不是凭借经验的抽象而是虚假经验的抽象而记录下来。[①]换句话说,它对被试起的作用,不是与从外部就能观察到的客体的独立变化有关。由这一过程获得的新能力是程序转换,不仅从一种建构到另一种建构,而且从一个问题到下一个问题:这样,Vin解决问题1时,建造了一个能看见12个点的结构,解决问题3时使它仍保留这个样子。他简单地说明,现在洋娃娃将看见"比以前多两倍的点",这构成了从一个问题到另一个问题的漂亮的推论性的转变。但涉及的东西甚至更多:协同可能性的发展,正基于它们的组合,产生了一种朝更多可能性的新类型开放。例如,当Rob将六个木块排成一行,露出空白面(在问题4中)时,仅仅"将它转过来"以解决问题3,他将排成一行与倒转行为结合起来。这是在反省抽象的(对协调性动作的抽象)基础上,一个关于演绎地思考可能性的简单例子。

通常,朝着如演绎可能性方向的各种进步表明,水平2之运算推论和协调的特点只构成一个更综合系统之中一个特殊系统,综合系统包括通过协同可能性的形成而实现的多样的可能性。运算结构一旦得以构成,将反过来影响可能性的产生,如此看起来是由更一般的可能性发展所造成,不过它们随后会变得自主和富有成效。我们说,运算结构作为一种结果或后果的理由是可能性,甚至更是或特别是可演绎的可能性,在没有任何方向上的限制的情况下相互产生;而运算结构总是将选择的或强加的限制加以整合,因为它们以变化为独有目标,它能依据封闭系统内的必然法则加以协调。在这方面,可以观察到已在协同可能性水平呈现出的、可能性间必然的关系,如当Rob逐渐认为24点必然是可能的最大数目。

---

① 参看我们关于反省抽象的研究。(J·皮亚杰"反省抽象研究",《发生认识论研究》,Vols.34—35:法兰西大学出版社出版,1977)

水平3和总结

两种新的获得物标志着这一最终水平的特点：迅速识别最佳解决办法，最重要的是，他们依据演绎论证所做的证明被当作必然而明显呈现出来。

Xan(10;3)解决问题4时建造了最佳结构，排成一行的结构。"可不可能再做得更好些？"*我想不可能。总有一两个红点要露出来。只有两面是空白的，你不可能把三面藏起来。最后总有一面*。我们能在Olg(8;5)给出的相关解释中看到这一明显进步。

Teo(10;4)也在解决问题4时：*像那样，你就能隐藏更多*。"不可能再做得更好了？"*不可能，因为她看着的两面没有点……除非你做一个圆形*。他用两套六个木块做了一个大的圆形，空白面朝外。*她还是能在木块之间看见点。需要更多木块*。解决问题1时，他做了另一个最佳结构，边对着洋娃娃的一行。他判断这个是最理想的。因为*她看不到三个面*。

Bru(10;1)对于问题1做出了同样的论证。解决问题4时：*结构越高，她看见的越多*。这样，最佳结构在平面上。

这些反应提出了成功和理解之间的关系问题。就这项研究中所提出的四个问题来说，无疑，儿童不理解理由，但能成功建造最佳结构。他们能得出以外延的推论或归纳的概括化形式出现的可能性。也许，理解有利于程序，这样作为手段而起作用。但可能性不能被预见，像在其他情况中看见的那样(见第十章)，被试开始对这一问题如此感兴趣，以至将理解它作为自己的主要目标。既然是那样，这个最终水平中所运用的推论便逐渐扮演手段的角色。实际结果自然是成功的，但它们只被看作次要的副产品。

在当前研究中，这一水平的成功已在水平2中发现。但我们也需思考，被试如何处理最佳化的需要。结果没有随着不同结构而变得更好，可能被试通过注意到这一点，而再一次通过经验达到目标。但绝对肯定的是，需要他们能够发现理由，使可能性隶属于必然性与不可能性的关系。既然是这样，唯一肯定的是，理解作为一种为最佳建构而辩护的手段发挥着必要的作用。这里演绎可能性扮演着一个新角色，即把可能性与必然性联系起来。一般而言，这标志运算程序和结构的特点。这样的能力早在水平2的某些简单情况中已显现出来(守恒等)。

第十一章　空间排列和相等距离的建构

与E. Mayer和M. Levy合作

接下来的研究有三个部分,把它们进行比较将是很有趣的。第一部分只论述自由组合:用大约20个不同大小及颜色的矩形建筑物,包括一个教堂(和一个城堡)和大约十几棵树,如松树和苹果树,建造一个村庄。在第二部分(被试不同),我们首先呈现两幢房子和1棵树,要求被试对这些进行布置,"这样人们可以走到苹果树那儿吃苹果";接着我们通过继续要求他们("将它们以任何可能方式放""别的办法"等),启发他们对3幢、4幢和5幢房子进行多种组合。在第三部分,对于所有被试,我们都要求他们使房子与一个中心点(树,等等)之间距离相等,或者直接从20或30幢房子开始,或者从2、3、4、5幢开始,再上升到20幢。我们完成这一部分是通过将树放在一条笔直的河旁边,这样与距离有关系的是一个半圆而不是一个完整的圆。偶尔,我们也用一个改进的程序代替最初阶段,即用3棵树和两幢房子(接着是4幢和5幢)并要求被试随意摆放它们。

第1和2部分

建造村庄只产生了一个值得报告的结果:最年幼的被试倾向于规则性,7—8岁的被试则寻求差异性。这里是第一组的一些例子。

Ana(5;10)将5幢房子紧密地放成一行:*你瞧*。不过,她已将一个村庄的定义归之于很多商店和路。"你能再建一个村庄吗?"*可以*(重复了相同的结构)。"可不可以说它是单独一个大村庄?"*不,因为它们应是一起的*。

Dom(5;6)与不规则性只有一步之遥,但明显是无意之举,设计了一些相互交叉的多少有些弯曲的路,在一个角落里还放了一组松树。

Lui(5;10)建造了两排平行的成片摆放的房子,稍后合并成一种矩形。

Wil(6;0)与其他人相比,似乎更接近差异性:长长一排成片摆放的房子,与它垂直的另两排小片的房子与它两头相连,再加上中等长度的一排房子,原来是尝试着闭合:*如果我有更多房子*(松树已放在刚才平行摆放着的房子之间),*我可以把它*

彻底关闭，或者我可以把它放得整整齐齐。

Nat(7;5)尽管到了这个年龄，她自己仍局限于摆出一排大房子(排得很开)和一排小房子。树被摆在村庄之外。

与之不同，在以下被试身上，我们观察到朝差异性发展的趋势。

Cat(7;7)通过组合房子和树，建造出尽可能多的不同形状的亚系统，这里一个教堂，那里另一个，一个马棚、一个澡堂……她将1幢房子移到另一个地方。"为什么?"因为旁边已经有一个与它相像的房子了。接着因为那里太挤了，所以又做了一处改动。

Den(7;8)同样富有创造性，在一个大的圆形围栏中建造了一个亚系统(部件放得很开)。他指出一个设有海关的车站(日内瓦就是被那些所环绕!)，并又在他刚才建造的结构底部加了一些联合体。

Ang(8;4)运用了相同的原则，但不是创造性地运用。

在第一章，我们已注意到在相同年龄水平朝差异性发展的趋势。但在第一章的研究中，必须对被试下"摆出一些其他样子"的指令，他们才为三个骰子找新位置，而这里我们不要求被试以所有可能的方法建造村庄。我们观察到从规则、单调的样式到分化的样式之转变是自发的，并与被试计划他们行动的方法有关。

我们研究的第二部分(这里我们要求从2到5幢房子到达1棵苹果树，但不要求距离相等)再一次导向自由组合，但指示"发现尽可能多的组合"。结果是除了从一种形状到下一种形状的一些短期预测以外，最年幼被试运用的类比、连续、实质上未计划的程序，仍逐渐获得创造力。此创造力能与计划差异水平的较大被试相比，并证明了推论行为的增多。这样，仔细考查这些事实，并为产生新可能性的这种基本动力寻找一个合适的解释就十分重要。

Oli(5;0)用两幢房子接连地建造了19种组合，说：嗯，我找到的已经够多了，接着用3幢房子建造了13种组合，用4幢建造了19种，用5幢和6幢建造了13种；但在进行最后的试验时，他没有主动停下来。用2幢房子A和B进行组合时，可能性是成对地形成的，而组合3幢房子则很少这样：(1)A和B，一个在上面，另一个在树(R)下；(2)左边和右边；(3)斜线形；(4)A和B与各边垂直，而不像(2)那样；在(5)中他改变成B、R、A，说：现在它变了(序列改变)，从那儿他又返回解决办法1；(6)，但这一次立即将A和B摆在R的上方和下方，分别地；(7)同样，横向地；(8)在上方和在底下；(9)两边；(10)A和B呈直角靠近R；(11)在底下；(12)A和B在R的底下形成一栅栏；(13)A和B重叠放在R上；(14)A和B摆得很远，呈斜线；(15)在上方重叠；(16)像(10)；(17)像(9)，但方向相反；(18)A在左边，B在R的底下；(19)B从R那里移开，与另一边垂直相连。无疑，正是这种不对称困扰了Oli，所以他停在那里了。用3幢房子——A，B，C——我们发现了成对组合和第三个在旁边：— —变成

⊔，┬ 变成├，等等。用4幢房子，我们发现不对称的或复制(1)和(4—5)的形状，联式房屋AB在R之上，CD在它之下，或更多的对称形状：正方形、十字形等。最后，用5幢和6幢房子，他又加了一些星形和圆形。

Ast(5;8)对两幢房子进行类似的变化，说起她建造的第10个结构：*哦，我已经做了那一个！*这不是真实的，Oli两次重复了相同的结构反而没有觉察。她用5幢房子排列出一种曲线形，并立即宣布：*我也能用这些排一个圆。*

Yan(5;8)发现了一种系统，该系统预见了内在变化，但几乎可以肯定它不是由任何一种演绎程序所造成的；相反，它起源于每次建造一种结构的简单类比的连续性：有九次排成一排，房子A和树R保留在相同位置，B转动到R的左上方，接着转到A的右边，横向地在下方，同样地斜着，接着垂直地放在左边，接着R之上(以前曾做过)。随后他又开始做前三个形状，但没有觉察。之后，他使B不动，将A在周围移动。

Pau(4;5)使用两棵树和两幢房子，将后者放在前者之间，随后导致了一些微小变化。使用3幢房子时，他将树放在边上，并且再次对房子的位置做了微小变化。

Gil(5;8)　与之相反，使用两幢房子和3棵树时，将后者排成三角形或线形，并将房子摆在八种不同的地方。使用3幢房子和3棵树时，他将前者排列成行或各种三角形的样子，并且说：*现在我将把树挪一挪。*他又摆出类似的形状，但变化都不大。

要解释可能性的这种早期发展，无疑我们能做出(正如在第四章已做出)如下更复杂的假设：当被试意识到他们做出的选择，且这种选择不是强加给他们时，他们逐渐明白，没有被当作可能性而选择的其他项也被实现了。

让我们从分析意识的程度开始。当Oli建造第一个样式(1)时，做出的决定构成一种来自观察者的角度的选择，但对于被试不是必需的。如果他没有思考其他任何事，就不会有选择；但如果在行动之前，他在“在上方”和“在两边”等中犹豫，那么他执行的行动就是选择的结果，这样没有被选择的仍是在接下来的建构中要被具体化的可能性。[①]但如果在最初决定时没有选择，在执行过程中还有第二个机会，特别是如果存在反复试验和检查的行为：当Oli将房子垂直放在树的两边，他只会在A在左边B在右边还是相反之间犹豫。事实上，两种选择他都一个一个(4和5)地试过。第三，被试对结果进行检查，可能反而使自己产生已经做过一种选择这样的印象：再次举Oli建造的结构(1)的例子，当他看见A在R之上，B在R之下，旁边什么也没有时，结论明显是，想让形状成这样的人正是他。换句话说，他已做了一个选择。没有被选择的项仍然是一种可能性。当

---

① 在Ioanna Berthoud关于元语言的研究中，她问幼儿的问题之一是发明这一术语意味着什么。在此获得的反应中有两个特别有趣：“那意味着正是我决定它指的是什么”(6;11)；第二个更综合性的回答：“就发明而言，指的是选择”(6:8)。

被要求“用另一种方法摆”,他的反应是立即将房子放到另一边(2)。要假定产生于选择的可能性,正如观察者所看见的,将是循环的和重复的,因为它将意味着选择是在已经存在的可能性中做出的。当然,产生可能性的是意识到存在选择这一渐进过程——换句话说,在被试的头脑中选择概念的出现。产生以“可能是这样或是其他”的形式出现的可能性的,就是这一过程。一种选择意味着某些可能性,它们属于已经知道它们的被试,但它使被试了解到另一些在行动过程中第一次遇见的可能性。你可能会反对说这在逻辑上也是循环的。对于这一点,我们的回答是,从心理学上说,有一点不同:就可能性来说,我们论述的仅仅是一种心理状态,而选择是行动的一部分。按这种方式,我们能解释可能性的产生。

至于限制,它们构成了第二个需要思考的重要方面。当然,存在着由情境和任务所强加的限制:“寻找苹果”对Oli意味着他不能把房子放得太远。但也有由虚假必然性造成的限制。这样,Oli最初的18种结构全是对称的,而这不是偶然的。在这种情况下,就像在许多其他情况下那样,最初的可能性受到虚假必然性的限制。所以,产生新可能性的必不可少的条件是取消这些限制。在第一章中,决定三个骰子的位置与不同形状的支撑物有关,而与第一章相比,在我们的情境中要做到这一点则相对容易。当房子所放位置与两棵树有关时,情境也会变得更困难(如Pau)。

简而言之,早期的类比可能性的丰富变化,看似能够参照一种基本过程得以解释:决定的过程或直接现实化的过程,它导致做出将最初单一的目标分成两个类比可能性这样的选择,第二个类比可能性通过先实现的那个产生。这样,选择就意味着顺化,它实质上是机动性的,并引起第二种选择。因为后者会在实际执行中被不同地推迟,并能建立一个同化格式。一旦实现了这个,就产生了一种新能力,能反复运用,比如产生一系列可能性。(Yan发展了一种系统,很好地说明了这一点。)稍后这一能力发展成探索性行为,最后发展成越来越多推论的预测。这样,在一个更高水平,协同可能性实质上是同时存在的并同样“可选择的”解决办法。与此相反,水平1的被试只做出了连续的选择。

等距结构的第一种形式

一旦我们要求房子和树之间的距离相等,被试就能做出两种选择:一种涉及采取的程序,另一种涉及被试为自己所做的目标界定,这取决于他们怎样理解等距的概念。此概念最早出现的形式是认识到在树和放在一起的房子之间有一定的距离,即使房子被排成相连的一行。这样,对于最年幼的被试来说,树和每幢房子之间距离相等。

Ala(5;5)将与桌子边垂直的4幢房子排成紧密的一排。树在房子对面,与桌子边最远。“所有人走到树那儿的距离都相等吗?”是的。“能不能把它们放成不同的样

子?”可以。他将与桌子边平行的9幢房子排成紧密的一排;又把树放在对面,并且在最后一个房子的上方。我们问了同样的问题。可以。“而且像那样(我们拿走3—6幢房子,这样的剩下的仅是树和1—2幢房子和7—9幢房子之间的距离)?”啊,不!“为什么?”他将1—2幢房子与7—9幢房子挨紧,排成连续的单独一排。像那样。“其他办法?”他摆出一条正确的圆弧形,但只用了8幢被紧密地放在一起的房子。“能不能建造更多房子?”不能。他不知道摆一个圆形。

Tal(5;3)首先将房子以随意的顺序摆在树周围。距离长短不一。接着她排列了紧密的一行,有些弯曲但未构成一个半圆,不过与树有一定距离。“像那样,所有人走到树的距离就一样远了吗?”是的。我们拿走了4,5,6幢房子。“像那样呢?”是的(但她依据提问明白,住在4幢房子的男孩将“战胜”住在11幢房子的男孩)。

Cat(5;9)首先将两幢房子正确地相连放在树的对面,但接着她将此扩展为5幢房子。“他们走到树那里的距离都相等吗?”是的。“那么如果他们赛跑,谁会赢?”那一个(3)。“另一种方法?”她将房子摆成锯齿形。“但要让他们走的距离相等?”她将9幢房子相连排成一行,5幢和6幢房子对面摆3棵树。“像那样(重复问)?”是的。“你怎么知道?”我会把它们靠拢一点。她随意地将它们分散,但随后又还原成一排,中间留有空隙,将树放在3幢房子接着5幢房子对面,即她保持那一排中的两半的对称。

Lau(5;11)用3幢房子摆了一竖行,中间没有空隙,树高高在上且绝对在它们的右边。当给出更多房子时,他继续将他摆的一行增加到9幢,树在6幢房子的对面。当提醒他摆出相等距离这一任务时,他将树移到更远的地方。这使不相等变得不明显了。第二次提醒他之后,他将树移得更远,这次相当得远。

Did(5;5)当给出所有房子时,将它们排成一椭圆形。树仍在外边,邻近椭圆形最远那边:“难道没有一些人在其他人之前到达吗?”那些(1和2,对!)。“要让所有人同时到呢?”他将椭圆形变成一个S形。“别的办法?”他回到椭圆形,但将树放得更远。用两幢房子和1棵树时,他找到三种正确的解决办法,其中只有一种是不对称的。当给出3或4幢房子时,他就不能够成功地摆出相等距离了。

在1棵树和两幢房子的例子中,等距的概念得到了正确的理解(见Cat和Did)。那么,当要求推广到n幢房子时,被试提出的解决办法是什么呢?一旦我们从两幢房子进行到3幢房子,Did就采用了将它们紧密排列的策略,一个靠着另一个;而用两幢房子时,他曾允许它们之间距离比这里每幢房子和树之间的距离更大。总之,被试采用这种缩短房子之间距离的策略,似乎他们猜测通过缩短它们的形状,就会获得与树的距离相等的一般特征。这种解决办法的最简单形式,是创造一竖排或一横排(Ala),并不考虑中点,将树放在末端附近。虽然这样的排列仍是直线形,却被看成一个拓扑外壳,这样就只存在单独一种等距关系——树和外壳。这样,房子到树的单独关系之间没有不同(这些由于新可能性的出现变得不同)。被试对我们减少中间房子(3—6幢房子)的反

应是这一点的证据：Ala不再认为剩下的房子与树之间距离相等，因为外壳已经分解成两个不同部分了。

从最初只考虑树与外壳之间的关系这种状态起，一系列新可能性开始得到开发并得到实现。这些来自于被试努力将外壳之中的元素也纳入考虑中。(A)最简单的可能性是用弯曲的形状(Tal)、锯齿形(Cat)或S形的式样(Did)代替直线的形状——树和每幢房子之间的距离线性地增长。这些可以被看作是防止树和房子之间距离增长的尝试。当然，这些尝试没有真正成功(房子仍相连或靠得很近)。(B)第二个策略是确保树与至少两幢房子(1和2，对于Cat为5和6)之间距离相等，其他房子没有纳入考虑。(C)第三个方法是通过以任意的次序将每幢房子放到离树更近的地方(Cat)，暂时将注意力集中于外壳包含的元素。按这种方法，外壳被忽视了(Tal和Cat)，但只是暂时地，立即回到了或完全转变到了直线形的式样。(D)第四种做法特别巧妙：被试从最初将树放在上方或旁边，摆成线状，逐步将树移到离外壳更远的地方，这样相对于总距离，树和每幢房子之间距离的不等，变得越来越不明显(Lau)。(E)第五个策略[Lau在与(D)的组合中所采用的，也是Cat在将近结束时所采用的]是将树定位在一行的中间元素的对面。以这种方法，不是在树与每一个单独元素之间，而是至少在它与两半外壳之间建立等距。(F)第六个策略产生的结果是一个封闭的式样(Did的椭圆)。被试将这与解决办法(B)结合起来，获得了树与椭圆形的最顶头2幢房子之间的等距；当与(E)结合起来时，椭圆形的长边的两半之间距离相等。(G)最后，最高级的可能性是朝圆的方向移动，像Ala在访谈接近结束时打算排列出一条弧。这里谈到新出现的曲线，树就逐渐占据中心位置，而在(F)中对于封闭的形状来说，它仍处于外部。

中间的反应

如果我们把刚刚描述过的初级水平称为水平1A，将水平2定义为被试在进行了各种反复试验之后，找到了摆成圆形这一正确的解决办法，我们就能区分出一种中间水平1B，它具有有趣的过渡的特点。

第一组被试的特点是新可能性[让我们称它为(H)]，它在于将房子与树之间的距离分成两部分：被忽视了的可变的部分和一个共同的部分，这一共同部分只包含相等距离，并且是被试为他们的解决办法保留的唯一部分。

Pau(4;5)像在水平1A中那样，首先排成与树没有关系的一行，他甚至将它移得更远[像(D)策略]。接着他将2幢房子摆成一个椭圆形，像Did那样，他也注意到在一末端的1幢和两幢房子离树更近。“怎么做才能使他们要走的距离相等呢？”*他们必须移动，使其他的*(3—11)*都在周围，然后*(当他们全部在1和2时)*他们再一起走到树那里*。接下来，他想出了这个办法，将所有房子摆在树周围，但结果摆得很

混乱。当将树放在河旁边时,他只摆出了一个直线的式样,而不是一个半圆形。

Die(5;5)　在摆出一种随意的式样后,他并不满意,似乎退回到Ala摆出的那种竖行,树放在上端附近;但他的想法是*接着全部都走到那里*(与树最近的房子),*接着等每个人都准备好了,他们再走*(一起)。

Ste(6;2)摆出一种封闭的曲线形,大声说:*啊!那是一个圆!* 这似乎是水平2开始起作用的第一个迹象。但,她没有将树放在中心,而将它放在圆形之外较远的地方;接着,她指着中心说:*他们全都走到那儿,再*(从那儿)*到树*。

这些例子保持了我们的兴趣,因为它们表现出与中心的变化相联系的新可能性:被试不再考虑单个的房子与树之间的距离(他们隐含地评价为不相等的和可变的),而是关于一个总会合点的共同的、部分的距离。他们现在考虑的不是外壳,而是包含在外壳中的元素,以及它们各自与树的关系。[①]最惊人的例子是Ste,当她没能发现放在圆周上的房子与圆心之间的距离相等,而将注意集中于房子的居住者集合的中心,以及被放在圆外边的树之间的共同距离。

第二种办法(Ⅰ)从最初树↔外壳之间的关系到更不同的可能性,就是要将整个外壳分解成几个部分。以任何次序排列这些,因而不是对称的式样。不过,要遵守两个条件:任何一个部分的外壳内,每1幢房子与树之间距离相等;并且各个部分的外壳与树之间距离相等。

Ern(5;5)将房子分成四排(a到d),每排有2—5幢房子,还有一个小的闭合的形状(e);树在这些形状的中心,这些形状的分布既不是对称的也不是平行的(不同的定位)。"在这种情况下,每位居住者走到树的距离相等吗?"*对,那些*(9幢房子,尽管它们与树之间的距离不断增长)。"其他的呢?"*对,所有那些*(b或排成斜线的4幢房子,还有c)。但与c相比(5幢房子仍排成斜线),来自b的人没有走得很远,*因为他们太接近了*。他将它们再放远一些:*现在一样了*。

Dom(5;6)在摆出单独一排之后,将这些在树的上方集合成纵列并总结说:*他们同时走*。

Wil(6;0)在创造了横向的排列之后,立即将这些房子再分为三到四个近似平行的部分。他在周围建造了一个围栏,并将树插入上边的一排:他认为所有这些多样的、紧密排放在一起的(横向地或纵向地)房子与树之间的距离相等。这也适用于每一排房子。

这些解决办法(I)发扬成(J):这里,部分的外壳被对称地排列或排成圆形,树放在中心。

Lui(5;10)首先排成直行,树在中点的对面[像(E)],但从那儿他又向对称的式样前进,摆出两纵排,每排有7幢房子,将树放在中间3号房子的对面;这在行内和

① 这一解决与归类行为有某种类似。

行对面产生了一个双重对称式样，预示后来的正方形或圆形的式样。是的，他自己不能完成这些，但当我们向他提建议时，他就明白它们的基本原理，他将房子放在一个正方形的两条中线（也就是，+），和两条对角线（×）的终点。结果是包括两种正确的等距——不过彼此距离不等的正方形结构。

Suz（5;6）首先将6幢房子对称地排列在树周围。但在试着排列整套房子时，她只摆出大的、不对称的、卵形结构，树被圈在其中，但不在中心。之后，她将整体分成五个部分的、直线的、由四到五个元素组成的结构，排列成一个星形，树在中心。她认为房子和树之间的距离相等。

很清楚，办法（H）到（J）是尝试将树到外壳的总体关系区分成它与单个房子之间的等距。因为没有成功，一些被试想起一种可能性（K），在于突出地提出人们增加树的数量甚至每幢房子1棵树而轻易地创造了等距，但没有诉诸亚结构。

Cec（5;8）尽管能够用7幢房子摆出一个圆，并找到了（I）类解决办法，仍总结说：*树不够多*。表明每幢房子需要1棵树。

Cat（7;7）（上一节中也曾有过他）摆出一个矩形以保证距离相等，但她注意到走到中心那棵树的距离仍不相等。所以她在每组2—3幢房子前放1棵树。*我还需要更多树*。这样在每幢房子前放1棵树。

Pie（7;4）首先像Lui那样摆出（J）类对称的式样，不满意：*不，可能需要一些树*。并指出将它们放在哪里——每幢房子前放1棵。

但在这些间接的例子中最通常的解决办法是将外壳连接成封闭的形状（L），中心的树到外围的房子之间距离相等（与解决办法（F）形成对比，在（F）中树在圆的外边），在这些封闭的形状中我们能发现圆形，但被试还不明白它的特殊关联。

Jer（4;5）首先将房子分散在树的周围，接着摆成一个圆，将树放在中心。但随后他又加了3幢房子，不愿将它们从圆移开：*不，它们必须在圆的里面*。

Jan（5;3）首先将2，3，4和5幢房子放在树的周围，这使她想到一个办法，当她有20或30幢房子时，将它们摆成一个圆。接着她摆出一个正方形、三角形、一个矩形和一个肾形的结构代替圆形，每次都肯定房子到树之间距离相等。

Oli（5;0）用1棵树和两幢房子等，摆出我们以上描述过的18种对称的形状（使甚至5幢和6幢房子的距离相等），开始用20幢房子摆出半圆形和半正方形的式样（没有封闭并有一条斜边）。接着他摆出一个圆形，里面是一个月牙形，之后他摆出了一个完整的圆形，很快他用一个矩形代替圆形。尽管当他思考张开的形状时，注意到有些房子太远了，但仍声称长矩形的距离相等。

Yan（5;8） 有4幢房子时，将这些放在对角线✕或中线十的末端，两种办法都是正确的。但当给出更多的房子时，他将它们放成正方形的式样，没有觉察到对于所有房子来说，距离不再相等了。接着他摆出个圆形代替正方形，但结果很遗憾，他将4幢房子放在里边——两幢（ab）彼此连成一行，另两幢（cd）连成了一个V形。

首先他断言ab和cd之间的距离相等(情况不是这样),接着断言ab和cf(位于宽阔的周线上)之间距离相等(更不真实):“走过去的距离完全相等吗?”不。“他们从什么地方走最远?”*我不知道*。

Pac(5;8)将20幢房子排成成对的样子(十、X,等),但摆在同心圆中,距离不断增长:*他们走的距离几乎相等*。由于距离变得越来越不等,所以他能看见*一个人走得更远*。

Tie(6;3)首先排了简单的一行,树放在中线上。接着他继续摆出矩形,树放在中心:开始他断言对于所有的房子来说,距离都相等,但随后当比较1幢非常近的房子和另1幢相当远的房子时,他承认距离不相等。接着他逐渐发现一种排列方法,即4幢房子集合成一堆,2幢竖着放,2幢横着放,树放在中途。他认为这样一来,所有的元素到达树的距离就相等了,尽管在最远那头的房子距离更远。把树放在河边之后,他将房子摆成简单的一排和一个三角形,但他没有想出摆成半圆形的办法。

And(6;0)首先摆出一个正方形,接着摆出一些张开或封闭的不规则形状。他认为只有后者的距离才肯定相等。

这些事实的有趣之处在于被试区分可能性的困难——当它需要从最初的虚假必然性解放出来时。在这种情况下,后者在于错误地假定两组与n组房子之间,以及外壳与形状(行、曲线、封闭形状)之间距离的关系相等。这些错误的推论——是前面描述过的最初级水平的特点,当新可能性(H到K)挑选出某种正确的相等距离时,就被部分地消除。但摆出(L)型的封闭形状时——树不再被摆在外边,而是被摆在中心,困难就又出现了。在一组组的特殊元素间(例如,在交叉形状十或X的角之间),某种相等的距离E_1、E_2等,被逐一发现,并被推广到整个式样中,但实际上其中不存在相等距离。即,一个更大的形状$E_1+E_2+\cdots=E$包含这些单个的相等,根据这一事实,被试把它们看作同样相等:$E_1=E_2=\ldots$他们还想不出使它们相等的唯一可能性,即创造一个圆周,只有树放在中心。他们已经想到了(但只是瞬间地想到了)这种可能性,但他们不明白它是唯一可能的解决办法。从可能性的增长这一观点看,这些反应表明了将可能性与不可能性区分开的缺乏或不足:这样,外壳构成了虚拟混乱的根源,这必须通过预期来补偿(我们说虚拟,因为至少对于水平1B来说,外壳只在某种情况下导致错误的等距关系,且不是通过虚假必然性)。

水平2和3

从7—8岁开始,仅在尝试错误之后,通过连续动作,被试找到摆成圆形的解决办法,这使他们明白只有“圆形”式样才能保证距离相等。

Mat(6;8)重复进行的改正行为很有趣。他首先将一个正方形改成一个圆形，接着摆成一个星形，角到中心的距离是相等的。将树放在河边之后，他开始用同样的方式处理半个正方形，将它改成一个半圆。将河移走，回到树之后，他首先摆出矩形，又将它改成一个圆形：*像那样，它们都同时到达*。

Nat(7;5)首先也摆出一个正方形：*他们走的距离相等*。"那一个怎么样(在一个角附近)和那一个(边的中点)?"*不行*。接着她将房子间断地摆成一个漂亮的圆形。"那些呢(小房子)?"正如水平1B的被试所做的那样，她将它们插入其他房子之间但不在中心。我们将一幢房子移到离树更近的地方。"告诉我怎么做才能使所有人要走的距离相等。"她将另一幢房子移到离树更近的地方，摆出一个小圆圈。

Van(7;9)首先摆出一道曲线，但没有很大意义，接着他将它摆得稍微圆了一些："他们要走的距离相等吗?"*不*。接着他将房子紧密地排列，摆出一个漂亮的圆圈。我们又加了一些房子，他在圆的外边将它们摆成一道弧，随后，为使距离相等，他将它扩大，合并刚才那个圆的所有元素。靠着河摆出半圆形，他通过接近继续进行。

Axa(7;11)立即评论说：*我将它们摆在周围*。但他只摆出一个半圆半直线的形状。他又将这种形状改成一个圆形，但也试着摆成一个正方形，不过有一定的怀疑(*我不知道是否行*)。当看到结果后，他立即说：*不行，那里*(角里)*它们更远*。他并没有因此不用同样的办法处理河边的树，后来又改成一个半圆形。

Kar(7;2)　给她两幢或3幢房子时，她将它们摆成直线；给她4幢房子时，她改成一道弧，给她一整套房子时，她在树的四面八方摆成了一个圆形。她提出了另一种解决办法，即将它缩短成一道弧，或者将它们摆得更开，形成一个更大的圆形。

Ang(8;5)立即找到了摆成圆形这种解决办法，当要求他加上更多房子时，他拒绝(有很好地理解)将它们放在里面，因为那些*要走的距离更短*。但他想出一个奇怪的办法，使圆周的一部分空着，并在离中心更远的地方将新房子摆成一道类似的弧。只在那时他才大声说：*啊，不！他们要走的距离不相等*。接着他摆出一个大的圆形。当要求他摆出同样正确的"别的形状"时，他摆出七道不连续的弧，它们离中心的距离相等。

Car(9;8)　给出3棵树和3幢房子，他在犯了一些错误之后，接着摆出了一些弧形。当给出所有20幢房子时，他立即将它们摆成一个圆形。为了摆出其他的形状，他将它们排列成一个星形，尝试了一种各元素紧密排列的交叉形状，注意到：*不行，那样不行*。接着他回到了圆形，但交替地将房子摆成像半径一样垂直的形状，或将这些扩展出圆周之外：*那像发着光的太阳*。"你还能摆出不同的形状吗?"*不能，我觉得不能*。"正方形呢?"*不，那不可能*。

Joe(10;7)　在摆出一个圆形之后，仍说道：*我要试一试正方形*(摆了)。*不行，角将更远*。"你究竟为什么要摆正方形呢?"*我只想确定一下*。

从11—12岁开始才进入水平3。它的特点是两种新的获得:圆形的预见性必然性,它是从事实中演绎出来的,而不是简单地从事实中发现的;可能性的无限扩展,但只是从圆形的变化意义上来说的。

Cla(11;1)首先明白扩大圆形是唯一可能的变化。当更进一步地问时,他回答:*我认为有其他变化,但*……接着他将房子放成一个星形等,总是提及角。

Cri(11;9)提出摆一个圆形。"可不可以用其他方法做?"*不能,但你可以用另一种方法摆房子*(他将它们排成一个星形),*但形状*(圆的)*将是一样的*。否则*我可以扩大圆形,且可以用无数多种方法来做*。

与水平2相比,被试仍需要检验(像10岁的Joe那样)以证实只有圆形才能保证距离相等,而肯定性在水平3中成为推论性的。

总　　结

不像我们在本章研究的第2部分中所要求的自由组合(见上文从Oli到Gil),所有的解决办法只要是不同的,那就是正确的。为了解决相等问题而创造的可能性,不仅能导致成功或不成功的行动,另外,也要求对相等概念本身(或对呈现性格式)进行修正。因此,我们发现了从水平1A到3的转换。那么第一个问题是确定可能性的发展是否是由空间格式的发展和他们的运算结构造成的。[1]或者,像在建构三角形的任务中(十二章),程序水平的进步能够解释相等距离增加的精确性,我们把这个看成是与所使用的程序手段相符合的目标。

当比较儿童从发展等级的一端到另一端的解决办法时(例如,Ala将9幢房子挤成紧密的一排,将树放在最顶端最后1幢房子之上,以及水平3中摆出圆形,将树放在中心形成对比),我们观察到完全的颠倒。在最初水平,他们认为房子与树的距离相等,因为将房子看作位于单一的一个外壳之中,且因此参与这个外壳与树之间同一的距离关系——树位于外壳之外的任何地方。在最终水平,房子被看成是位于离树的距离相等的地方,因为房子绕着树形成了一个外壳,树占据中心。这样,房子对于树起着共同外壳的作用。这种从使用共同被包围的元素到共同包围着的元素的完全颠倒,似乎至少是由程序的发展和呈现性格式造成的。这样,两种机制之间的关系将更加易于分析。

如果想描述一种程序系列的格式和一个接一个产生的新可能性,我们可以将它们和1棵树做比较,树的高度代表独立于旁边的分枝的发展水平,分枝不具有相同的规则性。换句话说,在前面三段所描述的现象中,我们能从偶然可能性中区分出顺序。那些偶然的可能性,如将每幢房子与1棵树配对(见Cec、Cat和Pie),我们将忽略不计。可以

① 我们曾与英海尔德研究过这个问题,我们特别强调等距的概念。见J. Piaget, B. Inhelder, and Szeminska: *The Child's Conception of Geometry*(New York; Basic Books, 1960)。

看出，主要发展步骤存在于七种不同水平：(1)不考虑树，将房子紧密地排成行；(2)用不同方法(曲线等)将它们移得离树更近；(3)通过将树放在一行的中点对面，或两个部分的外壳(线性等)中线之间，采用对称形状；(4)放弃这些简单的对称，赞成在树的“周围”集合的那些多样的形状：例如，在两个大概交叉形状的末端，十和✕；(5)通过将房子排成封闭的规则的形状并把树放在中心[像(4)]，把树包围；(6)控制每单独1幢房子与树之间的距离，因为众所周知，年幼的儿童根据端点而不是两终点之间的间隔来估计长度，所以与任何其他的比较(x→y与x′→y相比)相比，这样摆一个封闭形状更容易，可以同时看见它的边；(7)正确地估计相等距离。结果是由绕着树的房子形成的一般的外壳，每1幢房子和树之间(4幢房子或甚至5幢，距离通常不相等)所有距离的相等，以及圆形的限制(如水平3中断言的)。这样，这一水平中想象的可能性的多样性，简化成一种类型：在交换中，这唯一的幸存者赋有内在必然性的概念。

如果这一理解是正确的，那么首先我们就能得出结论，即每一可能性以一般方式向下一可能性开放——通过类比、比较、完成等。这涉及对错误的纠正，以及发现新的关系和方法。第二，我们观察到新手段的创造通常引起新的目标，这反过来又产生新的手段。这样，我们看见被试如何增加弯曲的形状，或用弯曲的形状代替以前曾专门运用的线性形状，这样房子可以离树更近；更近关系暗示对称，这稍后又扩展到环绕。

进而，此发展不能只被解释成运算的概括化过程，因为在这种目标导向的情境中，我们仔细观察到，被试选择的是那些比其他已丢弃的程序(包括那些以前使用过的)要好的程序。在这些情境中，被试能想出成功的或不成功的解决办法(所有这些都不同于在自由建构情境中的新可能性的产生，我们曾在上文的第一部分描述过自由建构)。记住这个事实：运算格式既是程序性的，又是呈现性的，且保留概括化这个术语(呈现性的)意味着建构新结构(如与特殊问题的解决办法相对)，在这种运算的概括化和新产生的程序可能性之间，仍存在明显不同：鉴于前者以前面的——已存在的结构——为根据，并朝更大程度的递归方向发展，但没有定向于特殊目标，而后者通过选择从开始(前驱性)就已提出的定向于特殊目标的手段，改正前面已存在的结构。这样，新可能性产生后，在过程中目标得到更清楚的界定，在这一意义上，以前的那些可能性被改正和完成，反过来这又起源于为达到这些目标所使用的手段。由此得出两个结果：首先，以前的可能性变得“不可能”，要么错了要么不完整；第二，当更好地界定并理解了一个目标后，从手段逐渐变得更恰当这方面来说，目标更容易达到。换句话说，完成一个有缺陷的程序与完全的概括化过程非常不同：它意味着纠正关于目标的错误，目标本身得到了更好的界定(回想在发展的第4步和第5步，实现距离的相等时的失败)，而完全的运算概括化(如从*分组*结构到*部分-整体*结构)将以前的可能性整合其中，而不修改或拒绝任何东西，甚至不预见完成的结果(新结构的特征)。另一方面，一旦通过同样改进了的程序(缩短手段与目标之间的距离)达到目标(得到更好的界定，并接连地使它更精确和容易实现)，通过建构性的运算概括化(与用于达到目标的启发式不同)，所获得的结果就

变得合理且可论证。这些新颖的过程使得最终保留的唯一可能性从属于内在必然性的关系。

一般而言,水平1和2可能性的数量惊人的特征和它们在自发的派生方面的相互关系,似乎都指向作为一般框架的程序发展的重要作用,在这个框架中,运算是由可能性与必然性渐进的协调所构成的。

第十二章 建构三角形

与 I. Berthoud-Papandropoulou 和 H. Kilcher 合作

建构所有可能的三角形引发了我们所关注的一个重要问题——即程序格式和呈现格式之间、程序和运算之间、类比可能性与演绎可能性之间，以及通常是内部变化和外部变化之间的关系。就这些关系的后一半来说，更高水平的被试能从三角形有三个角和三条边的事实，推论出如下事实：边长可能相等，或者所有三条边或仅两条边相等；或所有的边都不相等；此外，角也可能相等或不等。这样可能是直角三角形、等腰三角形、不规则三角形。但我们在这里所关注的，不是使被试在后来的发展中这样做出推论的运算；而是想一个年龄接一个年龄地研究程序，被试通过不同材料或通过绘画，用此程序建构"所有可能的三角形"，或被他们当作三角形的结构。因为任何程序都在于通向目标的手段，所以我们的研究将立刻针对被试向自己提出的目标（他们使不同形状的三角形概念化的方式），他们使用的手段（已表明比预期的有更多的信息），及手段与目标的关系。在新可能性出现的问题方面，这些关系特别有趣，因为就一个特殊目标能通过不同手段达到来说，同一种手段也可能导致新的目标。这些关系不是对称的，且它们扩展到最初的系统之外，结果是开始新可能性。这样，这项对"所有可能的三角形"的研究，集中于一个远远超出运算分析中所处理的问题域，尽管该结构在后一个问题域中。

材料和方法

访谈（时间长度不同，取决于被试）包括五个部分。在第1部分中，我们向儿童呈现六根软管，它们中三根长度相等，其他的不相等：a，b，c，d（a=15.5 cm，d=6.5 cm）。指令是"摆一些形状"，接着是"摆三角形"；随后是"再摆一个""一个不同的""一个非常不同的"等。被试能用材料摆等边、等腰和不等边三角形。允许每条边用一个以上的元素（如果那样，我们就称它们组合）。

在第2部分，我们给出两根长软管（22 cm），首先要求被试用这些"摆一个三角形"（这使最年幼的被试感到吃惊）。如果有必要，我们将建议切断软管来建构三角形。接着我们再给出两根软管，并指示"将它们用完"，这样就不会有"任何剩下的"（起初经常

是这种情况)。最后,我们只给出一根软管,且限制性指令相同。这样,我们的想法是要儿童调整软管的长度,以便用它们来做三角形的边(这提出了许多可能性)。

在第3部分,我们向儿童呈现一根环形钢丝,像一枚戒指,上面串有3颗珍珠。我们的指令是折弯钢丝来摆一个三角形(我们还问珍珠最好用来做什么),接着摆其他的三角形,并说出每个三角形如何与前面摆出的三角形不同。这项任务的目的是给儿童提供一个机会来自由创造不同的边和角,并在某个固定的范围内(周长)修改它们。此外我们还想收集涉及从一类可能性向另一类转变的信息。此信息将是行为的和言语的:关于儿童如何折弯钢丝,以及如何口头解释他们的行动的观察数据。

在第4部分,材料包括五根不同长度的木棒(a=17.5 cm,b=13.5 cm,c=7.5 cm,d=6.5 cm,e=4 cm)。指令也是建构尽可能多的不同三角形。如果一个孩子建第一个三角形时,用了三个以上的元素(一个组合的),我们就要求他只用三根木棒来建构("另一个""一个不同的"等)。应该注意的是,用这些材料不能建构等边和等腰三角形。然而,在一定程度上,存在这些原型的近似形:三角形 *cde*(用小元素摆的),三角形 *abc*(大元素),三角形 *bcd* 和 *abe*(多种多样的元素)——接近三角形的界限。另外,某些组合不能用来建构三角形(*acd*、*ace*、*bce* 和 *bde*)。我们试着假装和某人开玩笑,问儿童:"选择三根木棒,不可能用它们摆出三角形。"目的是去分析处于不同发展水平的儿童认为不可能的是什么——可能性的限制和补充装置——并去研究他们在动作中如何演示不可能性。

在第5部分,我们要求儿童画出所有可能的三角形。这项任务用来比较受材料限制的和自由图形情境中的行为。

初 步 格 式

在这一部分,我们介绍的例子是被试尚未发展合并三角形的呈现格式时(他们的格式限制于或是圆形或是四边形的封闭图形)。这些被试要费很大的劲,才能摆出与所给出的要用软管或通过绘画生成的模型近似的三角形。

Lis(4;5)　用第1部分中给出的软管,建构了一个矩形"公园",她小心闭合了它们的三个角,第四个角还是张开的(由于长边的长度不相等);她用一根斜着放的软管进行修补。当要求她用三根软管来做时(第1部分中的c),她建构出一个正方形的三条边。第四条边仍是张开的。接着她做出了正确的建构,用三根没有割开的软管,一个角∧,但她没有将它闭合;接着她用一个四边形的三条边代替了它。尽管我们劝告她将结构闭合,她仍将这一程序重复了两次。不过,用一个长边相等的四边形,Lis自己通过将一条短边弯曲(这样就变成了半梯形)实现了闭合形状。应当细心地注意这次成功,因为每次她都必须通过一条斜线闭合三条边,以摆出一个三角形,而她简直没有三角形的概念:我们开始必须为她摆出这一形状,并大力

鼓励她继续做下去！尽管这种学习成功了一半，她随后只设法建构像⊓这样的形状，作为一个"有三条边的公园"，后来她将其中的一条边倾斜。

Vin(4;2)，我们要求他"摆出形状"，他建构了一种不等边四边形(一些)，接着是张开的矩形，他通过摆出一个锐角闭合了其中一个角。接着我们要求摆一个房顶，他将它对称地摆，用各种不规则的方式来完成它。我们随后向他展示了一个三角形模型，要他复制一个，他近似地摆出一个。当要求他再摆一个时，他以一种九个元素的组合而结束，上面的部分是矩形的，下面的由锯齿形的线构成(至少包括一些尖的部分，他曾经称它为*印度帐篷*)。接着我们给他三根软管，要求他摆一个"三角形"(已经介绍了这个术语)：他立即成功地摆出一个正方形，想找一个办法来完成第四条边。他仍然同意将我们向他提议的模型称为三角形。当要求他在画中复制这些形状时(他成功地完成了正方形和"环形")，他完成了惊人的封闭形状，他用一个*尖东西*完成了它；但这个形状的主体是一种椭圆，那个尖东西是一个圆盖！

Sti(5;6)表现出非常类似的反应，明显优先选择四边形和不完整的正方形结构(一个关紧了的公园，用三根相等的软管做的)。在看过主试做了个示范开头后，她费了很大劲，最后才将三条边中的两条边闭合。

这些观察数据表明，关于可能性发展的研究为什么应从分析不可能性开始，或更准确地说，分析使主试最初期待的可能性不能出现的因素！你可能争辩说这些被试感到的困难没有什么令人吃惊的，只是因为他们没有获得三角形的呈现格式。但是，这解释不了任何问题。真正的问题是被试完全能够弯折木棒来闭合四边形(见Lis，她的这一意向很清晰，或者Vin，他摆出了不规则四边形和梯形)，为什么不能将这一程序转为摆三角形，且虽然建构锐角和"房顶"，却不能将这些补充完整以摆出三角形。所以，肯定存在一个系统的障碍，使被试不能考虑到这种特殊可能性。障碍出现的形式是某种初始虚假必然性，它强加了这种限制。这个假设更加易于接受，因为在科学史中经常得到证实：甚至伟大的亚里士多德都认为只有直线运动和循环运动才是可能的，由此得出他对抛射体路径的错误描述(﹁)。很清楚，在我们三位被试的例子中，构成想象三角形可能性的阻碍的虚假必然性是什么：对于这些被试，唯一可能的闭合形状是四边形和圆形。我们在被试的自由建构中找到了这一点的证据，它们都属于这一类型，当Vin奇迹般地用图形复制出一个三角形模型：立刻正确地将它看成带一个顶点的闭合的形状(一个与他的虚假必然的呈现格式背道而驰的想法)，他将它描述为一个带着盖子的椭圆形，以削弱这种矛盾。这种折中提供了可能性第一个惊人的例子，即对可能性显现敏感的常见类型：保留那些似乎可接受的同时撤除一种特殊限制(也就是，只有圆和四边形才能闭合)。最终的形状和它的"尖端"，在这里保存了一种弯曲的、几乎呈圆形的形状(即使Vin完全能够画正方形和建构锐角，如他的"印度帐篷")。

水 平 1

水平1A本身表现为这种新可能性的扩展——带一个尖端的闭合形状。这里以相反的次序运用程序以达到一个新目标。不像年幼的被试,他们首先试图创造出一个闭合形状(肯定是圆形的或四边形的),接着吃力地试图通过加一个顶来完成它(对于斜线感到困难等),这些被试从建构顶开始,很自然地称它为"房顶"(一个早已熟悉了的呈现格式,之后才着手建构闭合的形状)。在水平1A,被试认为这个"房顶"不能变;当他们试图将它闭合时,想不出改变它最初的位置的办法。与在年幼被试中观察到的相反次序的程序相比,这个顶的启动作用构成了这一水平中最重要的创新。

Yve(5;8)用两根软管摆了一个直角:半个正方形,接着又加了一个角,也是直角。"你能摆一个三角形吗?"他用一个极钝的角建构了一个房顶,又加了第三个元素当作底,但它短得不能将图形闭合。"那是个三角形吗?"*是的,因为它在地面上(=底),还有两条边交叉*。但他没能成功地将图形闭合。他从未想过改变房顶的一条或另一条边的方向这个办法。它们始终是不变的。在第2部分的第二项任务中,他摆出一个锐角:*那是半个三角形,但它没有底*。"你可以切割它们。"他切断了木棒,但没有使它们变形,所以一切仍保持原样。最后,他通过添加一根尚未使用过的木棒,作为第四个元素,使图形闭合。"那是个三角形吗?"*是的,一条底线和两条交叉的边*。"那么那条呢(第四条)?"*那是为了闭合三角形*。

Cri(5;8)未经琢磨地创造了一些形状,提出了一些四边形和一*幢房子*,用一个闭合的三角形作它的顶。*你也可以做一个字母*。她摆出一个A,用一个闭合的三角形作为上面的部分。但当我们要求她摆一个三角形时,她摆出一个房顶,它的底太短了,不能闭合,甚至用了两个元素,她也没有想出将房顶的一条边再倾斜一点的办法。"你能再摆一个吗?"*我不知道怎么才能摆出另一个三角形*。她始终摆着同一类型的结构,不能将空地方填满,即她摆的三角形中的缝隙。"再摆一个?"*不行*,她明确地断言,*我不会*。在第2部分的第二项任务中,她成功地闭合了三角形,但留下了一些材料没有用。所有东西都用上了,她摆了一条太长的底线,伸出了三角形的两条边。她用钢丝(第3部分)建构了一个小顶,并伸出两根手指来当一条底线。接着她把剩下的钢丝弄直。她从五根木棒中选出三根,用a,d和e(第4部分),成功地闭合了一个三角形。为了"再摆一些其他的三角形",她使它倾斜,这样使顶朝下,再朝左,朝右:*那就是一个倒立的,一个朝上的,一个朝这个方向,一个朝那边*(另一方向)。但用a,b和c摆时,她退回到张开的形状,或那些边太长的形状。当问及"不可能的三角形(a,b,e)时",她一点也不吃惊,因为她已经创造出有洞的和太长的三角形。

Jea(6;4)首先设计出八个接近等边的形状,其中六个所有三条边都闭合了;另外两个有两条边没有连接,接着他用第四条边将它闭合。很清楚他主要集中于一个尖顶。而不是底和边,来完成这个三角形。这样,他首先将尖顶向上指,接着向下,向旁边等。不像Cri,他没有回到最初摆出的三角形。另外,他的例子的有趣之处是,当他用木棒试着闭合仍张开的形状时,当改变房顶的一条边的方向时,他成功了。他不是通过改变倾斜(像水平1B的被试做的那样,Jea预见到了)来做到这点,而是逐渐地将它从∧转变到⋀。这样,房顶就不再是不可改变的了。

水平1B仍受"首先做房顶"这一程序控制,但稍后,成功地建立与底的关系,并将形状闭合。这一水平的重要创新是修正房顶的倾向,实际上是改变角度(但仍仅使它更尖,从没有改得更钝)。

Eri(5;11) 第一个未经琢磨的结构是矩形。"其他的形状?"一个*三角形*。他在选择c还是d做底之间犹豫了一会,他立即用三根a建构出一个闭合的等边形。他用b,a和d建构出一个房顶ab,接着注意到用d做底太短了。他使用其他软管时遇到了同样的问题。他在房顶结构当中抬高底来解决了这个问题,这样做就产生了A——即一个闭合的三角形,但伸出来的部分没有用。当进入第2部分时,他首先建构了一个房顶,接着自发地想到了一个办法,即改变角度:*以前它像那样*(大约60°),*现在它真正地变紧了*。当将软管切断以获得三条边时,他开始没有成功地将它闭合,因此他就减小角度以促进形状的闭合。用第4部分中的三根木棒时,他像在水平1A中一样,首先摆出一个不完整的矩形,但立即将两条长边拉到一起来摆一个等腰三角形。接着他将它颠倒,这样它要么落下要么上升。为了论证一个不可能的三角形,他选择了a,d和e,说*d是中等大小的,a是非常大的,e则非常小*,即他选择最小的等边形。

Eus(6;2)在第2部分中用两根木棒,自然地切断了端点;为了使"房顶"和底闭合,他略微减小了房顶的角度。对于第二个例子,他重复了相同程序,逐渐成功地建构了一个等腰三角形,其顶部的角非常尖。在第3部分,他只摆出一个等边形,其中一条边伸长出去。

Ced(6;6)在第1部分,首先摆出了一个四边形的一部分,说:*我想摆一个正方形,但没有很多,所以我将摆一个三角形*。接着他摆出一个等边形。"你能再摆一个吗?"即使问题不在于形状而在于底,他还是立即摆了个非常尖的角,使房顶变得更尖,并自言自语道:*那里太长了*。在第2部分,他也将角沿着将来的房顶四周移动(但只沿着使角更尖的方向),更少注意底(还是伸了出去)。在第3部分,他用钢丝在上方做了非常小的顶,接着调整剩下的元素,直到他获得一个更细长的等腰三角形:*我试着做个更尖的*。在第4部分,在他摆出一些相当不成功的形状之后,开始注意底,试着消除伸出的部分。当用e和d作房顶,用c作底时,他发现c太长了。他建构角,接着用b代替,但它仍然比c长。最后他获得了一个好三角形,但顶上的角

非常钝。这些对底的操作预示了水平2。不过,当主试提出一个类似的三角形但是颠倒的时(顶朝下),Ced做出了如下有趣的解释:*那不是一个三角形:你可能说它是一种……叫它什么?*“一个钻石?”*是的,一个钻石*(并且,确实,它是半个钻石!)。

Sio(7;2)也在做了一些尝试之后,成功地建构了一个闭合的三角形,顶角非常钝,但他怀疑它是不是一个真正的三角形。“它是什么?”*一个三角形是有三条边和三个尖的形状:你可以随意地转动它,它形成一个三角形。但这一个,你不能将它朝任何方向转,它太扁了……如果我将它转动,那么它就不再是个三角形了,它就是其他的东西。*尽管不再接受转移,Sio仍首先通过形状内的部分重叠(二),将底调整到房顶。

Gro(6;3)和Rog(6;5) 像这一水平的其他被试,朝着闭合发生了重要的进步,主要因为他们新获得了缩小房顶的角的能力。不过,他们还不能成功地消除伸出端点和其他东西之间的部分,因为他们不会扩大角。

水平1A的特点是一个新目标,即建构一个既闭合又有顶的形状,作为呈现格式,较低水平的被试在经历了我们描述过的困难之后,最终接受了它。这个目标被Yve描述成一条线“在地面上和……两条交叉”。一种新程序也是这一水平的特点:首先建构房顶,接着试着通过当作底的“地上的”线将它闭合。新问题产生的原因是房顶一旦建立了,就变得不能改变,这是由于两个原因。一个几乎是感情上的:因为结构代表以前的障碍是什么,且难以克服,它具有一个要保持的价值。第二个更重要:因为直到这一水平,环形和四边形只代表原型的闭合形状,被试认为保存它们内部对称和相等的关系很重要(半径或边)。这样,好的闭合形状的新候选形状,必须重视这些特点。这解释了把三角形看作等边三角形的系统性倾向,长度大概相等的一个对称的房顶和一个横的底当作两条边,他们就从建构这些开始。房顶的不可变性一旦建成——水平1A的被试从不考虑改变斜边的可能性这一事实——是虚假可能性的另一个例子,与我们事先给出虚假必然的正方形和圆形例子的扩展相连续。结果是建构底时出现特别严重的问题,尽管它的作用是次要的,Jea有些谦逊地将边的作用描述为“完成三角形”:它或者由太短的元素构成,导致形成使Cri感到遗憾的“空地方”,否则它就太长,超出了房顶的一条或另一条边。Cri非常敏感地将超出的部分描述为“洞”。没有必要重复被试起伏的反应,这些我们已在上文中详细描述过。在这一水平观察到的一个惊人的成就是将房顶(称作“尖顶”)定位于不同方向的能力——朝上、朝下或旁边,见Cri和Jea。来自被试Ced和Sio的解释(在水平1B的结尾):被看作接近等边的三角形(在水平1B可能变成一个等腰三角形)的一个“真正的”三角形,其定义是——像圆形和正方形——你能“随意朝任何方向”转动的形状(不像在水平1B中发现的钝角房顶)。按这种思路,三角形成为可接受的好形状集合中的一个合法成员。

在水平1A,被试找到用于解决闭合问题的一组新程序,到那时为止,已经尝试解决这一问题但未成功。(在水平1A,像被试Jea竟然加第四条边来“闭合三角形”,因为他们

不能改变倾斜度:对明显的矛盾仍相当无意识。)为了使房顶与底相适应,水平1B的被试,从Eri开始,最终成功地缩小了房顶的角,缩短了两条边之间的距离(但从未试着增长距离,无疑是由于那实际上将弱化"尖顶"的实质特征:见Jea,在水平1A已频繁使用这一术语;水平1B的Eri也说使它"真正的紧";或Ced努力"做一个真正的尖顶")。这一程序性的进步不仅有利于闭合形状,而且通过把它加到等边等腰三角形中,导致将呈现格式概括化,这样提供了新目标;总之,扩大了可能性的领域。

但这些明确的进步仍被三种限制所延缓。第一种与虚假必然性有关,第三种与程序问题有关,第二种同时与这两者都有关。首先,由于虚假必然的对称要求,水平1B的被试不能将不等边三角形识别为三角形。第二,即使当一个三角形是对称的,如果它的房顶太钝,它就不能被看成一个"真正的"三角形,因为这"太扁"(Sio),所以没有一个适当的"尖顶",当它转动后,它就变成"其他的东西"(Sio)——即一个半钻石形(Ced)。为重视标志着水平2的特点的程序颠倒,所要强调的第三个重要限制是:水平1B的被试,即使他们解决了闭合问题,但并不能成功(因为他们不能扩大房顶的角)消除超出部分(Eus等);当Ced开始尝试消除它们时,摆出很钝的角,接近水平2。只有Sio消除了所有超出部分,用同一个三角形中的部分重叠代替了这些超出部分。在用不同元素建构底的场合下,就一个部分来说,另一部分实际上成为内部超出部分。

水 平 2

7—8岁或更大些的被试由于一种特殊的程序颠倒,成功地将超出部分全部消除,或对这些超出部分进行改正:他们在建构房顶之前先建构底,而不是先建构房顶。这里我们所论述的是第二种颠倒。第一种标志着从初步行为水平转变到水平1A行为水平的特点:建构既闭合又尖的形状,水平1A的被试在试图闭合三角形前,从建构房顶开始,然而处于初步阶段的被试,在给它们加一个尖顶之前,从试着建构闭合形状开始。类似地,为了获得在闭合的同时也无超出部分的形状,水平2的被试在加上房顶之前,先从底开始,然而水平1B的被试通过缩短房顶两边的距离,达到形状的闭合,但不能成功地消除所有超出部分。当然,结果并不是水平2的被试,能立即成功地预测所有超出部分:他们试图做的是在改正它们之后避开它们,这样以同时预见三条边的精确的接合点(没有超出部分或缝隙)。现在,开始建构房顶时,三个接合点中只能确定一个(顶上的那个),这样,必须找到其他两个(由于在水平1B,被试只能成功地缩小角,而从不能扩大角,所以这更困难)。另一方面,被试通过从建构底开始,能同时建构两个接合点——每个末端一个——这样,只需以任何可行办法,通过连接两条边余下的端点,找到另一个接合点。这打开了我们将在下面分析的一系列新可能性,从中间的例子开始——那些没有立即发现底→房顶的办法。在许多例子中,这种新程序没有被扩展到向被试呈

现的所有问题中。

Nat(7;0)呈现一种奇怪的从水平1B到2的转变:她首先建构了一个等边三角形,从房顶开始,接着她用a,b和两根c摆成三角形内部的一个部分组合的底(像上文中的Sio)。接着她建构了一个狭窄的等腰三角形,它的底非常长,而她立刻扩大了顶部的角,这与水平1B的反应不同。之后,她在底部进行建构。但另外两条边太长,所以她在顶部摆出一些从交叉的两边超出的部分,又在底的两端摆出超出部分。她做了改正之后才获得了正确的接合点。接着她摆出另一个三角形(这次是相当扁的一个),首先使用的是到目前为止最长的元素;接着她建构了一个房顶,但没能将它与底的末端连接起来,不过她纠正了这一错误。她回到先摆房顶的程序,通过扩大角,纠正了超出部分。但她真正的水平1B之上的行为,显示在她关于不可能的三角形(在第4部分)的自发回答中:她提出a(17.5 cm)、d(6.5 cm)、e(4 cm):*像那样有一根不见了*。她通过将e和d连接到a的两头,并指出缝隙,证明了这一点。

Col(7;9)首先从房顶→底开始建构,纠正了那些超出部分和缝隙。在其中一次纠正中,她将房顶的一条边当作底,导致形成了一个非常钝的角。她先建构房顶,建成一个等腰三角形后,我们要求她再建构一个不同的三角形。*你可以在下边放一根长的*(指着底)*和两根短的*。她这样做了,先建底。为了摆一个不可能的三角形,她没有半点犹豫,挑出a,d和e,并证明它们不能闭合。"它们应该是什么样?"*两根相等大小的和一个小的,你再像这样挤它们*(锐角)*或两根小的,底部放一根长的,你再将它们铺开*。

Fab(7;2)在第二部分(两根软管)从房顶开始,留下一些软管未用,接着用一整根软管做底,并将另外一根剪成不相等的两节来建构边:*我在这里放一根长的*(底),*再将一根分成两根来摆个房顶*。她将一根软管切成三节,建构了一个不等边三角形,顶部的角非常钝。在第4部分,她反复尝试以使两条边适合一个底。

Arc(7;8)用五根木棒反复试验,但都没成功。用三根木棒时,他将最长的那根摆成底,另两根摆作每端的边,他再将这些连接成一个不等边三角形:*我先摆那个*(底),再摆其他的。"再摆一个?"他用新木棒代替上述房顶的边,将它们与同一个底连接。接着他将此底→房顶的程序推广,用一根非常短的木棒做底(e)并安装了一个高高的尖顶(a和b);接着他用更短的木棒放在各边(c和d放在e底上),重复了此程序。对于一个不可能的三角形,他不假思索地指定a,e和d:*你不能用那些做任何东西*。在底的两端证实了这点。接着我们要求他画画,他画出八种不同的三角形,但都用一个横的底作为第一个元素。第一个和第六个是等腰三角形,其他的是角的大小不一的不等边三角形:"什么是三角形?"*底部是一根棒*(底),*而且是像这样的一个东西*(*指着房顶*)。

Ana(8;3)从画画开始,有趣的是即使总是先画房顶,顶上的角也大小不一。稍

后，不同的三角形以不同方式定位。在第4部分，她立即铺设底，或者只用a或者用$c+e$，使房顶的两条边与它适合。

Myr(8;3)在第2部分，反复试着用一根软管或两根她剪断的软管。很快她自然地接受了底→房顶的办法。对于一个不可能的三角形，她立即将e和c横向铺设在b上，表明你不能关上它。

我们看到，先建构底这一新程序引起新可能性，在这个意义上，新可能性表现为新目标，和扩展已存在的呈现格式，同时不受虚假必然性（包括对称和横向的底）影响。被试发现当先建构底的两端时，可以建立任何长度的边，只要它们的总长度超过底的长度（这种能力在被试处理不可能的三角形任务中，得到很好的体现），所有的形状都是可接受的——不等边三角形和对称三角形，房顶的角非常钝或非常尖。（相反，像水平1B中Ced和Sio这样的被试，系统地拒绝扩大顶部的角，只同意将它缩小。）另外，Arc和其他被试发现在保持底的大小的同时，改变角的大小和边的长度的新可能性。

这种先建构底的新程序是如何构思出来的？观察数据似乎肯定了我们在上文中所预测的：这些被试没有通过连续的纠正，或将比集中于超出部分的注意力更多的注意力，集中于形状的闭合而继续前进，而是迟早——有时立即——开始同时关注三个接合点，即他们决定从底开始。这个想法可能以不同方式出现。有些被试，像Nat，在试图纠正超出部分时，以与早期缩小角相一致的方式扩大顶部的角，缩小角是水平1B中唯一可能的程序。在这种情况下，当底变正确时，被试想出从一个类似的底开始的办法。在Col的例子中，类似地，对房顶做的改正暗示将一条边做底的可能性，再次导致顶部的角的扩大。在Fab和Myr的例子中，一整根软管和切断的软管之间的差别，促使被试先建构底；在Arc的例子中，选择的是那根最长的（很快推广到了反面：即缩小与不等边三角形相反的等腰三角形）。对于Ana，她画出的可能的形状的多样性，从非常窄的等腰三角形到极扁的不等边三角形（没有考虑这一事实，即在绘画任务中，连接相对容易），在第4部分使她想出先摆一个长底的办法。让我们回忆一下，在水平1B中，非常扁的三角形不被看作"真正的"三角形。相反，在水平2，扩大较高的角，以及底的延长，是常常导致被试从后者开始的行动。

以下结论可以从关于水平1A到水平2的转变，以及与此转变相联系的新可能性中得出。在水平1A中，房顶一旦被建构，就保持不变，因为它代表了三角形的精华，即要有一个尖顶。在水平1B中，缩小角而不是扩大角变得可能，因为一个狭窄的房顶，仍是水平1A中所需要的那个不可变的房顶的一部分，然而，一个更宽的房顶变成了某种不同的东西。在水平2中，这种限制立刻消失了，因为朝一个方向的变化，逐渐引起朝另一个相反方向（对称）的变化，由于对精确的接合点的不断增多的关注，带来了改变房顶形状的自由。至于底，在水平1A中，它起着完全次要的、补充的作用，当它非常短的时候，被试仍接受它作为底，或用第四个元素将它补充完整，以"闭合三角形"（Yve）。在水平1B，它的闭合功能变得更明确，被试也给予它更多的关注。如必要的话，这与缩小房

顶的可能性有关。但一些超出部分仍继续存在。不过,在水平2,这些都被仔细地消除了,缝隙也是。这反过来引起先建立底的程序,它保证了三个接合点的完成;不需要预先想象这些,因为底的两端已给出了其中两个,第三个(房顶的尖)能通过简单地连接两条边轻易获得(除Nat之外,她从两条交叉的边开始)。至于可能性,它们在水平1A以类比的连续性产生,而在水平1B倒摄的改正变得频繁。水平2的主要特点则是预见行为的发展,它允许被试在做出一些尝试之后,辨别选择某某元素的优势和劣势,并努力同时考虑三个接合点。以这种方式,要达到的目标逐渐以更精确、清楚的呈现格式表现出来。

关于程序引起的呈现格式,我们注意到可能性领域的一种相当简单的扩展。与环形或四边形的类比,导致出一种虚假必然性形式,它最初规定等边三角形优先。水平1B中存在狭窄等腰三角形的实质性增加,水平1A中有时也会发生,被试可使用的缩小顶部的角这一新可能性促使它发生;不过,扁的等腰三角形,特别是不等边三角形,在那一水平被严格地排除了(甚至在7岁2个月,Sio仍说不等边三角形"不是三角形",因为形成房顶的两条边必须一样长)。最终,在水平2,所有建立在底上的形状,包括不等边三角形,都是有效的,甚至底不必非得是横向的。

水 平 3

在水平2,三角形的建构似乎达到了最终发展水平。但是,仍存在一些有关一般性的限制——可想象的可能性的数量,边的方向和长度的不确定性质,边可以充当底,但所有的边必须彼此相等。首先,我们看一些观察数据。

Mar(10;9)在第1部分,建构了一个等边三角形,接着一个倾斜的不等边三角形,它的底是横的、狭窄的,她将它修改一个成直角,将底倾斜。她继续摆了一个等边三角形,保存了直角。接着,她画了许多不同种类的形状,无论什么元素都用作底。对于不可能的三角形,她正确地选择了e,a和d,将$d+e$横着靠在a上,说*它们应该是长度相等的木棒*(a)。"用那些呢(b,c和e)?"她像以前那样量了量它们,得出$c+e<b$的结论。*是的,那是对的*。

Oli(11;4)在第2部分,切断软管之前就采取措施*看看我是否能在最后得到一个顶*。对于不可能的三角形,他也通过将d和e靠着a排成一行,以给出证明。

Lyd(12;2)在画出八种非常不同的形状后,说:*你要让我把三角形全部画完!*当要她比较两个仅高度不同的形状时,她补充说:*那么,为了继续达到无限,你将使三角形越来越小*(=更扁)*;类似地,增加高度也可使你不断继续*……"多少次?"*不知道,因为它们可能都非常不同。例如,我可以摆一个,然后再摆一个相同的,只不过增加十分之一毫米:它总是不同*。之后,她根据三角形的三条边或两条边是否相

等，或哪个边都不相等，也根据三角形是否构成半个正方形或矩形，对它们进行分类。“到现在为止，你只谈到了边。”*没有角就摆不出它们*。“用三条边，你必定会获得一个三角形吗？”*在我看来，你可以摆一些其他的形状*（=边靠边，她将它们画出——）。*那构成了一个扁的*。“你将它称作什么。”*一个零角*。

像往常一样，我们在这里找到了可能性发展的顶点，当它们在内涵中表现为“任何方式”的形式（如Mar想象任何可能形状，并使底线的概念相对化），在外延中表现为无限性的形式（如Lyd的说明中所显示的）。必须注意两种特殊的获得：第一是可能的三角形（等边三角形等）“系列”数量的有限，其中每一个包含在大小和形状上变化的无限性（诸如不等边三角形，被描述为“越来越小”的变扁的程度无限多）。第二种获得惊人地自然，是对角的大小的无穷变化的绝对限制：“扁的”或“零角”。

这项研究为涉及交替的程序格式和呈现格式的可能性发展，提供了一个好的阐释。首先（初级的例子），问题仅是为了找到实现它的手段而构想目标，只要闭合形状仅是环形的或四边形的，一个带尖顶形状的呈现格式就不容易理解。一旦将目标概念化，水平1A的程序（先建顶，但不变）留下了许多关于闭合的问题，及未解决的超出部分问题：所以，这一水平的程序进步，在于缩小角的能力，限制从等边三角形直到等腰三角形的呈现格式之最初虚假必然性的能力。仍存在对称的虚假必然性，过分扁的等腰三角形的虚假不可能性。从这里，水平的双重程序创新（扩大角及先建底）导致包含不等边三角形的惊人的呈现性扩展——水平3的概括化的方式。

但需要做出另外两种解释。第一种与水平2的特殊复杂性有关：事实上，先建构底的方法，预示着对没有超出部分的接合点一定量的呈现性预见——即激发扩大角和底的作用的程序创造的目标。反过来，这些新方法（由于不对称经常发生：手段→目标，新手段→拓宽目标）导致不等边三角形（新程序发明以前没有想象到）的呈现性创新。第二种解释涉及相当惊人的结果的汇集，该结果是通过画画和材料的建构而获得的，而你可能以为，概念的理解在画画所提出的目标中起的作用更重要。事实上，你在画画和其他任务中，可以发现最初的不闭合和超出部分，以及先建房顶—先建底的顺序，即使底的位置的相对化在画画任务中更快。

最后，在像这样（问题解决）一个半结构化的研究中，新可能性不是简单地由自由组合所导致，而与为改正某种不完善而设计的程序相联系；换句话说，在连续平衡的过程中，它们补偿了某种紊乱：为纠正水平1B的不闭合，以及水平2的超出部分。另外，在其他情况下，被试必须将他自己从某种限制中解放出来，如在初级例子与水平1A的例子之间的转变中，被试试图调和尖顶与闭合；或者，在一种相当不同的意义中，从水平2的有限性到水平3的无限特点的转变。是否这些由虚假必然性或内部变化的不足，所导致的限制构成了某种虚假的紊乱（新可能性因此补偿这种紊乱）这一问题，已在第九章的结尾讨论过了。

第十三章　用圆规建构

和C. Voelin和E. Rappe-du-Cher合作

用木棒建构三角形启发我们用圆规建构曲线形。当然,这项任务的不利之处是,年幼儿童完全不熟悉圆规,只有一定年龄的儿童才在学校使用它。但我们仍能分析可能性的出现,因为(如我们将看到)它们不受它在教学中或儿童的学校作业中作用的约束。事实上,这里吸引我们的不仅是被试如何理解圆规,还有由这些活动所导致的他们分解和重组圆与曲线形状的方式。正像在三角形任务中,新可能性的连续出现,导致形成等边三角形到等腰三角形,最后到不等边三角形。和使用的程序一致,尽管圆形的外观如此,也引起了相当不同的可能性,这取决于它们是否以纯粹图像性的样式或有关于中心与半径而被概念化:于是将它分解成不同的弧,就可能导致重组成月亮的四分之一、镜片等等。我们想了解使这些结构和它们的发展成为可能的因素。

我们给被试不同种类的圆规(一个铅笔圆规=被包在金属架中的一支铅笔;一个铅圆规=一个金属圆规)、一支铅笔和纸。我们问被试能用"那个"做什么,接着问他们能做什么"其他东西"。当一个儿童找不到更多可能性时,我们向他呈现四块书写板,上面有复杂的圆规设计(交叉线、鸟巢、曲线的十字形等);只将这些向他们呈现一小会儿,不允许抄写。目的仅是使儿童意识到仍有其他可能的组合。在访谈的最后,我们启发(如果被试没有提及)他们用圆规计算距离是可能的。

水　平　1

最初的反应非常有趣,因为它们表现为被试不能理解圆规的针尖与圆之间的关系。圆是用铅笔绕着这一圆心所画出的。

Kar(3;5)当然对圆规一无所知。他只能将它看作夹在金属架中的一支铅笔,这样它就不会摔断。当我们向他展示如何画圆时,他专心地照这一程序画。在将圆规尖和笔放到一起后,他又将它们移成平行状,将它们的末端相连。他获得了一个小矩形,将它称为一个圆形;此后,他更喜欢只用铅笔画一些更好的形状。

Isa(4;10)也不明白小钉子的作用,她什么也没画出来,特别是用铅笔画的时

候。我们向她展示如何找出圆的弧：她只用铅笔完成了它，并画了一个太阳。我们又做了一遍，于是她将弧闭合成半月形。我们画了两个相交的圆；这次她试着模仿，固定针尖并正确地旋转铅笔，画出四分之三个圆。为将它画完整，她将针尖放在离最初的圆心 1 cm 的地方。结果画了一道从第一个圆的末端开始的弧，并接着转向圆心。"那是个圆吗？"*差不多*。她显然不明白圆心与圆周之间的关系。

Guy(4;5)已知道圆规是用来画圆的。"你怎么知道的？"*我总是什么都知道*。"那是什么？"*一个钉子*。"怎么样用它？"*它是用来画圆的*。他拿起圆规，用针尖扎了个洞，接着只用铅笔画了个大大的圆，而没有注意针尖或洞。我们要他画些其他的，但当画圆的时候，他仍不费力地将针尖放在适当的位置。我们做了个示范：*我不像你那样画*。"我是怎么做的？"*你先扎了个洞，然后画了个圆，一个非常小的圆*。

Val(4;10)表现出相同的反应。在用铅笔画了个圆后："现在，你能用铅笔和针尖来画一个吗？"*我要画个正方形，然后我再用针尖*。

Nlal(5;2)将她画的圆与我们用圆规画的做了比较："有什么不同吗？"*有，那一个*(圆规)*到处都是圆的，它更圆*。"为什么？"*因为那个使它更圆*。

Gre(5;6) *我妈妈曾教过我用那个画圆*。而事实上，他正确地用圆规画圆。当要求描述他的行为时，他只谈到仍在适当位置的针尖：*我不需要那个。我用铅笔*(圆规上的)*画*。"哪个更好用，那个(圆规)还是那个(自由的铅笔)？"*那个*(圆规)，*因为你可以像这样画*(他正确重复了操作)。*那个*(针尖)，*它不用于任何东西，所以我们像这样*(用铅笔)*画圆*。"当你画正方形时(他用圆规上的铅笔画的)，针尖是做什么用的？"*嗯，没什么，它待在原地，在中间*(彻底的错觉)。"当你画圆时，它是做什么用的？"*没什么用*。"是你把它放那儿的吗(在中间)？"*不是，自动地*。"不是你有意这样放的？"*哦，不是*。"把它放在中间更好吗？还是放别的什么地方更好？"*我宁愿把它放在那儿*(在圆周上)，*因为如果它在那儿*(圆心)，*你就没办法画*。

这些反应表明，在这种特殊情况下，可能性的形成不是由感知运动行为(即他们操作圆规的能力)造成的，而是在行为过程中，由他们所能够建立的关系造成的。不同被试对圆规的使用及他们的这些行为差异很大(甚至比我们举的详细例子更大)。最年幼的被试不把圆规看作一个统一的物体，为了好玩只用针尖扎洞或条纹(像 Kar 扎矩形)，而更优秀的被试将洞看作一个必要成分，因为有一个洞圆规才能画出一整个圆。这个观点很明显，例如，Val 准备画个圆，在他的反应中，补充说，"稍后，我将画个圆"。有些被试从不了解圆规，但 Guy 知道它们是用来"画圆"，Gre 甚至知道如何正确地使用它们。但尽管行为存在这种很大的可变性，对于所有被试来说，在能明白他们的行为结果之前或之后，他们建立的目标与手段之间的关系都是相同的，并可做如下描述。

(1) 一个圆形仅是一个曲线的形状。它的主要特点实质上是图像性的，并与圆周或周长有关，它必须"到处都是圆的"(Nal)，这样圆规的优点是能比其他铅笔画得"更圆"。(2) 图像性的圆形中既没有圆心，也没有从圆心到圆周的相等半径(见第十一章中

所描述的第一个等距概念)。(3) 即使针尖和洞被看作位于“中间”(Gre),那“没什么用”,而那个“小钉子”(Isa)“自动地”到那儿,如Gre所说;他补充说,那是错的,它在圆周上更好,因为那就不会妨碍画圆。至于Isa,她根本不将她开始画的圆与针尖联系起来;为了将它画完整,她将针尖放在其他地方,而这样她只获得了一个“差不多”的圆,对此她很吃惊。Guy扎个洞,接着用圆规上的铅笔画了个圆,而没有以任何方式提及针尖。当我们向他展示他将仿效的程序时,他将它解释为:“你先扎个洞,再……一个小圆。”和Gre都认为画正方形也需要扎一个洞。

不管他们是否知道圆规,是否成功地正确运用它们,这一水平的被试都没能提炼出似乎暗含在他们的操作中的关系,而这种操作有助于概念化。如此很清楚,在客体中或甚至被试的部分成功中,这种可能性都不是预先决定的。如我们在三角形中看到的(第十二章),它们的形成需要像分解和重组那样赋予可观察到的现象以新意义这一过程的发展,到那时为止,它们还未增强到能朝内在变化及演绎协同可能性方向发展的程度。

水 平 2

这种关系可能性首先出现在7—8岁。

Lau(7;2)知道,圆规用来“画圆”,而且她愿意试着用它,有些犹豫:*我不会做,不是很好用*。但事实上,她成功地画了一个12 cm的圆,只留下2 cm的缺口。她解释:*你把针尖放在中间,然后你转动它*。照这样做,她又画了一个大约5 cm的圆,我们要求她再画一个那样的。她没有想起量半径:*不对,它更大……也许如果我把它放在顶上*(她将针尖又插在她先前画的那个圆的圆心,并重描了圆周)。“你把能写字的那一个尖放在哪里?”*放在圆的边界上*。“那么那个金属针尖呢?”*放中间*。“你能画其他除了圆形以外的图形吗?”*三角形*。她用圆规描出圆弧,接着用铅笔画了另外两条边。“它是完美的吗?”*不是很好。它不是用来画那个的*。“有没有画正方形的圆规?”*没有!!*(有力地)“或用来画椭圆的?”*不知道*。“你能用一些圆来造型吗?”*可以*。她描出一个完整的圆,三个部分的圆(靠近圆周的四分之三)。*一朵花!* 接着她又画出两个相互交叉的圆和两道交叉的弧。

Tan(7;0):*你必须推动那个(针尖)然后再转动它*。成功了一次后,她自然地补充说:*你可以用它画大的和小的*。随后她改变针尖的间隔。但她没有想出其他样式,即使她同意可能有其他样式。*也许有人能*。但当我们要求她用两个不同的圆规,画出两个相等的圆时,她通过调节圆规取得成功:*我找到正确方法了*。进而,在匆匆看了一眼我们展示给她的图样后,她提出一个非常有创见的方案:三道圆弧,调节圆规并通过自由地画出缺口而完成,在其中两个之间:*一片三叶草叶子*。

Nat(8;0)认为她已明白圆规的作用,说*你可以用它描圆*,但她不知道如何使

用。她试着描出一道圆弧，接着为描出完整的圆，她将针尖放在纸上来将它画完。在这样做时，她发现*针尖帮助我们转。如果没有针尖，就不可能描(圆)，让它非常圆*。“为什么？”*你必须使距离保持相等。你必须使针尖在相同长度的地方——它必须停在原处，长度保持相等*(她指着圆规，并表明间隔如何保持不变)。*你准备开始画时固定它，它就像那样停在中间*。事实上，Nat在这里提炼的不仅有圆心概念，也有半径的相等，她将它详细说明为如下：*你能决定长度，你能固定它*(圆规)，*然后你将它放在中间并保持距离相等*(也就是，半径)。*不能画正方形或三角形，因为你必须像那样转动铅笔*。她看了一会儿图样，受到启发后只画同心圆。

Gen(8;3)　当我们要求他构造一个圆，与另一个画在离桌子有点远的纸板上的圆(直径15 cm)大小要相等时，类似地发现了圆心和半径之间的关系。Gen连续适应了如下三种方法：(1)他展开圆规的两条腿围住圆形模型，当然这需要依赖定位进行调节；(2)他将圆规的两条腿竖式地定位于圆周的两个位置上，但不在直径上；(3)我把针尖放在中间，将铅笔放在圆周上，这样量出半径。他检查并证实相反的那段距离仍相等，这样，他成功地复制了模型。为了画椭圆，他说，*你需要量*……“能不能用圆规量？”*可以，你可以量*。当我们要求他复制一个矩形时，他先将针尖放在中间，这个方法可以用来构造大小相等的圆形；接着他量了矩形的宽度，但很快得出结论：*对，但你必须量两次*。于是他又量了长度。简单看了一眼复杂图样后，他只画出被半圆环绕的一个圆。

Cri(8;10)　她有关测量的反应很有趣。当我们要求她复制一种正方形时，她说：*不行，只能复制圆形……我需要一把尺*。接着她用圆规量了高度，并说：*哦，对了！我想可以把圆规当作尺。这样就可以量了*……

如果比较Nat，她最初没能正确构造一个圆形，但最后发现了半径的不变性(“你必须使距离保持相等”)，与Gre在水平1，毫不犹豫地构造出圆形，但甚至没有圆心的概念，你就忍不住对水平2中新可能性出现的方式，留下深刻的印象。这些可能性对于水平1的被试是未知的，即使他们有些行为似乎暗示着它们的可用性(但不明显，仅从观察者的角度)。这里的新颖性是发现旋转的中心的概念，“中间”(Lau、Nat等)，圆规针尖之间的间隔和距离(Tan)，半径的相等(Nat和Gen)，将圆规作为测量工具使用(Gen和Cri)。一旦理解了圆的结构，就会增加其他可能性，比如部分圆(弧)、组合，甚至在我们展示图样之前，Lau就已发现的相交的圆。其他被试是在我们展示图样之后发现它的，但他们是自己创造的。

在水平2出现的新可能性的特点涉及的既不是自由组合或行动(除了在最终变化的情况下)，也不是特殊行为的最优化(由于在水平1就已画成圆形)，而是朝通过必要环节相互联系的内部变化方向，解释发生了变化。这样，我们必须讨论演绎可能性，在被试发现一个旋转中心，圆规两点间的不变距离——和彼此相等的半径长度相一致——是构造圆形的条件，且圆形不仅是圆周“到处都圆”(如水平1的Nal所说)的图像性客体

时,演绎可能性开始发展。换句话说,这些新可能性起源于这个事实,即圆周不再被认为只是一个简单的形状,而是一个结果。那么,问题是设立条件,以及改变这些条件的后果(如当Tan改变间隔,或Gen为了测量的目的,尝试将圆规摆在不同位置)。在这些演绎可能性的例子中,可以表明没有更多创造,而只有逐渐意识到的预先决定的蕴涵。不过,我们主张,在每个领域中,包括高等数学,蕴涵只在被建构之后才存在:当Cantor发现1,2,3…系列,2,4,6…系列之间的对应,暗指超穷数基数阿列夫零的存在,它不属于这些系列中的任何一个,而表达了两者的共同特点(也就是,列举的"力"),此蕴涵只在它被建构之后才存在,且作为建立使它成为可能的对应运算结果才变得"必然"。只有那时,不同可能性才通过必然环节彼此相关。

水 平 3

最终的水平通过各种间接例子与以前的水平相关,它的特点是构造所有曲线单元组合的可能性,以及获得直线的不可能性。

Pac(10;0)在画了个圆之后,构造了一个面积不断增大的四分之一圆形,接着一个镜片,通过组合曲线慢慢画出椭圆形。他凭记忆复制了奥林匹克比赛标志,最后在一个近似曲线的框架中,创造出不规则的混杂一团,但配有四个伸出部分,包括镜片、月牙形等,没有特别的形状。至于"不可能的"形状,它们仅仅是直线的,*因为如果你想画直线,那么必须在放好针尖之后转弯。*

Adi(10;11)　*你可以画任何图形,除了正方形。*

Ser(11;0)提出一系列闭合的同心圆,这还使他想出,他通过画越来越小的间隔画出蜗牛的主意。他并没有排除三角形的可能性,而是将它画成曲线形:*那像一个盾牌。*"那么三维图形呢?"他画了个四边形,也稍微带点曲线,他将它拉长以创造一个三维效果,一种有背脊的隧道。*那是一种圆的正方形。*接着他创造出多种以不规则方式相交的圆形:*在画了一定数量之后,你就要停止,但我不知道多少。*

Ser(11;6)为了画"某种不是圆形的形状",构造了一个漂亮的正弦曲线。

Vin(11;7)　*除了直线以外,几乎所有形状都可能,但可能有完全不合逻辑的曲线。*他举出一个象征蝎子的形状,带着翅膀和许多尾巴,但没有对称的侧面部分,一边比另一个更大。进而,他构造了美丽的向上的螺旋形,一个平面上的蜗牛等。

Bel(12;0)　*我认为你可以用圆规画任何东西,除了笔直的线。*

这些被试在他们的几何课程中使用过圆规,他们的这些反应表明,我们提出的问题与学校中教的用法无关。相反,它实质上在于用工具画出所有可能的形状。在这项任务中,我们也观察到,在被试创造出一些正确的形状之后,他们毫不犹豫地被无限扩展的可能性所吸引,包括随意或不规则的形状——甚至Vin称作"完全不合逻辑的曲线"。

另一方面，即使所有被试一致排除直线可能性，但有些人［其他人当中，我们只举了Ser（11;0）的例子］乐于证明可以画出甚至三角形和正方形，只要它们的边是轻微曲线的（通过将圆规的两条腿尽可能远地展开）。这些被试也提出递归的变化，比如Ser画的同心圆，以及通过不断调整圆规的宽度由它们变形的螺旋形。

这样，水平3的反应，与我们在几乎所有这一水平的研究中所发现的反应是相似的，即使这里我们讨论的是一种非常特殊的工具（与此相对，比如说，要被组合在一起的棒子），它提供了有限范围的结构——也就是，那些涉及曲线的形状（除在水平2已获得的长度测量以外）。在此特殊领域最终获得的可能性，呈现两个通常特点：内涵的“任何方式”（Adi说，“除了正方形，你可以画任何形状”，甚至Vin“完全不符合逻辑的”），和外延的无限性［Bel说，“你能画任何东西”，只有Ser（11;0）承认数量上有限，但他无法详细说明］。

最后，将这些曲线形状的建构与三角形的建构相比较，人们会发现，在这两种情况下，在关于所要达到的目标因而所获得的图形的呈现性格式方面，出现了从一种水平到下一水平的变化。这些变化密切地对应于程序的变化。在水平1，圆周不过是一个图像性的“圆”形，正像对应于“先建房顶”这一程序的三角形，不过是具有不得不被闭合的尖顶。与此对照，当被试理解圆规的中心和圆规的臂之间的差距各自的作用时，他们开始能演绎地分解和重组半径和圆周；同样，在三角形的情况下，“先建底”这一策略导致了预期性的闭合，以及对除对称的形状之外又以不等边三角形形状的图形进行概括化。最后，在水平3，出现了三角形的底部的相对性，因而出现可能的三角形的无限性，正如曲线类型的“好形状”最终成为无论什么所约束的一组不确定的任何曲线形状的成员——在三角形的情况下被关系［$A>(B+C)$］所约束，在圆规的情况下被直线的不可能性所约束。

结　论

I

我们想讨论的第一个问题(尽管这在一些章节里已提到过)是关于被认为是十分常见和普遍的可能性的演化与运算思维水平的序列之间的关系。这种关系是如此直接，以致我们能使用同样的阶段来描述二者的发展：对于前运算来说，这里的水平1对应于通过连续的类似性(successive analogies)所产生的可能性；在水平1A(在具体运算的开始)，我们发现了具体的协同可能性的形成；在水平2B(具体运算的平衡状态的水平)存在着如下的协同可能性：我们简单地冠之以抽象的，但这仅仅是在它们被概括化而不是实际上得到实现这一意义上；最后，在假设—演绎运算的水平3，出现了关于"任何……无论什么"这样的不确定的协同可能性——在数目上是无限制的。这样，我们发现了一种惊人的平行性，但问题仍然是怎样对此加以解释，尤其是，要解释两种发展的哪一种导致另一种，并凭借什么机制。

从运算的观点看，水平1是以缺乏可逆性、递归性等，一句话，是以缺乏系统性的推论和封闭性为特征的。通过分析可能性得以产生的方式(即通过为这一水平所特有的连续的类似性)，我们能清楚地看到这些缺陷存在的理由。首先，类似性是多数相似性与细微差异的一种组合，但在每一个跟随着另一个的意义上却没有传递性：*B*就一种特殊的相似性*X*而言可以与*A*类似，而就另一相似性*Y*而言，则*C*与*D*类似——用不着*C*必然与*A*类似。显然，在这种非传递性的形式中，一种可能性从先前的可能性产生的方式之数目，要比隐含地连续性的传递样式这一情形更大。第二，完全同样的目标可以通过一些可能的手段或程序而获得，一种既定的程序除了那初始的目标之外还诱导新的目标；结果，初始的系统就被放弃。这样，我们看到，在可能性的集合与运算结构之间存在着一种内部的非对称性：前者——因刚刚说过的理由——比后者也比前运算的半结构(非图像的集合体等)要多得多。第三个方面(在第八章分析过)，当这一方面产生可能性时，由过于决定和过于组合——与运算组合相反——提供出来，这就在封闭系统以内划了界限。

这些多样性事实的结果是双重的：构成可实现的可能性的关系异质性过大，且它们组合的方式过于简单（连续性类似），从而不能形成甚至十分简单的、有适当的限定和调节结构的运算。但是我们能否把运算的缺乏或出现相对较晚归之于可能性缺乏或发展缓慢，或者反过来说，可能性的初始性质是由缺乏能产生可能性的运算所导致的吗？用这种方式说明这一问题是无法解决的，除非是以一种消极方式乞求一种相互作用，这种相互作用就是相互限制和干扰。但是也有积极的一面可以帮助我们理解可能性领域和运算领域的发展关系：甚至在水平1上，可能性的显现便为顺化活动、选择行为、各种序列性活动产物和调节等提供了证明；所有这些构成了即将出现的运算发展的初始材料。至少，在水平1上发现的可能性构成了一个一般性框架，在这种框架内，程序日益精练直至达到水平2A的具体协同可能的特征。当这些发生时，我们能清楚地看到并确定可能性的新颖形式和运算之间的关系。

但是，乍一看，水平2A的情形似乎和前一水平的情形一样不明确：推论性的协同可能性的构成和运算构成之间的同步性显得如此完善，以至于我们只能辨别两个相联系的发展过程之间的相互作用。事实上，所能做的似乎是再次求助于一种共同机制——平衡过程机制。正如我们所看到的，后者是复杂的并能采用多种形式。因此我们还要分析所涉及的因素的相对贡献。这使得我们回到原来的问题上，即产生协同可能性的一般程序与具有较多限制和调节的程序之间的关系，后一种程序的特征是运算及其结构的发展。因为运算组合是一种必然特性，而协同可能性有更广的范围，因此很难说必然性能产生经验性的材料。当用相反的途径来阐明问题时，问题变得简单了：在何种条件下，拥有这种扩展性框架的主体开始发展出具有封闭能力的可能性的特定形式——即运算性转换？

答案是毫无疑问的，运算并不来源于具有其多样性内容和本质上的类似性质的协同可能性本身，而是推论性动作的结果——它在产生协同可能的同时产生运算。这种动作不是简单序列的、线性的联结，而是一种较高级的顺序，它易于产生导致运算发展的反省抽象和完全的概括化过程。这三种过程似乎都包含在这种发展中。

不是以简单的、连续的和逐步的方式预见协同可能性，于是多重的和同时的联结开始起作用。这些联结和其内容的多样性一样，能产生一般的、调节的形式：作为相似和差异的功能的结合形式，是分类出现的起点；作为量变的功能的协调形式，构成序列的原则。这并不是说分类和序列在内容上源于协同可能性，即使是在部分分类和序列的异常情况下也不是。然而，由于涉及关系的建立，同时预见几种可能性的特定动作会成为能被概括化和调节的联结之来源，这样，就以分类和序列的形式而出现。

但是，为了获得这些，必须满足第二个条件：只包含在可能性形成中的相似和差异的系统，由运算所必需的肯定和否定系统来完成。每种差异都暗含了部分否定，这种说法是正确的，但是在可能性的发生中值得考虑的东西是创造一种新的变化，这种创新就是获得效价。相反，在分类和序列的发生中，差异必须和外显的部分否定相联系，例如，

如果B的子集A'不同于A,那么$A'=B$不是A,或者$A'=B-A$。类似地,在序列中,一个正向变化必定伴随着对立方向上的变化。我们在别处研究了这些消极因素的困难调节。[①]它们与积极因素的平衡过程是协同可能性向运算转换的一种必要条件。

第三个条件是在可能性和必然性之间建立联结("X是必然的"意味着非X是不可能的,或者甚至是内在矛盾的):换句话说,变化从只涉及外在的变化的协同可能性(在经验领域内自由选择,然而能被同时预见到),到因为演绎性联结而被认为是协同可能的内在变化(在第十章给出了水平2上的一个例子)。这样,只要协同可能性一建立,从一种可能性到另一种可能性的转换就倾向于变成推论性的,并且,如果数据适当,会导致演绎机制的发展——必然性。

这样,具体运算的形成在一个决定它的较大的发展过程中进行。但是这种结果由产生可能性机制中的反省抽象和更高级的调节来中介。这些关系在具有抽象协同可能的水平2B更明显,以后,主体开始超出现实化领域,演绎出可能性本身,形成个体称之为已实现的虚拟分类或者序列——这些不过是样例或代表物。

一种反驳可能是,如果运算起源于生成可能性的活动,那就意味着运算从形成的那一刻起就决定了可能性的进化。乍一看,这种假设已经被从水平2到水平3的转变所证实,即不确定的、无限制的可能性成为可完全演绎的,是以远远超过任何种类的经验控制的递归机制为基础的。这个内部变异对外部变异的最终胜利确实证明了运算所起的决定作用。但是在可能性本身的发展中,如果缺乏先前的特定发展,这种胜利还会出现吗?为了回答这个问题,我们必须在可能性、现实性和必然性之间伴随年龄发展的关系背景上来思考这些发展。

Ⅱ

我们在引言部分已经指出,并在大部分章节已经证明,年幼主体开始时并不是只考虑由纯粹的观察物所构成的现实,而是在后来通过建构可能性和必然性的关系来完成这些的。当然,初始状态的本体论是一种未分化情形:所感知和被操纵的现实作为一种必然性出现,因此它代表了唯一的可能性——偶然的变化除外,因为已经观察到这些偶然变化所以认为它们是可现实化的,由此,偶然变化便成为未分化的同一现实的部分特殊方面。在这里再重复在几个部分所描述的有关虚假必然性是什么就显得多余了。我们只想回顾两个要点:第一,可能性的形成不是通过简单的自由结合进行的,而是存在于需要从变动着的力量的障碍和束缚中解放出来的真正开放中。第二,这些限制是如下事实的结果,即在最初的未分化中,现实、可能性和必然性(真正的而不是虚假必然

① 参见《关于"矛盾"的研究》(芝加哥大学版,1980)。

性)阻碍了彼此的发展——也就是说,每一个阻碍了其他两个互补的模态的发展。如果真是这样的话,要达到一个协调而整合成一致的系统(这是形成运算结构的必要条件),三者就必须分化,它们各自的发展进程是不同的且彼此独立的。

为了理解这些初始的障碍和干扰,首先我们需要回顾一下,单单现实本身,由已知的和尚未知的客体和事件组成,它独立于主体而存在,即使是它只有在被主体同化并得到解释的条件下才成为已知时也是这样的。相反,可能性和必然性是主体活动的产物。对于可能性而言,它显然是动作的自由组合;但是甚至对于虚拟情形来说,我们在第六章和第七章所看到的物理的可能性仍然与主体的推论有关。对于必然性,因为"真实"事件之间的关系只能在较大或较小程度上进行概括,所以它们的必然性总是部分保留在主体建构的演绎模型中,从而从属于演绎本身所固有的必然性法则。

这些思考证明了,初始分化的缺乏本质上是由主体缺乏关于可能性和必然性的活动所导致的;他们所思考的现实依次构成了不合理地侵入到其他模态领域来补偿尚未发展起来的演绎能力。这解释了相互的阻碍和干扰,它们具有以下特征:一方面,归属于现实的各个方面的虚假必然性自然干扰了可能性的形成;另一方面,真正的必然性以转换系统为基础,并包含可能性之间的协调。因此,在缺乏可能性的条件下,这种必然性无法获得。当然,虚假必然性不提供一种属性或事件的理由(这对于演绎必然性是特殊的);它们仍然显示出来,从而主体相信这些都是存在的。然而,主体把它们看作是唯一限制的,排除所有可能的变异。如此,现实被想象成过于贫乏的——对于可能性——但是对于必然性又是包含过多的。这样,每一种模态都作为其他两个的函数而改变。

现在我们了解了为什么运算结构的发展是又一个更普遍的演化,这个演化不能只根据运算发展来解释。事实上,运算要求可能性和必然性的综合,前者以其程序自由为特征(灵活性),后者以其自我调节和系统约束组合(system-bound compositions)为特征。如果是这样,这种建构必须具有作为形成可能性、精心组织的必然性和这两种模态的渐进协调的预备条件。我们把必然性的讨论放到下一卷中,但是已经知道,所观察到的有关可能性的发展水平事实上都满足这些条件。它们与运算发展水平的汇集可以看作是从整体到特殊化形式的发展进程的一种迹象。它不能根据运算结构的首要性进行解释,在水平3,伴随着形式运算的假说-演绎能力出现的不确定的和无限的协同可能性仅仅是可能性和必然性最终达到分化和相互整合的一种迹象。这不是指运算的主要作用或首要地位;相反,这些是被建构的和精心组织的。

但另一方面,如果可能性和必然性作为主体自主活动的产物呈现出来,一旦现实在两极上被不是来源于它的能力所支配和占有(不妨这样说),现实将会发生什么?在某种意义上,后一种限制太强:自己有结构的认识主体和在此之先就有自己的问题和程序的心理主体,它们本身都是现实的一部分——包括了作为物理-化学客体的有机体和动力活动中心的有机体。那么依次,如果主体的动作和运算包括了可能性和必然性关系网络中的现实,相应地,现实本身会变得更丰富,因为在提供解释的逻辑数学转换系统

内部是可能的事件中,每一个真实事件都是作为一种现实出现的。这里存在着知识的一个悖论:因为随着演绎能力的增强,现实变得更客观,客体被分析得更充分。换句话说,在未分化的初始状态之后,当可能性、现实性和必然性开始分化时,这三项都得到了改进。这产生了一个新的整合,在这种整合中,客体在数学的帮助下开始进入主体,而主体通过生物学成为客体的一部分:这样,由这种整合所产生的运算结构揭示了它们的双重特件——既是必然的结果又是探索新发现的工具。

Ⅲ

我们在一些章节中讨论了可能性的形成与平衡问题之间的关系。新的观察不仅扩充了我们的一般化模型,这个模型到现在为止似乎是充分的,并尝试用自我调节机制去解释运算结构。而且对由我们的解释所引出的最困难的问题提供了一个简单的、直接的答案:通过什么机制,认知再平衡同时而且必然地产生补偿和新颖的创造物——即导致发展的一种平衡过程(有扩大作用的平衡过程)?

对于第一个观点——即先前模型的简单概括化——我们在部分Ⅱ的评论或许足够了:把运算看作是可能性形成的结果而不是来源来进行思考。一旦可能性、必然性和现实性达到分化和协调,可能性和运算结构就同时隶属于我们平衡形式中的第三种类型,即分化和整合之间的平衡。在未分化的初始水平,在三种模态之间存在不平衡和相互干扰,这就解释了为什么在开始只出现很少的可能性,它们随后的增加直到无限则是这种平衡过程的结果,运算的发展是可能性和必然性之间再平衡的协调的结果。让我们进一步回顾一下,在分化和整合之间的平衡包含了补偿和建构,因为过于分化会危及整体协调,且过于整合又会妨碍分化。既然这样,通常在一种含有建构和补偿的系统内部,平衡过程达到内部变异间的相互蕴涵。

但这并不是说,对可能性的思考使我们的平衡模型更有活力:根据内部动力学来解释再平衡机制,这对可能性来说是相当特殊的,以这样一种方式,每一种新的可能性同时组成了一种建构和一种开放,因为它同时产生了一种积极的变革和一种要被填补的新差距——要得到补偿的一种限制和干扰。更简单地说,一种可能性的产生提供了可实现的成功和获得能被扩展的能力两个方面。由此只要未达到新的成功,这就成为新的不平衡性的来源。原则上,可以认为从格式到结构的任何认知建构都是一样的,甚至对于动物的行为,它是不断地受到两种需要的驱动,即扩展环境和增强有机体对环境的控制。但是即使这是十分普遍的,人们仍需要区分将材料简单地归入同化格式(它只关心内容)与顺化中涉及的挑战或问题(导致似乎是可能的或者由这一过程的形式方面强制实施的程序和修正)。

事实上,从感知运动水平上来讲,可以区分出四个过程:(1)同化在直接的呈现中起

作用并通向成功;(2)顺化是同样直接的;(3)正面的(阻碍)和消极的干扰(差距和限制)——抑制(1)和(2),或者与它们的实现相对立;(4)补偿:抵消(3)的作用并带来新的顺化,这种顺化通过在水平(2)上的分化成为可能,且构成程序的开始。在相当年幼的儿童身上观察到的可能性呈现的第一个初始阶段,在后续的章节中没有进行研究。我们仍然需要注意两个基本过程,它们从一种实现了的可能性引向下一个开放性。一种过程与选择机制有关:只要主体懂得正在实现的顺化是选择的结果,他们就会认识到未被选择的解决方案是可能的,或者至少指出了构成这些解决方案的途径(参见第四章和第十一章)。另一个过程来源于这一事实,即任何顺化,一旦在一种情境中获得,就能产生转变到类似情境中去的程序。

可能性的动力学比一个可能性对于也许导致人们假定下一个可能性的简单、直接可观察的开放性要复杂得多。也存在一个基本事实,即所有主体的先前活动和经验会促使新可能性的形成,这不仅对于那些直接实现了的可能性,而且对于我们称之为*虚拟的领域*(a field of virtualities)也是可行的。已经解决过某一问题,遭受过干扰,并且成功地运用补偿的主体——简言之,分化的、适应的和由此能通过排除某种限制而增加的同化格式,当面对一个全新的情境时,不会像刚开始那样"一无所知"。相反,他们会很好地了解到,因为在过去能够进行适当的探索,那么对于每一种新情境也能发现新的探索。但是在每一种新情境中所构成的可能性对主体来说并不是立即就适用的。这样可能性就不是由在他们之前发生的东西预先决定的(似乎我们能说到从潜能到现实性的变化)。我们谈到了虚拟领域,但只是在虚拟只代表已发现的可能性的意义层面上(参考第六章,水平1A的主体,在探索材料中,问他们自己——通过某种方式活动——在自然的可实现的意义上,是否"可能的东西或许才是可能的")。因此存在或多或少的较好组织的领域,该领域把主体引向他们已经了解的某一程序的方向上,即使已发现的程序不能从先前的活动中获得。

从宽泛的意义上来说,每种可能性产生双重结果:一种新的现实化,和新的要被填补的不足——一个再平衡的无限序列。与可被丰富的持续不变的和概括化的简单格式和结构不同,程序系统中呈现了一种特殊类型的动力学,它以一种同时的不平衡和再平衡的过程为基础;这就是主体所获得的能力系统。当需要应用程序时,任何概括化过程都被环境引发的新问题所控制或暗示,其解决方法便构成对新环境的另一种适应。相反,能力的特殊性质要求能力是被锤炼的,支配着能使其发挥作用的变异的生成;新的真可能性就这样在内部形成了。我们能辨别出产生补偿的两类干扰或限制:一种来源于客体(物理的或逻辑-数学的),这种可以说是真实的;第二种是主体内部的缺陷,对于充分利用主体自身的能力来说这是内部障碍(我们可以想象,当一位作者头脑中出现暂时性空白时所体验到的不安,或者当要求儿童对面前的物体做"随便什么事情",而儿童却不知该做些什么时,他就会体验到不安)。如果主体意识到第二种类型的干扰,那么这种干扰就成了真实的。如果主体没有有意识地体验到这种干扰,它就是虚拟的。但

是，无论怎样，干扰的作用在于推动转变，那么这就是补偿，尽管它们似乎是与平衡过程无关的自发活动。简言之，和虚拟领域一样，通常，可能性构成了再平衡的持续来源，这种再平衡是建构性的和补偿性的。这正是我们想证明的。

由于和能力有关，可能性同时成为再平衡的手段和动力。只剩下两个较基本的方面：第一个是，任何可能性和程序格式会产生呈现性格式并最终产生结构。另一个是，结构的概括化是作为程序而开始的。但是，如果人们记得平衡状态和不平衡状态是以知识的呈现方面为特征，而程序方面的特殊作用是构成再平衡机制本身，那么这些互反性就没有提出任何问题。这样，在认识主体的结构性的和组织性的活动与心理主体的特殊能力和需要之间就形成了一种联系。这依赖于主体的历史：事实上，结构本身不包括“需要”，而它却能代表不足。更精确地说，人们也应该对心理主体的个体能力和认识结构中组合的可变力量与多样性进行区分。心理主体有许多共同特质这一事实，可以引导我们用由英海尔德在当前进行的工作中所提出的三分法来代替心理主体和认识主体的二分法：个体，共同的或一般的心理主体（仍然是时间性的和因果性的）和认识主体（属于非时间性的和完全蕴涵性的），除了在再平衡中的工具性作用，在这种独特层次中，可能性还能够确保从一种水平到另一种水平（或者在主体的活动领域之间）的转变。

第二部分
认知发展中必然性的作用

导　言

关于可能性与必然性这第2部分——致力于研究儿童必然性的发展——由皮亚杰本人所写。由于他急于要完成各种进行中的计划，不幸没有时间修改这个手稿，并最终定稿。受其委托，我负责他手稿的编辑工作，同时也仰赖我的同事Jean-Blaise Griz、Francois Bresson的通力合作，他们在手稿的审查与澄清工作中尽职尽责。

作为导言，似乎在我看来，我可以通过转载和改写以下皮亚杰提交给1976年在巴黎举行的“第21届国际心理学大会”的论文摘要，而最好地表达我们这位大师的思想。[①]

B. 英海尔德

在探讨必然性的问题过程中，我们的意图不是研究模态逻辑，而是要把必然性与现实性概念的发展联系起来——正如我们在可能性问题上所做的那样。

在我们看来，可能性似乎总是相对于主体的而不是在现实中预成的。如在物理学中人们说到“虚功”(virtual work)等，这些概念只是在物理学家的心中被构成的。当一种真实的转换被解释为一种可能性的实现时，这也只是意味着它从一开始并按其决定论就是真实的，即使它起初不是可观察的。对必然性来说这同样是真的。必然性是主体推论组合的产物，也不是对直接观察开放的。人们凭观察所得到的东西仅仅是变化着的普遍性程度。然而，普遍性不是必然性。在一种普遍性被同化于另一种普遍性的地方，我们得到的是虚假的必然性(pseudo necessities)。

我们的研究表明，可能性与必然性之间的关系是复杂的，甚至在初始阶段二者之间就存在着交错：这就幼儿把什么当作“真实的”而言，提出了一个未曾预料的问题。由于起初在事实的东西与规范的东西之间缺乏分化，现实性——正如被4—5岁儿童所解释

① 我感谢Paul Fraisse允许利用皮亚杰“可能性与必然性简论”，载《第21届际心理学大会汇编》(巴黎：法国大学版，1978)。

的——经常显得是观察者或更发展了的被试常看作虚假必然性或虚假不可能性的东西。偶尔可以发现这种虚假必然性的许多例子——甚至在科学史上。[①]

必然性的发展似乎与可能性的发展是平行的。其初始的形式由简单的局部必然性所组成。这种局部必然性是在感知运动时期终末可观察的初级组合造成的结果，在前运算表象中得以进一步发展。在具体运算阶段，我们已经发现某些系统性的必然性类型，诸如递归、传递性和守恒等。在形式运算阶段，必然性显然成为完全普遍的。我们假设，存在着各种程度的必然性力量——与当代逻辑学家所称的结构的力(force)相联系。但是，当说到不同形式必然性的可变化力量时人们指的是什么？我们不仅仅是指一个结构所包含的必然关系的数量。我们相信，也存在着质上的、内涵上的差别：将诸如同一性($n=n$)那样的分析判断与像“任何整数被另一整数跟随着，$n\rightarrow(n+1)$”那样的综合判断相比较，我们清楚地看到，后者包含大量的关系，包括序、n与$n+1$之间的相等间隔、单位的等值。但是整合更多的关系不仅是复杂性或丰富性的事情：因为它存在于一个整体之内的独特特征的连接，这种复杂性需要更大的整合力量。在这个意义上，必然性似乎在我们看来就是作为这种整合的一种度量。同样，可能性是分化活动丰富性的一种指标。这就解释了二者发展的平行论。

一般说来，人们可以想象能容纳现实性、可能性和必然性发展的普遍法则。这一法则会具体说明在它们关系中的三个时期。第一个是没有分化的时期：现实包括许多虚假必然性，而可能性存在于实际现实的简单的、直接的外延中。

第二个时期——与群集和具体运算的形成相吻合——是三种模态的分化时期：可能性展开成协同可能性的家族；必然性超越了局部协调——产生了能决定必然的形式的运算组合；现实性存在于具体内容中。

最后，第三个时期是在一个整体系统内三种模态的整合时期，以至于似乎在主体看来现实性尤其是作为可能的东西的一组现实化。但同时又从属于必然联系的系统。

这样，似乎现实在任一极上被可能性和必然性各自吸收——以一种通过把现实同化于认知主体的建构和解释而丰富现实这样的双重从属。然而，这不应该被解释为唯心主义的结论，其理由是这联系到了主体和客体之间的一般关系。事实上，现实包含着作为表征物理客体的有机体的主体，是主体以产生知识的连续的物质行为的中心。于是主体以一种互反的形式凭借可能性和必然性来整合现实性——即凭借主体能从事的并且当达到协调时导致必然性的那种动作。

最后一个评论对于弄清前面提出的结论的普遍性是必要的。我们假定，可能性和必然性仅仅是相对于主体的，而不是在客体中既定的。同时我们承认，我们有机体尤其是一个客体。在这里我们看不出任何矛盾，因为每一有生命的事物——不像无机的事物——同时既是主体又是客体——作为行为的来源(这也包括有生命的植物，它们也作

① 参见皮亚杰和加西亚：《心理发生与科学史》(Paris：Flammarion，1983)。

用于其环境）。这样，有必要假定生物学的可能性和生物学的必然性。靠保存和维持相对“正常”状态的生存的必然性，以及靠“不正常”的变异和导致进步的变异的可能性，这些最明显地显示出来。现在，常态和变态在物理学中已没有意义（随机波动则具有不同的性质）；但是它们——相对于可能性和必然性的存在，正如我们所看到的那样——可以被考虑为认知常态性（cognitive normativity）的机体来源。

第一章　物理必然性的问题

与R.Zubel和E.Rappe du Cher合作

物理必然性的性质提出了关于在不同的发展水平上客体和主体的贡献这一中心问题。简单地假定——正如亚里士多德所做的那样，在外部事件之间具有客观联系的特征的“真实的”必然性，是成问题的。必然性不是直接可观察的，而总是演绎组合的产物；甚至在被考虑到因果联系的情况下，经验仅仅提供了规则性连续：为了从这种概括化推进到必然性，主体的一种演绎模式的建构仍然是不可缺少的。另一方面，把这种模式与逻辑数学结构简单地等同也是不充分的——即使人们只是把他们的运算“归属于”客体本身，因为把内在于主体的模式中的必然关系，与被归属于客体本身的那些东西(它仅仅为该模式所接近)之间尽可能地紧密对应，这仍然是令人满意的。换言之，在模式与被假定存在于客体之内的必然性之间担保某种同构性，就是令人满意的。在这方面，我们将证明空间的媒介作用；此外，我们将考虑物理学中被称为原理(守恒、对称等)的东西，它表达了对于所有作为一般调节者的模式——这些模式既可归属于现实又是必然的——应该是共同的东西。作为源于概括化的观察与演绎的混合，这些原理在该模式之内就成为普遍的和必然的(在它们的否定会导致矛盾这一意义上)。甚至在现实性中，它们代表“必然过程”(necessitation)[①]的一种特殊形式。这种必然过程可以被表达为这样一种形式：其否定在物理上是不可能的。这不是意味着，这种必然性形式仅仅起源于现实性——其构成需要主体的演绎，而仅仅是，内在于模式的建构的那种必然性，与主体不得不假定为在现实中是必然的那种必然性之间，应该存在着某种程度的同构(自然仅仅是近似的，因为这些原理在其历史过程中会被修正)。

这里研究的价值——涉及这样一种情境：一滴水或许多滴水被释放进一碗盛有四分之三满的水中——在于：它事实上允许区分多重水平的必然性。这些水平能在连续的年龄水平(开始于3岁)上建构，并往往归入可以在宽泛的意义上被描述为守恒原理的范畴之模型那里所决定。它们从被认为不与其余的水相混合的单一一滴水的同一性开始，直到在包括一种计算——这种计算表明为什么水平面的上升仍然是不可见的——正确的和附加的解决情况下的附加守恒。[②]总之，这个非常简单的例子将向我们表

① 是指导致必然性的一种过程。

② 这里不处理在外观上发生变化的水量的守恒。

明，当观察到的事实与预期相矛盾时，当必须系统阐述未预料的事实与可懂度(intelligibility)的一般原理相一致的新模型时，物理模型和丰富的想象或演绎中固有每一水平的必然性之复杂性。

这一方法涉及四种类型的问题。在问题1，我们向被试呈现被置于水碗之上的一个薄吸量管。然后我们释放一滴水，但一个小罩子能阻止知觉到吸量管中水平面的下降。然而从吸量管滴进碗的过程是可见的。我们要求儿童标出碗中初始的水平面及其变化，如果这被预期到的话。在问题2，取消小罩子，要求儿童标出吸量管上的初始水平面。被试预测能感知到碗中水平面最终上升。但他们不能感知到它，我们请他们解释这一事实。在问题3，用一个与碗中的水直接相连的注射器取代吸量管，以致只有注射器的排空才表明碗中水量的增加。在问题4，碗里的水被装满到边缘，问题是解释为什么n滴不引起溢出，而$n+1$滴则溢出。

水 平 1A

在这初始水平上所使用的模型被一种二分法所支配，这种二分法部分地被证明——如果它持久的话——但也引出复杂性。这些起源于作为个别实体的水滴——当下雨时能看得到(当它们在玻璃板上滚动时人们能用眼睛追踪)——与作为一种连续量的水之间的对立。这种二分法在物理世界中是相当真实的，因为每一滴被薄膜包围着，类似于通过表面张力在碗中的水面上所形成的东西。但清楚的是这种二分法仅仅是暂时有效的。然而被试在1A水平上——即使他们知道分开的水滴包含着水"[①]——宣称，它们没有与碗中大量的水混合，而是保持它们在里面的个体性，因为它们除水之外还包含其他的东西：它们明显意向性的可动性使它们赋有像自我保存那样的有生命事物的独特性质(先前的研究表明，儿童泛灵论式的思维在与能被操纵的其他客体相反的水滴情况下仍持续着)。结果，我们继续发现了在碗中的水平面与所判断的水量之间已确立了的关系中的模棱两可——依赖于被试是包括碗中的水滴还是不包括(如果它们"不进入水中"，即不与它相混合，正如And所说的那样)。

And(3;5)在问题1中预测将有*更多的水*——水平面有实质性的上升。当她看到它没有发生变化时便得出结论：*那是因为水滴下沉*(到底部)，*因而不再对水的表面起作用*。至于水量，请注意她对如下问题做出的回答："如果我们把水倒回杯子，会有更多的水吗？"*是的*。"如果它是水滴呢？"*不*。在问题3(用注射器)中她做出如下解释："水上升了吗？"*没有，因为水滴没有进入水里。它没有上升因为*(位于底部的)*水滴不想要这样*。在问题2中，And具体说明，所释放的第一滴将比(指向底部

① 某些被试相信它们部分地由空气所组成，并且能"飞"。

的)水滴下降更远，第二滴落入水里，然后它下降到那里(在底部)，因为它看见了其他的水滴。要注意：尽管看起来，在"它们没有进入水里"(这意味着它们没有与水混合)与"是在那里"(意味着被定位于碗之内)之间不存在矛盾。甚至有更好的方式来解释水平面没有明显地发生变化：水滴一旦被释放就能变成一个"气泡"，于是它"流进"另一个碗中(被用作比较的容器)。在问题2，当另一滴被释放时，在底部的那些水滴之一向上移动，因为它企图得到另一滴；它赶上它，但之后，它们让(彼此)去，进入那个管道，即回转到吸量管！在问题4(水倒满到顶上)，水滴(通过击中被设想为一个罩子的表面)而使得它更低了，在那之后，它将再一次上升，因为当它变得更低时它应该(!)再次上升(可塑性?)，水滴一起(赶紧)回到吸量管去。

Nad(3;8)同样预测更多的水，同样用水滴聚集在底部那里、向下的那里这一事实解释水平面明显没有上升。但如果在它们休息了一会儿后再往回上升，它们将堆积在表面(覆盖起来)，它将会越来越高……当这一预测的结果没有被证实时，Nad只是建议(在碗的壁上)画另一个标记，所以它将变得更高。曾试图这样：我认为它们会上升以便看出在玻璃杯上(标记中)的差别。

Mic(4;7)认为水滴进入水里，将在那里(在最低的水面)变得更深。"水滴去哪里啦?"到底面去了。"它将在那里停留吗?"它将漂流到顶上，因而是更高的水面。但水的量仍然是同样的：喝起来是同样的量；当增加更多的水滴时，甚至喝起来更少了，因为它们沉到底面了。"我们怎么样得到更多的水喝?"不让(注射器)更多的水泡下降。"就所有我们放进去的水而言，你认为现在有更多的水吗?"不，它总是同样的。这种虚假的守恒被一种漂亮的演绎虚假必然性所证明：第一滴水没有使水上升，所以第二滴水也不会：它将去第一滴水去的地方，这就是它将要停留的地方。

Car(4;3)没有给我们提供任何附加的信息，除去她考虑水滴可以是在水中的任何地方，人们能在某个地方找到它。她进而相信，它能"飞"出碗之外。

Cri(4;8)通过考虑碗中的水作为一个活动的实体而预示了水平1B：水滴将使得水上升，因为如果那个东西(吸量管)使得它下降，那么水使得它再次上升。我们不能看见它，因为水把它藏起来了，但它在再次上升。在问题2，在没有罩子的情况下，Cri获得了互换性：在这里(在碗的水平面之上1 cm)对应于那里(在吸量管的初始面下1 cm)。正如在问题3(注射器)一样：有降下来的水，之后它就在那里……但不是立即；它真的慢慢上升。每一滴仍然保持它的个体性：它没有与水混合，因为它是圆的，它在液体内像一个独立的客体循环着。

处于水平1A的这些被试是从一种真正的必然性开始的——甚至回到感知运动阶段：如果人们给一种量附加某种东西，人们就获得一种增加。但只有当增加了的因素是同质的时候(如堆加砖块，对此甚至一个婴儿也能看见)，以及只有当这种增大了的整体与初始的整体是属于同一类型的时候；换言之，只有当初始的量与最终的量在种类上是可比较的时候，这种增加或附加才具有一种增加的意义。就接收水滴的碗中连续的水

而言，1A水平的特殊性就在于不连续的水滴的异质性。那么，这种增加是在哪里？是水本身吗？但它没有被水滴所改变。是水平面——它应该随每一增加而上升——吗？但这人们又感知不到，人们不知道：是水平面（它仍然是同样的）在没有水滴情况下的水平面，还是当这些往回上升到表面时水加上水滴。这样，这些限制性问题没有一个免除严重的模棱两可：当被试起初预测"更多的水"时，这只是意味着"碗中更多的某种东西"。在证实之后，被试没有把任何变化归属于水量本身——作为被附加的水滴的结果（And、Mic和其他人，除Cri居间的情况之外）。水平面仅仅依赖于水滴的位置，在底部或在表面，甚至到它们可能上升到标志的位置"看到差别"的程度上（Nad）！唯一的恒常性就是在碗内外具有惊人的自我保存力量（同一性）的水滴的守恒，以及可与不可改变的固体的守恒相比较的移位的守恒。

水平1B

我们将如下所有被试归类为水平1B：他们认为本身作为水的水滴与碗里的水相混合。至少在问题2（没有罩子），他们提到互换性（开始将被拿去的东西增加到结果上）来解释量的增加。这样，这些被试相信，水量有所增加。一些被试在问题1上仍然处于1A水平，只是在问题2上进步到水平1B。

Sam（3;10）尽管年龄幼小却已经处于水平1A与1B之间。当第一滴水掉下时，她说：*你把一些水放进了杯子*。"你能看见它吗？……这里（水标记），发生了变化吗？*那仍然是同样的，但那*（掉进碗的水滴）*不得下去那里*（进入水中）。但尽管有这样好的开始（具有明显的互换性），Sam首先宣称，碗里的水仍然是同样的。然而，通过比较A和B两个杯子——分别地放进一滴和两滴，她得出结论：*在那里*（B），*有更多的水*。在问题2，她立即进行演绎：在水滴释放之后，*在那里*（吸量管）*水少些，在那里*（碗）*水多些*。

Yvo（4;7）直接预测水滴将与水混合。"在哪里？"*在这里*（在表面之下一点）。"为什么以前不是这样？你能再次发现它吗？"*不，它混合在一起了*。第一滴："喝起来多些还是同样？"*同样*。"那么第二滴呢？"*将会装满*。他对否定的结果感到惊讶。然而，在问题2（即没有罩子），他直接说，当第一滴水从吸量管一掉出，杯子就有更多的水——他能看见水平面中的水滴。

Yan（5;8）预测一滴水后水平面上升；然后在审视之后得出结论：*这种情况不太多。但它仍然形成更多的水可喝*。我们继续第二滴，他再次预测水平面上升，但非常小。在尝试之后："我不能看见任何差别。"*我也不能*，（但）*如果你滴三滴将会上升到那里*。*水滴在那里*（在表面），*然后gluck gluck*（混合在一起）！（水滴的）*水下降，扑通一声落到水里，然后形成一个球*，（之后）*形成一串串的*。然而，现在他改变自

己对量的看法:"如果我们滴一滴,它会形成更多的水可喝吗?"不,它仍然上升到同样的标记。但在问题2(没有罩子)他具体说明:在那里(在吸量管),它下降了,有落下来(形成水滴)的水,在这里(在吸量管),人们能看见它,但在那里(碗),你不能看见它。这样我们看见隐含的互换性。

Tom(5;4)在问题3展示了同样的推论,但看得出明显的惊讶:水平面没有上升,但我能使水(从注射器)喷出。

Lio(6;2)尽管年龄大些却仍在问题1上处于1A水平:就一滴水来说,它是同样的高度:总是上升到标记。"做什么?"水不能因这些水滴上升,仅仅因水龙头上升。……水滴,那不是同样的。"一滴水没有形成更多的水吗?"仅仅形成一点水。"但是更多了吗?"没有,没有形成更多:它形成一点点水滴,仅此而已!然而,在问题2,他(在没有等待结果的情况下)直接预测:在碗里,它上升,在管子里,它下降。这种互换性的信念是如此强烈,以致对第一滴感到失望的Lio,对第二滴做出宣称:它开始上升。对第三滴也宣称:它上升。事实上此时感知不到任何东西。我们提醒他对问题1的否认:在其他情况下,它也上升。既然我们仍然持怀疑态度,他缓和地说:它还没有上升,它将要上升。

Lor(6;2)在问题1上预测:如果你增加某种东西,它将上升——这显示出该水平。然后他观察:它停在这儿。"为什么?"因为你实际上增加了一小滴。"那么一大滴如何?"那么就有更多的水可喝了。在问题2(没有罩子):噢,是的,人们能看见它。因为你在这里(在吸量管上)做了标记,人们能看见它(它开始的地方)。"在碗里?"它已经与水混合了。"它形成更多的水啦?"非常少的一点。"必然地?"不,但如果加非常大的一滴,那么必然会有更多的水。我们把吸量管降低至水平面。"现在,如果我压一下如何?"进入容器内。"必然地? 人们知道吗?"不。"但是如果在这里(吸量管)少了一滴,那不是在那里形成了更多的一滴吗?"是的,因为人们能看见你增加了一滴。"如果人们没有看见(吸量管中的水平面的差别)?"除了通过看之外没有别的方式知道。

这最后的说法显示出,当与在2B水平所发现的演绎必然性相对比时,在1B水平上所设想的必然性之限度。当与1A水平相比较时仍然有相当的进步。在确认水滴与水相混合,以及通过把它们当作水,被试对关于总量的问题给出了新的意义:两个附加物成为同质的——碗里的水加增加的水滴,在两个实体的量的联合中存在着守恒——现在被设想为简单的增加。于是问题就是要理解,如果(正如Lor预测的)将有更多的水,那么正常情况下水平面应该上升——情况不是这样,为什么碗中的水平面似乎没有改变。这样,在问题1,可以看见被试在两种解决之间——可能从一个时刻到另一时刻是矛盾的——摇摆:不是没有更多的水,因为水滴太小(但正如在1A水平不是这样,因为它们藏在底下),就是有更多的水但人们不能看见它。这两种解决的第一种(尽管增加一滴水但水量相同)与这些被试缺乏运算守恒悖论性地相联系。当客体的形式发生变

化时，它的量就会改变，这与当一种增加太少而不影响其形式时它保持其量是一样的。第二种解决是开始理解互换性的结果，这在问题2中成为普遍的和明显的。一旦吸量管的水平面下降（此时一滴水离开了），必定有与吸量管的减少相对应的碗中的水增加。这样，这两种模式就从属于一种或多或少概括化的守恒原则：在1A水平，这局限于作为一个单元的水滴，而在1B水平，它就扩展到两个附加物——使得形成一种增加成为可能；然而，局限仍然是，必定在形式上有一种可觉察的变化（第一种解决），在第二种解决中，随着扩展到能唤起互换性的所有那些场合，它就提高了。甚至在这些场合，在人们能得出结论必然有更多的水之前，仍然有必要看到水滴的离开和到达。这样，仅仅存在演绎必然性的一种开端（尚未普遍）。后者将在2A水平得到发现。

水 平 2A

在水平2A，只要增加一滴水，被试就断定量增加了，即使水平面没有可觉察的变化。

Cal（6;3）预测：*水滴深深下沉，然后它取代水，水上升。*“人能看见水滴吗？”*不，它被压缩了，变得和其余的水一样……它是水的一部分*（问题1，一滴水）。*人不能看见任何东西。*“为什么？”*因为水是湿的，它慢慢上升。*在问题2：*水将上升。*“必然地吗？”*是，人能看见它，因为人能看见水滴下降。*

Gab（6;2） *水将上升。增加一滴。什么也没发生（笑起来）。*“但有更多的水还是没有？”*多很少一点点，因为我们看见了它滴进了水里。*问题2：*反应相似，人们不能看见它，因为碗（比吸量管）更大些。*

San（7;5） 在问题1：*水滴漂动，然后它下沉，水上升一点。*“你肯定？”*是的。*“它可以是不同的吗？”*不，它是像那样的——它不得不去。*问题3：*有更多的水，但人不能看见它多些，不足以在碗里看见它。*

Joa（7;7） 在一滴之后：“有更多的水吗？”*只多了一点点，因为我们增加了一小滴。*“人们怎样能肯定？”*人们知道，因为增加了某些东西。*问题2：*这里（吸量管），水少些，那里（碗里），水多些。*问题3：*在碗里多一点点，但我们不能看见它，因为碗大。*

Ali（7;5）自发地预测：*将有多一点的水，（但）我们将不能看见它。*（在一滴、二滴、三滴和四滴之后）所提供的理由是，*我们不得不等到至少五滴水才可知觉到上升的水。*然后提供第二个解释：*单一的一滴水不足以被看见，但它将上升。它们不得不这样，没有别的方式。*

Mar（8;0） 在第一滴之后：*没什么了不起（没看见什么东西），但它仍然上升。*“不可避免吗？”*是的。*

Syl(8;2)　*的确上升了一点。我不能看见它,但我知道它多些了。*

Mir(8;8)　*喝的水会多些。但它是如此之少,以致你不能看见它。在问题2:你(在吸量管中)弄出一些,我(真的)能看出差别,但我不能看出杯子中的差别……但(仍然)会有更多的水。*

Sca(8;1)　*人们不能看见它,但人们知道它。*

Cat(8;4)　对问题1有相似的反应。问题2:"人们在这里(在碗里)为什么不能看见任何东西?"*因为在杯子里,它是更大的,在那里(在吸量管)它是薄的。*

Pat(9;0)　*它滴下来了,但你不能在碗里看见它,与管子相比之下它更大啦。*

在这一水平(2A)上如此设想的必然性,在问题1已经显然是演绎的,即是说,没有必要观察吸量管中的水平面的水滴。这种演绎的特征以明显的言语形式显示出来:人们不能看见,但"人们知道"(Ayl,Sea),"必然"有更多的水(Cal,Mar,等),"它是像那样的"(San),水滴"不得不(使水上升),没有别的方式"(Ali)。这些演绎存在于空间的和因果的协同必然的组合:把水滴的守恒(1A)和当与其余的水相混合时其液体性质的不变性(1B)加以整合,并且增加与已经在碗中呈现的水这种相互作用:水滴"深深下沉……(此后)它被压缩,变得像其余的水"(Cal)。这包括——由于"增加"了水——水平面的必然上升,即使它不能被看见。一些被试增加一种空间的组合,用以解释为什么这种上升是不可觉察的:碗与管子相比较而言太"大"(Joan,Cat)或"大"(Gab,Pat),而管子是"薄的",它那里水平面的变化是可见的。一般来说,这种演绎必然性源出于这样的组合:被试不仅确定关系和法则而且确定理由或原因。这些——已经在问题1——以互换性为基础:在开始(吸量管)被减少的东西,必定在目标(碗)上得到附加。这解释了水平面的上升——它是必然的,即使是不可见的(正如Mar注意的,"不大","但它仍然上升")。

我们应该注意,在水平2A内,要根据被试设想水滴与碗中的水相混合的方式来区分某种时期,这是可能的:(1)个别的水滴仍然在水中;(2)两滴水"彼此赶上";(3)一小撮水滴;(4)一大撮;(5)一种内源的混合——个别的水滴消失了。被试的绘画表明了这一时期。他们中的一个先画了从刚好在水平面上的吸量管滴出的一滴水,然后划掉它,再作另一幅吸量管的底端与水的表面相接触的画。这使得混合更"必然"。

水平2B和3

在水平2B(9—10岁)的通常年龄提供了同样类型的反应。但也出现了找寻能证明水平面上升的方式,即使它是不可见的。

Gov(8;0)　*人们能看见更多的水吗?(他毫不犹豫地断定)不,人们不得不更精确,在水中插一个上面有厘米刻度的东西,然后人们能看见,水甚至没发生一毫米*

的四分之一变化。

Cer(8;11)　人们应该称一称。

Ric(9;6)　人们不能看见，但使用从水平面上投影以增加这种差异(他用“<”表示)，人们可以在墙上看见。

Jol(10;3)　为了看见水平面的变化，需要特别的镜头。

Lex(10;0)　不能用肉眼看见，(但)可以用显微镜看见。

Did(11;0)　不得不把水从碗里倒出来，并测量它。

这些反应能容易地解释为了客观地证实水平面的上升人们应该做的东西——不能用肉眼感知但能用必然性加以演绎(当然，这些被试通过提供在2A所描述的论证而开始)。换言之，在水平2B的被试——已建构了他们判断是必然的演绎模式——只是问他们自己怎样加以检验。这就是物理学家所做的事情。

在水平3的被试采取不同的方向。他们对怎样证实水平面上升没有兴趣，而是人们怎样能解释变化仍然是不可见的这一事实。这个问题被水平2A的Joa、Gab、Cat和Cat所探讨，此时他们正确地把碗的大小与水滴从中落下的吸量管的大小相比较。这一观念再次被12—13岁儿童所采纳，具有如下发展。

Jos(12;11)　肯定，水更多了，但当水滴在水中时，不再能看见它。“为什么？”因为碗大些，吸量管小些。她然后画一滴水落到碗中的表面，覆盖在表面上约直径的三分之二。并具体说明：后者测量约35 cm，注射器约3 cm，她把这些测量会告知水滴覆盖的方式(再次在表面)当作是可能的。总之，其观点是：人们能计算出对应于水滴覆盖在表面的最低高度。她进一步具体说明：这依赖于这个碗，如果它小，人们能看见某些变化。

Myl(13;4)用同样的模型开始，但具体说明，要做一个计算，因为水滴散开很宽。它不上升，在管子中的东西在宽度方面不是同样的量。人们能根据宽度测量在这里(吸量管)的水，并用直径测量在那里(碗)的水。她用三幅画表明这一点。“你需要三幅画？”是，甚至还要多，如果真的想知道发生了什么，否则就不能看见这种作用。然后Myl增加了一个假设：当水滴进入这里(水)，它把空气带出去了。当它下滴时它沉下去了，形成了一个小洞，水滴便在那个洞上散开。在这种情况下，当你注入水滴的时候，把一些空气赶跑了……嗯，形成了更多的液体：(在)杯子中，你填满了水滴，水多面空气少。这就解释了事实上水平面的变化是不可见的。

Ben(13;3)提供了同样的双方面模型(水平面和空气)，但此外还总结说：水滴沉在上面。它散开到整个方方面面(表面)。不是必然在一个层面，但它上升，它依赖于表面。这可以计算出来。从这里可以得出：水滴在密度上仍然很小，因为它散布在大表面上。但仍然没发生变化，因为在这里有空气，水滴占据了空气的位置。

这样，这些被试附加了被设计来表明为什么这种增加是不可见的解释模式到水平2A所确立的模式(表明：在水量上必然有增加)上。第一个有趣的要点是，Myl意识到建

构一种模式。她说“人们不能看见这种作用,如果人们真的想要知道发生了什么”,人们需要一种用绘画所说明的演绎建构,或其他被试所称的计算。在这一高层次上,出现了一种新的必然性——不是仅仅出自事实的阅读,正如在水平2A(一滴水从吸量管到了碗里,所以后者必然包含更多的水)。相反,它出自能够解释为什么这种增加是不可觉察的假设性事件:(1)水滴覆盖在表面上以致它必然在高度上成为最低的;(2)水包含空气,水滴“取代了它”(Ben),所以在高度上必然几乎不发生变化。

这些假设是真还是假,比事实上被试从这些假设得出的结论是演绎上必然的,其价值更小,但是属于这样一种比水平2A既是更假设性又是更推论性的必然性。这标志着一种新水平的必然性特征。

结　论

从本章开头提出的一般问题说起,我们将首先讨论在似乎是由所有被试在他们初始的预测中所识别的最受约束的必然性中,主体和客体做出的相对贡献:不管是多么小(一滴水)的一种实体的某种量附加给同样实体的另一个量(碗的内容),导致后一实体量的增加。初看起来,这里似乎是客体中所固有的一种“真实必然性”的原型(在本章开始的讨论中我们已发现是成问题的)。但是,就这一问题而言,被当作可观察物的整体的现实恰好告诉我们什么? 无疑,如果有一种附加,那么总是有量的增加。但这或者是一种简单的同义反复——附加=增加(仅仅在被试的语言中有必然性),或者它是一种普遍的事实但又是这样的事实:只要某些项目仍然是未具体说明的,就没有必然性:加数的准确性质——加法正好所指的东西,它们量的特征精确地所组成的东西。尤其是,我们不知道在连续附加的过程中是加数还是总数发生变化。例如,Ben(水平3)建议进入物排除空气的那种水滴——它意味着,第一项(水滴)附加到第二项(碗)排除了等价的空气部分,以至于这种增加被一种等价的减少所补偿。就增加而言这不是处于矛盾中,但它表明,为了从一种普遍性的陈述(概括化)推进到一种必然性的陈述,人们必须建构这样的模型:精确地具体说明怎样解释可观察物,对于所使用的量的概念来说,应该赋予什么意义。

我们的数据表明,至少存在着四种不同类型的模式。它们都或多或少成功地整合这样的概念:一种附加产生一种量的增加;也就是说,它们都基于一种能称之为守恒附加性的共同原理。这一原理具有普遍的效用,因为它也适用于诸如2+1=3或$A+A'=B$那样的逻辑数学运算(在此,$B>A$且$B>A'$,只有A和A'介入,从联合类中没有失去什么东西)。

水平1A模式把这一原理运用于水滴本身——被试归咎于可观察性之外的想象的守恒:认为水滴在碗的里面,在空气中(以气泡形式),甚至在吸量管中——当它们等着

回到管中时——逐一保持它们的同一性。这种守恒允许附加性，因为一滴水能“赶上”另一滴（And），与它分离，或“堆积”在表面——被看作一种覆盖（Nad）。当Sam（水平1B）暂时退回到水平1A时，她说，即使水滴没有使碗中的水面上升，但是在碗里有“更多”水——附加了两滴（与仅仅附加了一滴的另一滴相比较）。但有时在水滴与碗中的水之间缺乏任何关系，在Mic那里所看到的，她断定，由于“第一滴没使水平面上升，所以第二滴也不会”。简单地说，水平1B的守恒附加性特征仅仅关心水滴——像碗中的水一样的同一类型的加数，并没有计入总数。至于水的量，人们观察到在它没有发生变化这一假设之间摇摆，因为水滴是“某种不同的东西”——但这算作一种虚假守恒——以及在水滴的影响下水量增加这一假设（通常在作预测时省略了）。后者不能被当作是真正的附加。

在水平1B所使用的模式显示出使用守恒附加性原理的进步，因为水滴现在被看作与水“混合”，以至于我们可以说到附加性，而加数是内源的，以致它们每一个在它们相加期间和之后，都服从于量的守恒。在这一居间的水平上，在问题1（有罩子），被试不足以看见水滴掉进碗里，并与水混合：他们不断定附加，因为水平面没有变化。这就解释了在被试估价最后结果中持久的摇摆。他们看见，附加了某种东西但量没有增加——水滴太小。尽管加数的并集及同质性，主体就最后结果（总数）而言仍然有问题。与此对比，在问题2，事情更清楚了，因为一旦水滴离开吸量管的水平面，被试就能看见它。现在，附加的水滴的转移致使被试看见必然有附加，因而碗中的水平面上升，即使它仍然是不可见的。这样，他们开始看出加数的互换性（吸量管中的水少，所以碗中的水多，正如Sam注意到的那样）；这种互换性导致整个系统（水和水滴）的守恒附加性，而不只是水滴。水平1A这一模式特别有趣的是，缺乏水平面可见的变化，附加性（由于水滴而更多的水）对主体来说似乎不是作为必然的，除非他们能看见吸量管中的水平面的水滴——对他们来说，应该在碗里产生等价的上升（尽管是不可见的）：$-g$（吸量管）$=+g$（碗）。

下一个模式（水平2A）把这种守恒附加性扩展到问题1，就是说，用不着通过各水平的直接比较所提供的知觉支持。这样，必然性现在大部分独立于可观察物，明显表现出原理：（被保持的X）+（被保持的Y）=$(X+Y)>X$的演绎的和内源的性质。水平2B仍然是同样的模式，只是附加了可能的实验对照的观念——如果人们具有适当的测量工具的话。然而，在水平3第四类模式出现了——计划着解释水平面的变化仍然是不可见的这一事实：在水平面与水滴覆盖在水面或空气排出的假设之间的关系，由水滴的水所补偿了。

纵观这个发展序列，必然性的发展明显地与主体所建构的模式相关，而可观察物对于演绎自然起到不可缺少的帮助，但仅仅是作为解释了的外源数据。必然性——不可还原到普遍性——尤其绝没有构成一种可观察物。除水平1A的模式及其个别化的水滴之虚假必然性——在下一水平通过它们所包含的水的守恒的必然性所取代——之

外,每一模式被整合进下一模式。这种把低水平模式不断地整合进高水平模式内,便构成了(正如在下一章我们将重复表明的那样)主要的特征甚或一种单一过程的起源——这就是必然性的发展。

但是,如果必然性就其特征是内源的,并且现实本身仍然只是必然化了的,那么人们怎样能说明事实上主体归属于客体的模式是如此成功,以致它们成为必然过程?换言之,什么能够解释把受制于主体处置的客体与演绎地建构它们的主体关联起来的同构论?回答是,主体——它同时是一个客体,作为一个有机体,通过它对客体实施物质动作——从它的"运算"中得到同构;它根据某些普遍的组合原则协调这些运算——这对它的所有模式来说是共同的,并且有效地对转换和守恒进行综合以形成封闭系统。这些原则——我们刚刚就保持的附加性的情况分析了一个例子——构成了所有可懂性的条件。所以它们可应用于所有客体——物理的以及概念的或心理的客体。这就真正地算作支持了现实是可懂的这一观点。最后,如果人们希望提出有关这种可懂性的理由问题,回答仅仅是,主体从根本上不过是一个在其他客体中的能动的客体,但它的活动是自我调节的,并倾向于凭其基于生物学的认知同化能力而反作用地相遇所有其他客体。

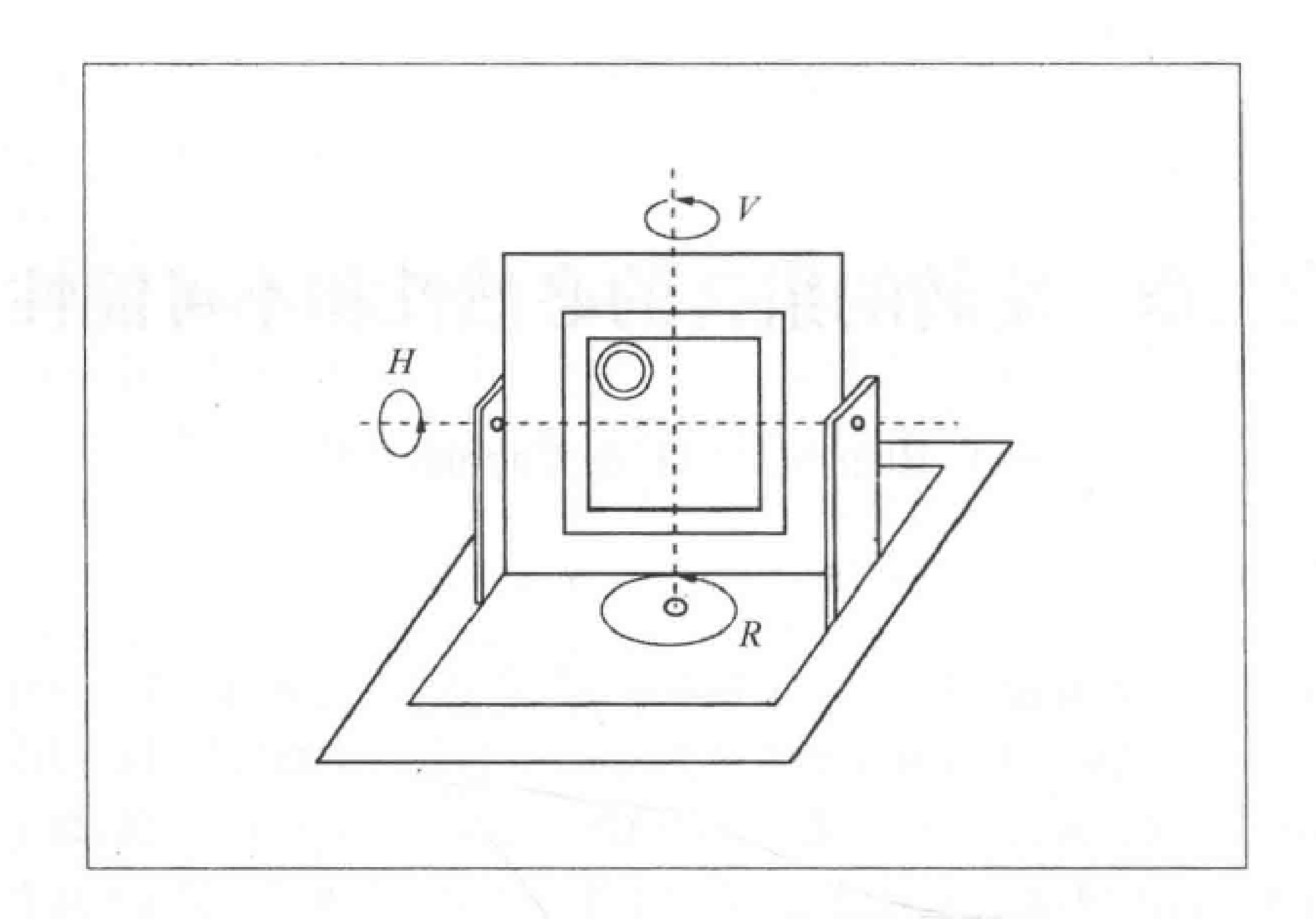
第二章　旋转的组合的必然性和不可能性

与 A. Blanchet 和 D. de Capona 合作

我们探索在主体用他们关于现实的模型所建构的必然性与在现实中无论什么被假定为必然的(因为我们的模型在某种程度上是成功的)任何事物之间可能同构之理由——用不着直接通达我们的知觉,第一章以原理的形式——它们对于逻辑数字系统和物理模型(如守恒原理)都是共同的——提供了媒介的第一个例子。但甚至还有更一般的媒介,即空间。事实上,我们具有主体的几何学和客体的空间,尽管它们有内部差别(这一点相当值得考虑),但在二者之间决不存在矛盾——除主体心灵中空间的虚拟无限性(它明显超出现实的限制)之外。

就基本的旋转现象而论,我们可以就主体客体的关系而划分出三种形式。首先,感知运动水平已经展示出归咎于主体自身施加的动作的那种旋转:旋转一周,旋转他们的手或头。第二,被试几乎很早就能旋转客体以便探索它们不同的边。第三,客体也能独立于主体而旋转,诸如一个岩石滚下斜坡。在现实世界中,许多循环式的旋转是可观察的。这三种旋转的共同之处是,它们都遵循同样的结构法则——循环群法则。本章不关心对这些法则的理解,而是关心在一个单一要素(一个薄片)的通路中固有的必然性——是由所附着的支撑物执行的三类旋转(全转)或半旋转(转一半)造成的结果。这些观念一次一个或以组合方式被实现。所要分析的问题是被试伴随装置的活动。我们希望确定使用了哪一种程序——从事实的简单阅读一直到演绎性预测——以达到作为发展的不同水平之特征的必然性和不可能性的判断。这是非常简单的情境:客体的几何学与主体的几何学能一起被看到。就关于必然性发展的起源和机制的一般问题而言,也许是特别富有信息的。

实验材料由多个方块组成。第一对方块绕横轴(H)旋转,第二个方块位于第一对方块之间,绕纵轴(V)旋转。这些方块都被置于第三个方块之上,后者绕其中心(R)旋转。如果把一片水果薄片粘放在内框的任何一个位置上,通过三组方块中的任何一块的360°旋转,都可以使它在初始位置上重现。或者,绕V转半圈同时绕R转半圈,也可以使水果薄片在初始位置上重现,因为两个方块是绕同一轴进行旋转的。通过绕H和V(或R)的180°旋转,也可以使水果薄片在同一表面上的V和H轴交叉点的位置上出现。两次旋转的先后次序和方向并不重要。但是,不通过某些方块单独的180°旋转而使水



果薄片出现于方块的另一侧,要使水果薄片占据关于轴对称的位置,是不可能的。

把水果薄片粘在内框的一个上角处。实验程序是给被试呈现以上一系列问题,让他(她)们理解旋转的组合,促使其达于对前内隐(fore implicit)和外显的必然性的理解。此外,在实验过程中对水果薄片的位置要加以变化,或增加一些水果薄片后,或者要求被试用图表示出该水果薄片不同的后续位置,我们将对实验结果进行分析。

水 平 1A

在5—6岁时,被试典型地表现出对旋转组合缺乏理解,单一的360°旋转也并不总是被理解为由两个180°旋转组成,其中的第二个180°旋转又使水果薄片回到了初始位置,它是第一个180°旋转的反向过程。另一方面,通过简单的试误法,被试自然可以获得某些成功的操作,而且这种成功的操作可进一步被概括到随后的操作中,但被试缺乏对必然性的任何理解①。

Ena(5;0)　“你可以让它转动吗?”他轻轻地碰了一下*H*。“可以转动得大一点吗?”不可以。“试试看。”(1/2*R*)于是Ena发现了*V*和*R*可以旋转,因此我们把一水果薄片粘在位置1上:“我们可以转动它(2*V*=360°旋转),使它回到原来的地方吗?”不可以。“试试看。”(*V*)“水果薄片在哪里?”在另一面(在背面)。“你可以让它回来吗?”他把方形框朝相反方向旋转。“可以再旋转吗?”他再次重复了*V*在两个方向上

① 为简单起见,我们将采用下述表示法:*V*表示旋转半圈,1/2*V*表示旋转1/4圈等。1表示水果薄片位于初始的左上角位置;2表示不可能出现的(前)右上角位置,位置正确时用“2后”表示;3表示左下角(不可能在前面);4表示右下角(亦称斜线)。

的旋转。“如果转动这个(*H*),可以使水果薄片回到同一个地方(原来的位置)吗?”他把*H*朝相反的方向进行旋转。“从这里开始转,可以让它转到那里吗(斜线处)?”*可以*。(他朝两个方向转动*V*)“现在水果薄片在哪里?”*在另一面*(*在背面*)。“如果动*H*,怎样才能使水果薄片到达我手指指的地方(4)?”他只转动*H*,结果水果薄片运动到“背面”,但在右边。我们给他示范如何同时转动*V*和*H*,但在他的模仿动作中他只是转动了两次*H*。

Mag(5;6)比Ena活跃得多,在探索了*R*,*V*和*H*后,她下结论说,要使水果薄片回到原来的位置,必须多次转动*H*。“如果转动别的方形框呢?”她尝试着把*R*转动了3/4圈。*不可以*。她接着又尝试着多次转动*H*。“有时候要转动很多次吗?转转看,你可以让水果薄片运动到这里(4)吗?……现在水果薄片在哪里?”*还是在同一位置上*。“可以把它转动到前面来吗?”*不可以,它就在背面*。“我认为可以让它到达那里。试试看。”*那我们可以转快点看看*(多次转动*H*)。“如果快点转,水果薄片会到那里吗?”*我们看看*(多次转动*H*和一次偶然*V*)。*让我们像转柜一样来转动它*。由此看来,她似乎理解了*V*是必要的,但在开始转动时又仅仅只转动*H*:*我们得转快一点*。*这样就可以使水果薄片回到原来的地方*。然后她似乎碰巧同时转动了*H*和*R*,但是其转动的方式是随机无序的,并得出如下结论:*我就这样转*(*只转动R*),*结果水果薄片到了那里*。对于不可能的位置2(右上角):*如果转动H,水果薄片就会在背面,如果再次转动H一次,它又回到了原处。因此,我不知道怎样才能使水果薄片运动到位置2处*。但要让水果薄片到达左下角也是不可能的,因为她连续不断地转动*H*。

Jea(5;11)　开始时只是敲击方形框而不是缓慢地转动它(参考Mag的速度),对于斜线位置,他作了如下转动:$H \times H \times V \times H$;但他得到的唯一结论是:*当你多次转动H时,有时水果薄片停在底部*(*前面*),*有时停在上部*。他据此推断并画图证明,水果薄片可以停在两个不可能的位置——2和3处;他未能证明水果薄片可以停在唯一可能的位置处(4);在表达把水果薄片转到中心位置可能性的疑问时,他是正确的,但还是尝试着无协调地作了多次转动。当把多片水果薄片粘在方形框上时,他多次尝试着想看看存不存在着这样一种可能性,即,有些位置的水果薄片发生变化而另一些水果薄片保持在原位置。在4片水果薄片的情况下,他希望发现,只有两片水果薄片发生水平位置上的变化,而另一些则保持在原来的位置上。对这种结果,他这样解释道:*我不知道何以会发生这种结果,又没有看不见的手*。

Sar(5;6)　似乎很快就理解了转动*R*可以使水果薄片在背面的右边(2)出现,再次转动*V*可以让它回到出发点。但随后她表示,转动*H*也可以得到背面相同的位置(2),这与转动*V*的结果是一样的。换句话说,即使她并不理解,通过连续地转动任一轴都可以使水果薄片回到原来的位置,但她并不区分*H*,*V*和*R*的方向:*你得再转过去一些*(再转半圈),*这样就回到了原处*。在她碰巧使水果薄片到达位置4时,

我们问她，怎样才能使水果薄片“到达那里”。*我们转动R和一次V。但4只可以通过V×H或H×R才能获得。*她还补充说：*你只能转动R，4在下面。*好像这样就可以使水果薄片运动到下面来。下面(好像并不理解为什么这两个位置是不可能的)，Sar先转动*V*再转动*H*，并看看水果薄片会不会从位置1变化到位置4：“可以使水果薄片回到原处吗？”*2V×反向的V×H，然后V×H，然后2V×H×2R和H×H×V×H(成功)。*“如果水果薄片在这里(2)，它将到达哪里？”*这里(4，在这种情况下是不可能的)。*“对于我来说，我认为它会在这里(3)。”在被说服之前，她重复*V×H*多达6次。“如果我们把两片水果薄片粘上去，*A*在位置1处，*B*在位置2处，结果会怎么样呢？”*它们将到达那里(A在1下面的3处，B在2下面的4处)。*“哪片水果薄片会到达那里(2)？”*啊，A在这里(4)B在那里(2)。*换句话说，她概括出了熟悉的路径：1→4，2→3。

对于物体的几何学(方形框的旋转)和对这些旋转的恰当选择、定向(direct)和协调的动作几何学的关系而言，所观察到的现象是非常有趣的。根据经验主义的观点，也许会做出这样的预测，处于初级水平的被试，即使或可能因为他(她)们不能进行预测，他(她)将只会记住出乎意料的观察结果，并能够非常客观地把它概括、组合起来以达到不同的目标。然而，事实压根儿就不是这样的。这些反应的两个重要特点是，一方面，对旋转组合完全缺乏理解，另一方面，这种缺乏的主要原因是——不能充分地区分两类旋转，一类是围绕纵轴*H*的旋转，另一类是围绕水平面的旋转(只要粘贴水果薄片的方形框保持垂直，*V*和*R*就保持一致；如果方形框是水平放置的，*R*就等同于*V×H*，在以最年幼的儿童为被试时我们没有采用该任务)。只有当它们通过某种必然性的动作被“理解”时，可观察到的才是可用的。但这种能力在日后才得到发展，因为它具有作为前提条件的两个彼此相关过程所具有的共同效应：一者内化另一者——意识和反省抽象的发展；另一个是通过对结果更好的区分和控制来提高客观性的变化，该结果是内部组织进步的函数。

在水平1A上，被试动作的几何学与被试所发现的几何学之间的相互作用在某种程度上是消极的或中性的：一者存在缺陷将干扰另一者的发展。只有在日后当二者产生积极的相互作用时，二者之间才可以相互促进。对旋转的组合缺乏理解显然在诸如Ena被试的身上清晰可见，他不但无法理解两种不同的旋转之间可能存在的联系，而且，他甚至不理解我们示范给他看的*V×H*的组合，因为他模仿时只是旋转了*H*。同样，Mag在碰巧产生了*H*和*R*的组合后，她只是意识到，转动*R*，“水果薄片就到了那里”，当然也就无法理解水果薄片是怎样到达的。Sar在取得相似的成功后，在解释时却仍然只局限于对*V*进行旋转；然而，后来她在把*H*加到*V*上时取得了成功，但也是在犹豫了很长时间后才找到了答案。

缺乏对组合理解的原因为我们理解该水平上关于刚刚讨论的两种互补困难的反应特点提供了答案——这两种互补的困难是，达到某种有意识性从而能够对行为进行自我调节的能力和对可观察到的结果不完整的分解。正如我们所看到的，被试并不能根

据他（她）们对方形框旋转的方向来区分三类旋转。因此，Mag通过多次重复旋转*H*并把它加速来试图获得预期的方向。后来，当意识到需要一个水平的运动时，她正确地说道，这就"像一个转柜"在旋转，或者像在水平面上的旋转。然而这种理解并未阻止她再一次旋转*H*——唯一在垂直面旋转的方形框，而且她已看出这并不起作用，在得到建议后，"我们可以转快点，这样就可以把水果薄片带到原处"。Jea提出，"有时候它在底部（正面）停止，有时候停止于上部。"Sar转动*R*是因为"它在下面"，她认为这样就可以使水果薄片运动到下面。同样，在两片水果薄片的情况下，她起初认为，它们将遵循平行的路线。后来，她把自己看到的概括为位置的变化，即，1→4，2→3。

360°旋转和回到出发点似乎也是一个有趣的问题。2*V*，2*H*和2*R*的完全旋转（即360°旋转，因为*V*，*H*和*R*均表示180°旋转）仍未被理解为由两个半圈的旋转组成。因此，Ena拒绝相信，完全的旋转是初始位置的恢复。甚至当Mag作了一系列旋转并注意到这种即时的回复时，她仍然未意识到，一个简单、完全的旋转是充分的。只有Sar注意到了这个事实，因此，她的水平接近水平1B的推理水平。然而，处于水平1A的所有被试所能理解的是，相反方向相同路径的旋转可以回到原处，因为它消除了*V*，*H*和*R*每个半圈的旋转效应。我们将把这种反演的过程表示为：$(X \to Y)+(X \leftarrow Y)=$）。它构成了局部必然性初步的和唯一的形式，这种局部的必然性是水平1A思维可达到的水平。

除了上面刚刚讨论过的旋转的初级形式，我们还可以说，在水平1A上，任何事情都是可能的，但没有一件事情似乎是必然的，因为被试对自己动作的机制（不能分析动作的空间特点）和对可观察到的运动物体之间的联系缺乏理解。但是，在物体的几何学与被试根据自己不充分的理由和相互促进之间，存在很好的对应关系。

水 平 1B

虽然处于水平1B的被试所经历的困难与处于水平1A的被试所经历的相同，但已取得了重大的进步，因为水平1B的被试可以理解，2*H*，2*V*或2*R*的完全旋转可以使水果薄片回复到原初位置。

Kar（6；5）转动*H*，*V*和*R*后宣称，这是一种完全的旋转。我们问她："怎样转才能使水果薄片回到同一个位置呢？"她立即回答道：*那样转*（*V*）*2倍*。"那样转有用吗？"*有*（尝试着旋转）。*我就这样转，我再转一次它就到了那里*。但在两片水果薄片的情况下，一片在位置1处，另一片在位置4处，Kar作了一番尝试后断定：*要看看这样转是否有用，我可以转到那里*（*V*），*然后再转到那里*（第二次*V*），*然后这两片水果薄片又回到了同一个地方*。"你可以让位置1处的水果薄片运动到位置4处吗？"*不，不可能！当我们转动它时，水果薄片便运动到背面去了。我们看不见它在那里*（她转动*H*）。"现在水果薄片在哪里？"*这里*（她用手指着位置1的背面），*在这里，但*

是，为了让它回到出发点，我们也不知道它在哪里……哦，不，它在这里，在下面(位置3的背面)。“那么4呢？”哦，我知道，转动那块(*V*，正确)。然后，在从经验上证明了1→2的移动是不可能的之后，她却讲不出理由，即使她可以理解*V*×*R*(经尝试所产生的结果)将导致水平面的两次旋转(这两次旋转是一样的)。同样的错误发生于2→4，她提议应该转动*H*，但她同时却又认为，在这种情况下，水果薄片将停留于背面的2处或背面的4处；她说水果薄片在4的背面，并正确地断定，*如果转动R，水果薄片将运动到那里*(3)。在两片水果薄片分别位于位置1和2处的情况下，她正确地预测到(根据前面的尝试进行概括)，其可能的路径是1→4，2→3。但当我们在方形框的中央增加第三片水果薄片时，她断定，这些路径是不可能的，*因为绿色的水果薄片在那里*(在路径上)。也就是说，她忘记了在1→2和2→4的情况下，这种循环运动使得水果薄片作循环运动，而不是线性平面的替代。

Lau(6;6)，在位置1的情况下，转动水果薄片*V*×*V*，*H*×*H*和*R*×*R*。“你可以使水果薄片从位置1处运动到4处吗？”她尝试着转动*H*×*V*，然后：*不，不可能到达那里，但是可以到达这里(1→2)*。她试了试并发现，转动*V*或*H*后，水果薄片将仍然位于方形框的背面。她又转动*V*×*H*。“可以让它回来吗？”(再次做*V*×*H*的旋转)。然后，为了使水果薄片从1运动到3，她又进行了一系列的*R*，*V*和*H*的12次旋转。她注意到水果薄片运动到背面去了。但这并未阻止她认为，在两片水果薄片位于位置1和2处，第三片水果薄片位于中央的情况下，位于中央的第三片水果将会运动到两片水果薄片之间，或者将从最初的位于两片水果薄片的中心位置处下降到靠近方形框底部的地方(她尝试着将*H*，*V*和*R*进行组合来获得这种结果，尝试次数多达15次)。“你怎样解释这片水果薄片从1处运动到4处，而另一片水果薄片却挡住了它的去路？”*它是这样运动的*(在水平面上用图画出了一条曲线)。对于三片水果薄片排成一行或五片水果薄片(每个角一片，第五片在中央)的情况下，她只能预测到平移和逆向的移动。

Val(6;6)立刻就可以转动*V*×*V*，*H*×*H*和*R*×*R*。对于1→4，*当然：H…×V(犹豫)*。“还有别的途径吗？”他进行了诸如*H*×*H*的旋转等，然后，当他看着*R*的时候，他发现可以进行*H*×*R*的旋转。他试图转动方形框以使水果薄片从1处运动到2处，但结果是徒劳无益的，但他仍然认为，水果薄片可以到达方块的每个角，因为那些小装置是可以转动的。

以上三类反应刻画了水平1B的特点，其中有两类反应似乎是相互矛盾的。第一类反应是，可以理解位于中间的方形框的完全旋转，不管是转动*H*而使其以垂直的方向运动，还是通过*V*或*R*使其以水平的方向转动。通过两个半圈的协同作用，被试毫无疑问是可以使水果薄片回到其初始位置的(如，1，2，…)。这样，在一个包含逆旋转的旋转后((+*V*)×(−*V*)=)，其实，这在水平1A中已出现过，被试就发现了第二种必然性，但这种发现仍然只是局部的(我们将会明白其原因)。第二类反应是，在进行了三类旋转并对它

们加以区分之后——与我们在水平1A中所发现的被试缺乏区分的情况相比，被试已取得了某些进步，当实验情境变得愈益复杂，被试仅仅通过转动某一个方形框无法获得期望的结果时（如，为了使水果薄片从1处运动到4处，Kar只做H的旋转，Lau只做V或H的旋转），被试便产生了这样一种想法，即，同时转动两个方形框。在多次的尝试和失败后，被试取得了成功，虽然他（她）们还缺乏对结果的预期和事后概括的能力（除了部分的概括，见Kar在两片苹果薄片下的表现）。因此，我们可以说，被试试图以经验的形式来进行组合，但这种表现尚不能为有计划的组合提供证据。最后，第三类反应似乎与第二类反应一致，但被试反应中的犹豫表现又与第一类反应相矛盾。这第三类反应是，即使被试可以转动中间的方形框，但他（她）认为，粘贴于其上的处于不同位置的水果薄片可以以平移的、可视的方式在该方形框上到处移动。即使被试本人的经验表明，水果薄片往往运动到方形框看不见的另一面，但他（她）们仍然相信这一点。根据这种经验，他（她）们本应该知道，按照当前装置所具有的特点，这种水平的运动是不可能的。被试对处于中央位置的水果薄片的运动的反应是最令人惊讶的，因为被试把它看作是1→4运动的路径障碍，因为他（她）已经看出，在从1运动到4处的路途中，水果薄片须经过位置2才能到达方形框的背面。看来，该水平的被试还是认为，水果薄片可以进行独立的直线运动。

水 平 2A

关于在V×H组合中的水果薄片的运动，水平1B与2A之间的差异不易看出来，因为水平2A的程序在很大程度上仍然是经验的。然而，我们仍然可以根据以下事实对这种差异进行描述：在水平1B中，只有当被试初次使用单一的旋转失败之后他们才会求助于第二个方形框的旋转（Kar等只有在单独转动*H*失败后才求助于*V*），而在水平2A中，被试很快就领会到右-左和上-下两种形式之间协调的必然性；但是他（她）们仍然不能预期到要选择哪些方形框进行旋转的组合，只有在得到某些提示后才能发现某种组合是有效的。另一声面，在水平1B中未发现被试对水果薄片的运动作线性路线的理解。

Jac（7；5）为了获得1→4，自发地提到，只转动*H*是不能使水果薄片到达右边的：*我只好把它放在这里（2），然后转动它。*然后，她同时转动*V*和*R*并说道：*水果薄片仍然在同一面（可见的那一面）。*因此，她同时转动*R*和*H*。"还有别的方式吗？"*没有了。*"不用转动*R*吗？"（*H*×*V*）。"水果薄片可以回到位置1处吗？"（*V*×*H*）。为了得到1→3：*我想让它转动到那里（3），我不得不把它放在那里（2，因此↙）。对于1→2，我还不知道。*她尝试了多次之后断言：*我认为它与这里（1→3）的情况是一样的，不可能做到。*

Cat（7；o）立刻证明了2*V*，2*H*和2*R*的旋转可以使水果薄片回到原处。"如果你同

时转动两个方形框会怎样呢?”*是的(尝试H×V)*。*不*。当我们继续进行1→4的任务时,她提议*H×V*,她已经看出来了,两个不同的旋转不可能使水果薄片回到原处(H×R)。“有可能使水果从位置1处运动到3处吗?”*有可能(尝试H×V)*。*不可能*。“可能吗?”*不可能*。*从2处开始的转动只能到3*。她把从1处开始的可能运动的位置都画了出来,可见的位置用圆圈圈出:1和4,不可见的位置用叉号画出:2和3。“如果我把两片水果薄片放在上面(1和2处),水果薄片会转动到哪里呢?”*红水果薄片会转到那里(1→4),蓝水果薄片到那里(2→3);因此,它们是两条对角线*。“如果我把一片水果薄片放在方形框中间呢?”*它将仍然停留在中间*。

Nat(7;0)对于1→4,*我不知道怎样转动才能得到这种结果*。后来,思考了一会儿后,她尝试了*H×R*的组合旋转并发现了*V×R*。她的评论富有启发意义:*我转动那块方形框(V),但我无法记住其旋转的方向,然后我转动R,也无法记住其方向*。她接着说道,*我正在考虑旋转的方向*。这自然指的是有待组合的不同方向,以及朝前(+)和朝后(-)的方向。

Ste(8;11)清楚地表达了这一点:对于1→4,我们不得不首先降低方形框(包括水果薄片),然后再转动它。他的绘图表明,水果薄片从下转到上,从可见的位置1处旋转到不可见的位置3处,然后又从3处转到4处(可见)。但是这种因果式的总结是一系列试误的结果,在这样一个过程中,他一直试图去理解旋转的方向。中间的方形框一开始是水平呈现的,Ste先看了看水果薄片,并转动它,然后正确地转动了R。接下来,当对于垂直的方形框和同样的问题1→4时,他明白,只转动*R*是不够的,还必须通过转动*H*使水果薄片下降。对于1→2,他尝试了一会儿便说道:*不,不可能*。*我可以让它到那里(转动V到2),但水果薄片仍然在另一面(看不见的一面)*。对于在1和2处各放置1片水果薄片的情况,他立即预测说:*1→4和2→3*。

Dan(8;9)对于1→4,首先并不知道如何才能获得这种结果;但是,当我们提议转动*H*时,他增加了*V*的旋转:*后来,我转动那块方形框(V)*。在已经注意到不可能的路径后,他预测2→3。“你怎么知道呢?”*因为我试图转动V和H,然后水果薄片就在那里(3)停了下来*。然后,他又认识到,*V×H*和*H×V*是等价的。对于三片水果薄片的情况,*只有被放置在角落上的水果薄片其位置才可以变化,位于中间的那片水果薄片一直都在同一个位置*。

Iva(8;5)对于1→4,她说:*我不知道*。但是,随后她选择了*H×R*。“你怎么知道的?”*因为如果转动H,水果薄片就到了背面,如果再转动H,它又回到了原处*。因此,她就增加了*V*。在多次尝试后,她断言1→2和1→3是不可能的,她作解释时提到了这样的事实,即*水果薄片总是转到那里(对角线):它在同一面(可见的一面)*。这就立即导致对位置1和2的水果薄片的正确预测。对于位于中心位置的水果薄片:*这块水果薄片总是停留于此处,除非它在前面或后面*。“其他的水果薄片是真的发生了位置变化吗?”*不(笑),只是那个东西(中间的方形框)在转动而已*。

And(8;0)像Iva那样用*也许能*回答“1→4”的问题。“你是怎样想的？”他发现了*V×H：同时转动V和H，水果薄片便到下面去了，但如果你不同时转动它们(V和H)，水果薄片将停留在原处*(即，水果薄片将回到位置1处)。“如果我们把它放在这里(2)会如何呢？”*它将转到那里(3)*。“它可以转到别的地方吗？”*位置1的后面*。“可以转到4的后面吗？”*不可以，我想是不可以的*。“试试看。”结果他成功了。

Xav(8;11)(像前面所有的被试一样)在成功地完成了2R等任务后，试图同时转动H和R，但进展较慢，因此，在得出总的结论之前，他可以观察到这样一个过程。“1→3可能吗？”*我试试看*(V×H，成功)。*如果在这里是像这样转动：↘，那么在那里肯定是这样转动的，↙*。对位置1和2处分别放2片水果薄片的情况，他立即进行了概括。“它们相互交叉吗？”*它们彼此并没有交叉。事实上，其转动的路径像→、像↙，并不直接像↘*。他的图，包括表示旋转的符号，是正确的。

尽管这些被试最初表现出种种犹豫，并总是关注于经验的核查，但他(她)们在水平1B上还是表现出了两个重大的进步。第一个进步是，他们能够理解由方形框的*H*，*V*或*R*的旋转所决定的水果薄片的循环运动具有其必然性，水果薄片运动到不可见的背面的线性运动是不可能的。这种必然性与前面的两个必然性(水平1A的逆转和水平1B中水果薄片回复初始位置的完全旋转)是整合在一起的，但被试仍然不能清晰而明白地把它们表述出来，虽然这对于他(她)们来说是不言自明的。然而我们可以从被试的诸多行为中推知这一点。可以发现的一个最明显的现象是，在两片或三片水果薄片的情况下，被试不再进行水平运动的推论，这与水平1B的被试是一样的。最重要的是，被试已经能够理解，位于方形框中央的水果薄片是保持不动的：Cat说“它总是待在中间”，Dan宣称“它总是待在同一地方”，Iva接着说“除了它在前面和后面”。Xav还清楚而具体说明了另外两片水果薄片“不会交叉”。事实上，水果薄片运动的路径确实是这样和那样的(两次旋转)，也并不直接像那样(对角线的移动)。另一方面，即使像Cat和其他的被试并未对不可能的运动路径做出详细的解释，但他(她)们还是能够理解(通过画图来证明)，只有通过运动到“另一面”，水果薄片才能从1运动到2或3(如Ste所言)。Iva清楚地表示，是旋转(rotation)而不是水平移动(translation)牵涉其中：“如果转动H，水果薄片就到了背面，如果再次转动*H*，它就又回来了。”我们可以再回想一下她对水果薄片是否改变了位置这个问题的笑声：“不，是那东西(中间的方形框)在运动。”

水平2A的第二个新的获得(毫无疑问与第一个进步有关)是，由于两个半圆的旋转必然使方形框上的水果薄片回到出发点，而如果想获得一个不同的位置，如，1→4，则需要两个不同方向的旋转。然而这并不能通过试误法为被试所预期和确定。Iva对这种“有条件的”(required)的必然性(一个新动作的必然性，但该新动作的程序尚未被被试所知晓)作了很好的描述，她一开始就说：“我不知道(是否能够1→4)。”然后尝试了H×R，因为只转动H半圈会使水果薄片运动到背面，而2H的旋转又使得水果薄片“回到原处”。同样，And说：“如果不能同时转动两个方形框，水果薄片将待在同一个地方。”但

是,即使这种旋转的组合还有待于通过经验的操作去发现,但这种发现的进程也并不是由偶然性(chance)来决定的,而是由一种常有的关心(concern)所引导的:即,对方向之间的协调的关心。因此,Jac自发地宣称,为了获得1→4,我们不得不这样:1→2和3→4,即使水果薄片在位置2处时是看不见的,只有在位置4处时"水果薄片才停留在(=回到)同一面(可见的一面)"。Ste更系统地阐述了这种双重要求:我们只好"把方形框降低然后再转动它"。这表明这种类型的必然性(需要通过经验的探索才能发现方向的组合)和我们前面描述过的另一种必然性——与黏附水果薄片的方形框的旋转有联系的水果薄片的循环运动——存在一定的关系。这种关系可以解释7岁大的儿童在水平2A的初始阶段所遇到的问题:水果薄片的旋转方向部分地取决于方形框的旋转顺序和方向,正如Nat所假设的("我正在考虑旋转的方向")。而Dan却已经认识到这种等价性,该等价性在8岁之后才较常见。

水平2B和3

如果我们把水平2A的特征描述为,对被认为是必要的必然性的旋转组合的经验搜索,但被试还需要对方向的变化进行搜索,因为他(她)们无法通过演绎而得到它,那么,我们可能希望,这种预期在水平2B上应该变得具有系统性。但是,与我们经常观察到的现象一致的是,我们看到的是9—10岁的儿童出现了明显的倒退,这从心理学上来看是非常奇怪的,但从认识论对必然性的兴趣来看并非如此。因此,我们将简略地描述一下这种现象。一般而言,这种明显的倒退与这样一个事实有关,即被试发现了一个新的问题,但当时并未马上找到解决的办法。在目前关于组合的旋转情况中,可以简单地这样来解释:在已经理解了旋转组合的必然性之后,被试并不继续这种经验的探索,而是转而通过提出各种各样的假设试图去预期一切。然而,由于被试还不能理解必然性的假设-演绎特点,因此,他(她)们的预测依遵的只是一时的直觉,并不根据对内部一致性或任何形式的必然性控制(necessary control)进行检验。

Aur(9;4)完全正确地认识到,可以转动R,H,并再次转动R,但是,为了使水果薄片回到初始位置,她立即想到可以进行旋转的组合:$V\times H$,$R\times H$,$R\times V$,由于以上旋转导致不同的结果,于是她增加了某个方形框的完全旋转,这显然与R的完全旋转是等价的:"如果你像转动R那样进行旋转,结果是不一样的吗?"*不,我认为结果是一样的。*"你肯定吗?"*并不那么肯定。*在完成了1→4的旋转后,她认为1→2的旋转是可能的:*因为既然可以使水果薄片运动到那里(4),那么水果薄片也必将可以运动到那里(2)。*她尝试着单独将所有方形框进行了完全旋转。尽管她失败了,但她坚持认为,在两片水果薄片分别位于1和2处的情况下,位置1处的水果薄片必定可以运动到位置4,而在位置2处的水果薄片将取代其位置(2→1)。对于将第三片水

果薄片放在方形框中央的情况，*水果薄片将待在原处，但我不太确定*。在初次的尝试失败后，她始终保持了这一小心翼翼的表述。

Dil(10;5)，当一开始问到关于如何使水果薄片回到原处的问题时，他回答说，*没问题，例如V×V，水果薄片又回到了同一个地方*。但这并不是唯一的方式。*2R，2H朝某一方向或相反方向转动也都可以，最后，我们可以转动任何东西*。意指某一方形框的完全旋转，这与*R*是不同的，因为它包括了基线(base)：这将至少产生10个不同的旋转方法。由于他未能成功地做到1→3，因为在那种情况下水果薄片将不在前面，他再次寻求某一方形框的完全旋转，把水果薄片转到了对角线的方向。他在1→3任务上的失败并未阻碍其做出预测，对于两片水果薄片的情况(位置1和2处各1片水果薄片)，除了1→4、2→3、1→3和2→4的路径正确外，依遵相同的平移路径，他还不相信位于方形框中央位置的水果薄片会改变其位置。

没有必要对已经达到演绎思维阶段的被试的反应做进一步的描述，他(她)们可以考虑所有的可能的假设情况。但是，由于仍然对控制的需要根本不敏感，因此，他(她)们未能知觉到自己的矛盾——不能进行概括，特别是将一片水果薄片的情况概括到两片水果薄片的情况。

然而，我们发现，被试在水平2A上所达到的进步在水平3上仍然取得了有规则的、持续的进步。一些10岁大的儿童(甚至还有一些聪明的9岁儿童)和所有11到13岁的儿童都可以解决简单的演绎问题，因为，利用(水平1A发现的)事实——描述水果薄片旋转的所有路径是旋转，而平移路径是不可能的，在对水果薄片位置被取代的情况进行描述时，他们认为方形框的不可见的一面与可见的一面同等重要。

Tho(9;3)指出，因为位置2在方形框的背面，所以可以解释1→4的运动，并证明1→2(位于可见面)的运动是不可能的：*水果薄片不可能到达那里(2)，因为它们在同一面。它是像这样(V)转的，而且，当方形框转了半圈之后，水果薄片便运动到另一面去了*。“那么1→3呢？”*不可能，因为它们就在这一面(同一面)*。然后，他证明了两个可见的位置，1和4和背面的2和3。因此，他也正确地解决了两片水果薄片的任务。

Tin(10;7)通过转动*H×R*，水果薄片由位置1经过位置3(在方形框的背面)而到达位置4。对于1→2的转动，该被试说：*不可能，因为如果转动V，水果薄片便运动到另一面去了*。对于放置在三个角(1,2和4)上的三片水果薄片(*A*,*B*,*C*)，我们问该被试：“*C*将运动到哪里？”*那里*(1处)。“它可以运动到(2)吗？”*不可以，因为我们不能那样转动方形框*。

Car(11,0)对于1→2的运动：*这是不可能的，因为我们不能使水果薄片作水平的运动(平移)*。“那么(1→3)呢？”*也不可能：如果那条路径不行，自然这条路径也不行*。“为什么？”*这两条路径(1→4和2→3)是一起运动的；那两条路径*(1→2和1→3)*也是一起运动的*(Car把处于背面的2和3的旋转用图画了出来)。

Mac(11,11)在画图证明了V× H或H×R等的旋转总是*使水果薄片作对角线的运动时,他宣称,1→2的运动是不可能的,因为(那片水果薄片)的位置并未发生变化,只是方形框在转动*。

Fra(12;0)　关于1→4:*我转动这个(V)并那样转动(H)*。"这样转动有趣吗?"*没趣,因为我们已经改变了其方向*。但1→2的运动被排除在外:*我们要走到另一面才能看到水果薄片*。对于1→3:*如果1→2的运动是不可能的,那么1→3也不可能。没有必要动手去试*。

以上每个被试都预期并轻易地就完成了*V×H*等的旋转的组合,并根据1→4或2→3的路径来得出结论。这毋须做进一步的说明。我们观察到的新现象是,使1→4或2→3的路径成为必然性的相同的操作(旋转)也使得1→2和1→3的运动成为不可能。因此,从水平2A到水平3的进步在于,以一种演绎的运算必然性——它可以预见到这些旋转的组合并排除不可能的组合——来取代要求对正确的组合进行经验探索的必然性。这里的一个基本事实是,被试的几何学可能使他们对水果薄片在客观空间中的移动做出不同的推论。这就给予他逻辑上的必然性,该逻辑必然性包括先前水平的必然性,和通过发现每一个可能或不可能旋转组合背后的原因来扩展它,并为它提供一个更好的基础。

结　论

这里我们将回到一开始所提出的问题:空间是以何种方式代表了一个特别有用的、关于隐含在主体动作中的必然性(从感知运动行为到近似于逻辑的空间探索)与客体的空间移动的必然性之间的同构关系的指标? 换句话说,主体的几何学与客体的几何学存在一种怎样的关系?

从本书前面的内容我们可以看出,如果主体的几何学与客体的几何学之间的关系未得到充分的建立,那么二者的这种相互关系将使双方产生相互的干扰,但如果这种关系建立得很好,则二者可以相互促进。这种主客体的空间的相互作用显然是一种特殊类型的关系。这种相互作用比任何种类的物理现象及其因果模型之间的相互关系都要更紧密得多。这里提供的资料是水平1A到水平3的一个恰如其分的例子,它只是将隐含于主体几何学的必然性与假定存在于客体空间的必然性联系起来的极为普遍过程的一个特例。

让我们首先回忆一下,主体是主观的,至少从他出生的那刻起是这样的,因为他对自己的动作具有意图和意识,但他同时也是客观的,因为他是一个可以做出客观动作的有机体。这些动作是空间的,并指向客体和主体自身的躯体,这就必然产生两个基本的结果。第一个结果是主观世界和客观世界的几何学在本质上属于同一种类,不管客观

的空间在形状和运动上存在多大的丰富多样性，而主体的空间开始时的初始动作有多么简单。第二个基本结果是，随着表征和动作的发展，主体的动作越来越内化，情境也逐渐地向反向发展着自身：由于新的可能性和必然性的形成的双加工，主体的操作几何学被无穷地扩展，最终它包括了（有时甚至可以预期）科学发现的客体空间的任何事物，更不用说超越科学解释的事物了。

很明显，客体的空间在主体取得几何学最终的进步中发挥了某种作用。否则，二者的相互作用也就无从谈起。在前面刚刚讨论的事实中，是主体的空间体验使处于水平1B和3的物理问题（自旋波、Dirac的△，等）导致了数学上的新发现。但是，与物理现象的因果模型相比，主体对客体空间的形式和移动的同化代表的只是不可能在物理中发现的一种特殊性。我们老早以前的研究就表明，要知觉和表征一系列物体的顺序，必须采用本身就有序的行为（计数者，如Berlyne所言）：以一定的顺序看、摸、想象……相比较而言，对温度计的工作方式或者把糖放在一杯水中的结果进行解释时，并不要求主体将其表征为有多热、有多甜。几何学的直觉（*geometric intuition*）决定了证明空间特点的类型；它们以与可以从客体读出的信息完全同构的方式来采取一定的形式并模拟其变异性。总之，客体在空间中的形状 C 或移动 T 只能通过客体几何学的形式 C' 和操作 T' 来解读，如 $C'=C$，$T'=T$。另一方面，在任何因果模型中——不排除空间模型——主体操作与客体实际行为的对应关系只能是接近的。因此，空间实际上在主体的演绎组合的必然性特点与那些归因于客体本身的必然性的特点之间起着某种中介（mediator）的作用，甚至在守恒的特例中更是如此，其方式更具有一般性（见第一章）。

这种中介作用是如此强大，以至于我们不得不思考，它是否与我们的总的主题相矛盾。根据后者，必然性是一种主观组合的东西，而现实性——因此，客体空间是其中之一——只能被假定是必然性的。本章所描述的事实业已证明了三种必然性的存在：在水平1A上是第一类必然性（朝初始半圈旋转的方向逆向旋转半圈，水果薄片将回到初始位置），接下来是水平1B的第二类必然性（360°旋转必将使水果薄片回到原来的位置）。在水平2A上是第三类必然性（水果薄片本身是旋转的运动，而不是做水平的移动）。以上所有三类必然性最后都被整合在水平3上的循环组合的必然性中（在水平2A上，这种必然性不再仅仅是某种假设，相反，它可以通过演绎来预期），这从包括对线性移动具有不可能性的解释中可得到支持。显然，所有这些都与主体的几何学有关，但为什么我们只把它归因为物理装置和客体空间的“必然性”呢？这个问题其实很简单，因为后者是主体活动的产物，因为星球的运动及其组合在本质上是类似的，而且可以毫无理由地把它们归因于柏拉图的上帝，后者永恒地在做着“几何学化”的动作（ὸ Θεὸσαεὶ γεμετετ）。

事实上，自然法则（包括空间法则）就是它们原来的样子，即便它们是一般的和永恒的。如果哪个人希望从中发现某种形式的必然性，他必须重新构建它们的历史——也即，在进化的过程中将宇宙同化为一只巨大的动物，是整合和渐进的必然过程

(necessitation);然而,宇宙已经被完完全全地整合为一体了,很容易就具有其必然性(可解释为必然性)。可能性和必然性实际上是认知组织的工具。从活的有机体的初级行为到思维的最高级进化形式,可能性和必然性都在起着某种作用。它们并不仅仅是某些资料(datum)的东西,不管其具有多大的普遍性。在自然和空间中不可能找到必然性,因为前者的水平并未被整合入后者的水平中。然而,这是知识领域的必然过程的主要特点。在物理世界中(与生物世界相反),如果其法则是永恒的[①],发展的进步将不具有类似之处。此外,现实性缺乏心灵所能包括的所有可能性的协同可能性,而实际上,每次只有一种可能性可以实现。最后,通过建构模型,心灵可以寻找并理解解释,但现实只能学会了解其自身,通过生命体的降生(而且是一劳永逸地,至少在我们的星球上是这样的),并通过它们产生认识论的主体,以不可避免的循环(螺旋式)方式回到起点。

① 相比较而言,在生物学上,我们可以在进化法则的意义上来谈论进步。例如,血的凝固规律与荷尔蒙调节干预前后的法则及神经系统调节之后的法则是不一样的。

第三章 斜面的建构

和C. Monnier A. Boder合作

在此项任务中呈现给被试的问题是竖A,B,C三根支柱,由相同尺寸的木块构成,要求被试从A到B放置一条木质轨道,从B到C放置另一条,这就构成了一个简单的长斜面。然后,使一颗弹子可以从点A向下运动(但是没有给弹子推动力)[①]。因此,该问题又是一个物理上的必然性问题,因为下滑的充分必要条件是支柱A,B和C应按高度降低的顺序进行构造。但是,由于支柱是由儿童自己建造的,而不是从已有的排列中选择,所以,这个看似简单的建构任务要求关系的建立。我们想考察的一点是,对于这个问题,个体是否只需要辨别程序必然性——这种必然性仅以成功的充分条件为基础;或者,是否所观察到的必然化(正如在第一章中所分析的解释)与对成功理由的理解有关,因此又一次从属于模型及其演绎组合。

开始所用的方法是引出一种理解态度;即使被试可以按自己的设想自由构建路径,倘若他们使弹子从A滚到了C,我们就提出多种构建,要求被试预测并说出理由。举个例子,A=3个木块,B=2个,C=1个;或者3,3,1,1,1,1或2,2,1,...。在每种条件下,我们要求被试检验他们的预期。当弹子不能到达C时,就问被试可以做些什么来调整。因此,我们并不是一种简单情形的自由构建,而是有一个初试问题时期,在这个时期被试要预期结果,接下来是一个主要阶段,这里要求被试对没有倾斜路径的构建进行校正。这个阶段对必然性形成的过程(必然化)有特殊意义。在最后阶段,出现许多未预料到的反应,当一根支柱的高度保持不变,只有其他两根可以变化的情况下,要求被试进行构建或校正。

因此,本章所处理的问题是物理必然性,它不是和原理有关,诸如加法守恒,而是和事例中所包含关系的简单整合模型有关,如按高度降低的顺序构建斜面。必然性和整合的关系问题是复杂的,我们经常会回到这一点。必然性对整合相当于可能性对分化,这就表明了问题的普遍性和它与平衡问题的关系。但是,更特殊的是,我们是否可以说,必然性凭借其组织能力从而成为整合的来源,或者,是否是相反的——必然性是组合的综合结果。或者,换一种说法,它们是否是建构和必然化的辩证过程的两个不可分

① 两个轨道(从A到B和从B到C)都是60 cm长,木块4 cm高。材料如此设置以致当B和C有同样的高度,甚至在A到B相当快速地下降之后,仍然存在着避免弹子滚动下来的阻力。

割的方面。让我们获得没有特殊假设的资料,既然,在类似于用*A*>*B*>*C*三根支柱来构建斜面的简单问题中,不连贯反应不可预见的多样性将会展示出,诸如">"和"<"这样简单关系的基本整合已经提出意料之外的问题;这使得随后的观察更有意义。

水 平 1A

在两岁半到3岁左右,我们观察到一种水平,在这个水平上,斜面和弹子从*A*到*C*的向下运动没有必然关系。该水平的整合问题只是一种学习,只是对观察结果进行调整。举三个不同的例子。

Pau(2;5) 尝试了3,2,1,没有做出预期,成功了(十分惊奇)。同样尝试了3,3,1;他先尝试了2,1,然后是1,1和2,1;对于后者,他最后做了一个预测:*它能使弹子滚动*。"那么1,1呢?"*不能*。"能做些什么呢?"他尝试了2,2:*不能成功*。"怎么办?"*两个,一个*。他因此似乎是明白了,但是稍后仍然认为1,1会取得成功,甚至回到了2,2上去。我们通过提议3,2,1,回到三个元素上,尝试后他看到了正确的结果。他甚至会把2,2,1调整为他刚看到成功的3,2,1,但是看到3,3,1的失败,他仍需要尝试,随后"调整"为2,3,1,因此,直到结束,并没有真正的学习产生。

Bar(3;6) 在试验(interview)期间取得了显著进步,但是在结束时,仍未出现整合。首先,她预期3,2,1会取得成功,但是她认为2,2,1也会成功,在说过"*不,它不能滚动*"后,她把2,2,1"调整"成2,2,2。因为2,2,2也好不到哪儿去,她提出了2,2,4:*我想它应该会成功的*。她进行了尝试。*不行,它应该是2,3,4*。"它能行吗?"*能,因为弹子很大(坚固)*。然后根据经验她开始懂得弹子可以下滑但不能上爬。然而,这并不能阻止她提出3,4,4和4,4,4:*我想这会成功的*(尝试)。"怎么办?"她尝试了5,4,4。*那个动了一点*。"那么?"她尝试了5,5,4。*没有成功*。然后,我们又给她呈现了3,2,1:*那个会成功,它会一直滑下来*(用她的手指描述)。但是因为3,2,2不行,所以她把它"调整"为4,4,2,然后是4,4,4,以及其他不构成斜面的组合。

Yve(3;10):到结束时,可以观察到一些学习。我们先提出了3,2,1:"那个会成功吗?"*我不知道*(尝试)。*它滑了下来*(注意措辞)。"那2,2,1呢?"*是的,它将会滑下来*(尝试)。*我们还要放一个在这里*(*A*)。"要不然?"*在这里*(*C*):*这样就成为3,2,2*。"会成功吗?"*会*。"那么1,1,1呢?"*不会*。他尝试了2,2,2,然后3,2,2,然后4,2,2。"你能加一些或者去掉一些吗?"*能*。2,2,2,然后3,2,3,*因为*(3,2)*能够滑下,所以同样*(*CB*)*也能*。注意到这种错误,他调整为4,2,2,然后4,2,3和5,2,3:*这里*(5,2)*滑落得非常快*(错误)。*哈!我们应该拿走第三块*。这就成了5,2,2,接着6,2,2,他到这里就停止了。

这三个例子证明了一种进步，我们称之为整合同化(integrative assimilation)。在格式的协调方面或相互依赖的子系统的协调方面既没有出现必然性甚至也没有出现整合。在这个水平上，我们发现的仅仅是对观察事实或多或少的适当解释，以及试图把这些事实彼此联系起来的整合同化的形式。Pau没有涉及斜面或下降运动，只注意成功和失败，除了不断地尝试，他并没有尝试建立成功和失败的内部联系；在试验的整个时间内，他的预测没有进步，试验的整个时间内也不存在任何学习。Bar预测了弹子在平面上的运动而没有预测斜面上的运动，甚至设想弹子会向上运动(2,2,4)。当她发现弹子“只能下降不能上行”时，她取得了进步；然而，她并没有应用这个发现，虽然在2,2,2上先失败了，但仍然继续构建诸如4,4,4的水平路径。因此她的学习并没有涉及下滑路径与水平路径的对立。而Yve，出现了稍许进步：即使没有预测下滑的必然性，但是他把这个术语用于描述最初的情形：“它滑下来了。”然而，这仍不能消除水平构建，如3,2,2甚至2,2,2。但是在最后他示范了一种清晰的、虽然不是最好的获得：增加3,2,2的坡度，他把*A*加到了4，然后他构建了4,2,3，并调整为4,2,2；在*C*上的进一步错误之后，他提出5,2,2，最后6,2,2！

水 平 1B

从4岁开始，被试趋向于自发地预测或发现——要使弹子滚动，斜面是必要的。然而这种格式还不能充分确保成分关系的整合。

San(4;6) 我们提出1,1,1。“你认为弹子会滚动吗？”*不会，它太平了。她构建了3,1,1，当她看到这个不管用时，提出了3,1,3。*“这个行吗？”*行。*“它会滚到哪里？”*这里(C)。不，它会一直滑下来(进到盒子里)。它不能到这里因为它要爬坡。*“那么？”*我应该从C拿走一块，3,1,2。*“那会怎么样？”*我应该从C再拿走一块。*“如果你拿走了会怎样？”*我也从B拿走一块：3,0,1。*“能成功吗？”*我再放两块在B上，3,2,1(尝试)，成功了，它滑下来了。*“如果你在*B*上多加一块，还能成功吗？”*能，它会滑下来的(尝试3,3,1)。不，不行。*“如果我放成2,2,1呢？”*不行，滑落不是从A开始的，而是从B开始的。是的。*“如果你只想在*A*上放两块，该怎么办？”*在C上放一块，2,2,2。不行，不会有下滑的。*“但是，除了*A*之外我们能否变动另一个，这样它就可以下滑了？”*不行，它要两个斜面。*“但是如果我变动*B*呢？”*那会是一个平面。她尝试了多种方式，但只是通过添加木块进行的：2,3,1然后是2,3,2和2,3,3。最后她发现可以从B上拿走一个或两个木块：这样，2,1,3；2,1,2，甚至2,1,4。*“那成了两个斜面吗？”*不，只有一个(2,1)，但是从B开始是一个向上的斜面(1,4)。然后我们回到了3,2,1上：*“如果我加一块*A*，一块*B*，一块*C*(如，4,3,2)？”*那就不行了，太高了。*“那如果我拿走一块*A*、一块*B*和一块*C*呢(如2,1,0)？”*不行，*

这里没有任何坡度了。

Cri(4;6)解释说,3,2,1是可以的,因为它有一个斜面,预测3,2,2不可以,因为在(2,2)间没有斜面,而在(3,2)之间有一个斜面。"能做什么?"拿走一块C。但是他没有那样做,而是加了一块B,因此成为3,3,2。"这能行吗?"不行,在(3,3)之间不能滑落从而在(3,2!)之间也不会有滑落。然后他调整成4,3,2,出乎意料,成功了:我在这里(4,3)看到了一个斜面,而不是在这里(3,2!)。"你确信?"是的,这里有一个。后来他同意,既然3,2,1是有用的,所以可以分别在上面加一块:这也会成功(因此又出现了4,3,2)。但是当问到"这个是较好、一样还是较差"时,他说:比较好,因为,这里有两个斜面。"构造一条路径使弹子滚动得尽可能快。"他从每一个支柱上拿走一块木块,没有看到他是自相矛盾的。"那个滑落得快一些吗?"是的。"那么你能使它滚动得很慢吗?"不能(但是他构建了2,1,0,一个新的矛盾)。"那不让它到达C呢?"你必须在这里放三块(2,1,3,没有犹豫),因为这里是一个向上的斜面。"那么如果我想在C上放三块,能否变动其他的木块使弹子可以滚动?"没有。"试一下。"他构建了4,1,3,然后是5,1,3;6,1,3和最后的7,1,3。"如果在这里(B)放一些是否会好一些?"一点也不!

Fra(4;11)立刻证明了3,2,1的下降并且指出,如果调整3,3,1,可以拿走一些或者添加一些,这些并没有阻止他以2,3,1和3,3,3结束。"那个行吗?"不,它非常大,不得不都低,怪小的:这样2,2,2;2,3,2和3,2,3。用他的手来表示,两个斜面↙↘和↘↗是相同的走向;只是在后来才注意到他的错误。接近结束时,他改进了他的调整:这样,5,3,3到5,2,2。但是在每根支柱上加一块不起作用,然而拿走一块就能行,因为它将下降(所以都比较低)。

Veg(5;1)开始时在A前添加了一块木块,然后她尝试了2,1,1和3,1,1,直到4,1,1。她拒绝3,2,1而把它改动为3,3,1。尝试过之后,她说,这里(3,3)是直的(=平坦的),这里(3,1)像那个样子(做了一个斜面的手势);她把这个调整为4,3,1,表明了斜面。这并不妨碍她尝试调整3,3,1(提出的结果)为3,4,1和随后的3,2,2到3,2,3,对两个方向感到迷惑。接近结束时,她调整对了。

Mat(5;6)把建议的结构0,2,0调整为2,2,0:否则,它会滑下来(从B到A)。然后,看,我把它加高一些,这样它本身就会滑落了(3,2,0)。对于3,2,1,他说:我认为它会滚动得很快,因为它十分困难(=陡峭)。虽然有一个很好的开始,但他随后就接受了3,2,2,因为这里(A)是高的,这里(B)和这里(C)是低的。他注意到了错误。最后就拒绝了3,2,2甚至3,2,1,因为它在(3,2,2)之前就停止了。当他尝试时,他不能解释这种成功,但是随后他接受了3,3,1,后来又调整为2,3,1。

Dia(5;3)出现了类似的暂时理解与缺乏整合的奇特混合:3,1,1不能使弹子滚落,是因为这里(BC)是平的。"怎么样?"它会呆着不动。"能做些什么呢?"把B变高,这样就成了3,2,1。"那么3,3,1可以吗?"可以。"如果我在B上放三块呢?"你就

*应该在A上多放一块。"那么C呢?"不动它。*因而4,3,1。"如果在3,2,1上都加一块呢?"*那会更好,因为(4,3,2)滑得多。*"为什么?"*因为它比较高。*但是4,2,2和她调整为2,2,1的2,1,1等也可以。

Mar(6;2)仍把3,3,1调整为3,3,4,把1,1,1调整为1,2,1,然后是2,2,1等。如果在3,2,1的每一根支柱上都加一块,*它就下能使弹子滚动了,因为它太高了。*

Isa(6;5)也是同样的重复:*当它是低的时候,才能使弹子滚动。*

Ser(6;5)指出,3,2,1可以,*是因为它有两个斜面AB和BC,并且A是高的,比B高,B居中,比A低,C最低,*但是他仍然把2,2,1调整为1,2,1,然后是2,1,1,但并不十分确定。他同意,当在3,2,1上分别添加一块A、一块B、一块C时仍然可以,*但是会更快,*而拿走一块A、一块B和一块C就*不行了,它就太直了(=平面)。*我们在2,1,0上验证。*哦,可以,那是相同的,但是因为没有三块A,所以比较慢。*

Cor(7;2)正确地把3,2,2变动为3,2,1,但认为它不能用另一种方式进行。"如果我给你更多的木块呢?"*这不会有好作用:它只会使它变高,这样弹子就不能再滚动了。*相应地,她把3,2,2调整为2,2,2而不是3,2,1。*哦,不!太平了!*因此她回到了3,2,2,不能提出一个解决方法,*因为当它是高的时,弹子不能滚动,而当它是平的时,弹子也不能滚动。*

我们给出了许多例子,因为对于整合系统及由此的必然性出现的条件来说,它们有非常好的指导意义。一个整合的系统由两个条件来限定,一个是构成稳定特性的整体(这里$A>B>C$),一个是包含元素间的组合,它确保和维持整个系统的特性。水平1B的特征是,在协调所涉及的关系乃至创建组合时被试意识到了这些特性,但是经历了许多困难。换句话说,他们为自己设立了一个目标:只有San指出,"它有两个斜面";甚至如Ser所解释的"A必须比B高,B居中,C最小"。其他人只是提到"斜面"或简单地用手势表示,但是他们都知道,要对这个项目进行整合。但是只要他们开始运用成功实现的必然性组合,最显著的障碍会对整合过程产生干扰并减缓这个过程。当然,$A>B>C$的排列没有对这些被试提出问题。但是虽然这样,他们必须构建由木块组成的支柱,甚至要调整所提出的排列——即应用转换,这种转换是相互依赖的。小数量(3)的支柱和使弹子从A滚动到C的单纯目标,似乎应该为那种设想提供支持,即对于这种任务,被试不会有任何特殊困难。然而,事实上,我们发现了相当多的困难,因此我们必须找出,认识这些组合为什么会如此困难。

第一个解释自然是,被试没有充分预见到转换的结果。有时,这个问题显示的是它自身只与单一支柱对有关:即使是(7;2)的Cor,仍然把3,2,2调整为2,2,2(而不是3,2,1),没有预见到她在尝试之后所注意到的:"哦,不行!它(AB)太平了!"更常见的是,预期的失败出现于未能预见第二对元素的调整结果的情形中:San同意可以把3,2,1调整为3,3,1,因为这些是"倾斜的(BC)",且只是在"不,它不是(AB)"这种事实之后得出结论:试验开始时,缺乏跨支柱之间的预测几乎是系统地出现的,且在偶然取得成功的情

况下，导致对事实的错误理解。Cri把3，3，2调整为4，3，2，从而保证*AB*之间的斜面，但并没有直接看到*BC*=3，2也是相似的斜面。

第二个要素，不太容易观察到但比较重要，它是类推错误或概括错误：San，从拿走一块*C*(3，1，2)，并做出结论"我也应该拿走一块*B*"。Mat看到3，2，2不能使弹子向下运动时，随之就否定了3，2，1，"因为它在前面就停止了"，即两种情况中的前两个支柱(3，2)是相同的。

另一方面，可以观察到连续项目和间隔项目之间的对立。事实上，相当奇怪的是，年龄较小的被试能用以前的经验解决新问题。因此，刚开始，Mat和Dia在其水平上取得相当好的成绩，但是随后就退行到常规错误上。Cri认为弹子在十分高的叠跺上应该滚动得更快，但是随后他构建出相当低的叠跺使弹子滚动得"很慢"。他并没有看到自己的矛盾。简言之，先前发现的解决方法(我们称其为不再有疑问的整体)仅仅是不彻底地决定了随后的解决(=仍然有疑问的解决)，这是一个基本事实。相反，必然性推论的起源是将先前的获得完全整合到新问题情景中的过程。

被试的失败中的第四个因素：尽管被试能把开头看到的事实作为随后行为的计划，但在先前和随后之间协调的缺乏通常会导致被试忘记(在行动中)总的指向$A \rightarrow C$。因此，Fra、Veg和其他一些儿童提出$A<B>C$或者$A>B<C$的解决方案——有两个斜面，但方向是对立的——同时用手势表示一个单独的方向。这样做的理由无疑是，儿童通常只是通过看两个方向来尝试调整*ABC*序列。这不同于十分合理的调整，这样就导致了和取得成功所必需的调整不同的结果。

第五个消极因素是在把转换系列看作协同可能性时存在困难(这在前运算思维领域内是十分普遍的)。被试的动作好像是在思考一种解决方案(正确的或不正确的)，一旦这种方案被证明是正确的，它就被看作是唯一的可能。缺乏灵活性无疑和不充分的预期有关(因素一)，但是由于它和动态的可能性有关，所以被辨别出来。最显著的例子是Cor的行为，她已经7岁了，否定了她认为太高系列和一个水平系列(恰当的做法)，但随后并没有看到通过拿走一块*C*(3，2，1)来调整3，2，2的可能性。

与这种缺乏协同可能性相关的是第六个因素——绝对错误，或相关概念运用的失败。因此这些被试从未谈到"较高"或"较低"，只是谈到"低"(Fra的"都低")或者"高"(Cor："当它是高的时，弹子就不会滚动了")。特别是，在理解和解释事实的原因时，水平1B上的被试没有一个懂得：如果在每一叠跺上加一块或者减一块，斜面并没有发生变化，叠跺间的相对差异保持不变。因此当从一种情形到下一种情形时他们认为是有差别的，并经常得出矛盾的结论：如果把它们变高"那就不能使弹子滚动了，因为它太高了"(San、Mar和Cor)；或者相反，它会滚动地更好、"更快"(Ser和Cri，在出现自我矛盾之前)。从每一个叠跺上拿走一块会使弹子滚动地更好(Fra和Isa)或指出这里根本就没有斜面时，认为弹子会滚动得更差(San在2，1，0尝试中)或者更慢(同样Ser在尝试2，1，0时)。同样回想由Cri(接近结束时)和Veg所归于*A*的绝对大小的做法，同时他们让$B<$

C或$B=C$（Cri让$B=1$。甚至在系列7，1，3中，他认为让B变高没有用）。

缺乏相对化导致最重要的第七个也是最后一个因素，我们称之为虚假必然性。事实上，当从每一叠跺（A,B,C）上都增加或减少相同数量的木块时斜面保持不变，由于缺乏相对概念，所以儿童不能理解这种现象，这和认为最好的斜面就水平面而言必然是最高或最低的斜面的做法是不同的，因为后者限制了协同可能性，并只在一个特定的方向上对系列进行调整（添加而不是减少或者其他方式）。但是这揭示的主要是，归因于弹子的运动的必然性之不彻底和错误的特性。在水平1B上的被试都懂得，弹子的运动是由支柱A和C之间的高度差异所形成的斜面决定的——换句话说，$A>C$（这对于水平1A来说是一种进步）。但是从这个规则中所认识到理由只是弹子从斜面上滑下比上爬或停留在斜面上要容易得多。这和Dia所描述的一样。然而，由于这些虚假必然性的存在，妨碍了被试看到弹子运动的速度依赖于A和C之间的数量差异而不是它们的绝对高度。这便解释了系统化错误类型：如Dia所说的，它"滑得更快……因为它比较高"。

在进行水平2A及由它所引出的问题之前，让我们先注意一下，尽管水平2A的被试常常能成功地摆脱这些虚假必然性，但是在7到8岁的被试身上仍然有很多虚假必然性残余作用的例子。

Sab（8；2） 尝试2，1，0，"如果在A,B,C上各加一块，就可以使弹子滚动了吗？"*我不知道*（接下来，只找到了3，2，1）。"那么如果各减一块呢？"*那就行了*。"怎么样？"*不是太好，因为它有一点低了*。"那么如果各添加一块呢（如3，2，1）？"*那个还可以*。

处在水平2A上的Nia（8；6）立刻把4，4，4调整为4，3，2。"那么如果我各加一块呢？"*那会更好，因为它比较高*。"如果都减去一块呢？"在得出"*它是同样的*"结论之前，认为这个也是可以的，但是又好一些。

Ria（8；5） 对于3，2，1，"如果从每一个上面都拿走一块，能行吗？"*可以*（因为2，1，0而自信）。"同样的速度？"*慢一些，因为这里（A=2）比较低*。

Dra（8；6） 对于3，2，1，"如果在每个支柱上都添加一块呢？"*那不行……是的，可以*。"怎么样？"*比较好，因为它比较高*。"如果在每个上面都添加五块呢？"*可以*。"怎么样？"……"如果我都拿走一块呢？"*仍然可以，因为B比A低*。

这些中间情形显示了在相关概念上的进步，但是也显示原来的虚假必然性的阻碍作用。

水平 2A

7到9岁儿童的亚水平特征引起了一个新的、有趣的问题，这和整合所涉及的机制有关——必然性形成的过程中的机制。只要三根支柱可以随意调整，处于该水平的被

试在把序列调整成$A>B>C$的形式时,都能或快或慢地取得成功。然而,当三个中的一个保持不变,只有其他两个需要调整到固定的支柱时,他们仍遇到相当多的困难。

Dom(7;2)对于3,2,2,开始在A上加了一块,观察4,2,2:*那不像是弹子的滚动,它把从A=4上获得的动力保持到2,2上*。他立即做出结论:*在A上加了一块*(犹豫)*也应放一块在这*(在B上,自信地)。"为什么?"*因为有四块A、三块B、两块C,这总是一个等级*。我们呈现了3,2,2[①],这次他用减法进行(注意到了协同可能性):*我应该从这儿拿走一块*(C=1)——*不行,因为这里有三块A和三块B。这里就成平的了*。"怎样?"*从这儿拿走一块*(B)——*不行,我应该从这里和这里拿走一块*(B和C,即*3,2,1*)。对于4,2,2,*我应该从这里拿走一块*(C)*不动其他两个;因此这里*(AB),*这里有一个陡峭的斜面*(四块A和两块B),*这里*(两块B和一块C),*这里是一个平缓的斜面*。对于3,3,3,他提出了3,3,2,并立即调整了它:*从这里*(B)*拿走一块,这里*(C)*一块*。"能成功吗?"*能*(3,2,2)。*不,我应该从这里*(C)*拿走两块而从那里拿走一块:这里就会有两个斜面*(3,2,1)。但是尽管他的反应很迅速,当对于3,3,3要求保持C不变时,他不知道该怎么办了:他只发现了4,3,3,然后是5,3,3。"如果我不想让A超过五呢?"*你应该从这里拿走一块*(C,这样就成了5,3,2)。"但是如果我不想动C呢?"*那是不可能的*。我们提了一些建议:"如果我在B上放一块呢?"*哦,是的,这就成了5,4,3*。"木块的数量是重要的吗?"*是的,数量是重要的*。"什么更重要,木块的数目(如,绝对高度)还是路径的数目?"*如果斜面可以让弹子滚动下来就足够了*。这样,Dom获得了相对性,从虚假必然性中摆脱出来。

Alb(7;6)把3,3,2调整为3,2,2,接着立刻调整为3,2,1。对于3,2,2,他很快就说:*我们应该从C拿走一块*。"还有其他做法吗?"*可以尝试不同的方法*。他构建了3,1,2,但是很快就说:*哈,不行*。接着调整为5,2,2,然后立即调整为5,4,2。"更少一些呢?"他构建了4,3,2。"如果从每个上面都拿走一块呢?"*都是一样的,因为所有的都变低了*。但是当我们使A=2不能改变时(2,3,2),他拿走一块C并把它放在了B上,成了2,4,1,然后拿走三块B,得到2,1,1。在找到2,1,0这个解决方案之前他需要尝试。

Nad(7;4)把3,2,2调整为3,3,2和3,2,1。对于3,3,1和B固定,*我应该拿走一块A*(=2,3,1),*因为不允许我拿走一块B*。

Ben(7;11)不费力地就把2,2,1调整为3,2,1。"如果我们不动A呢?"*那不行,因为如果你在C这儿再放一块,它就成了平面了*。"那么这里(B)呢?"*不行,这里是平的*(AB)*而这里是倾斜的*(BC)。"如果不能在A上加木块呢?"*这就没法做了*。"拿走一块是否会好一些?"*没有用!* Ben仍然获得了有小差别的相对性。对于3,2,1,"如果你在每个上面都多加一块呢?"*它和以前一样可以使弹子滚动的*(立刻答道),

---

① 推断应为3,3,2,后文说有三块A和三块B。——编者注

那是相同的:4,3,2。"如果你都少加一块。"*可以,和现在一样*。但是对于在每个上面都多加10块,他退却了:*可以,但是会慢一些,因为它有点高*。

Bel(8;0)立刻把3,3,1调整为3,2,1。她同意对4,3,1都加上一块也是可以的,这就成了5,4,2。"如果我从每个上面都拿走一块呢?"可以(自信地)。但是当保持*B*不变来调整3,3,1时:*那不可能*。"为什么?"*因为如果从A上拿走一块,那么弹子就会从错误的方向上滚下来。这里(B),不准动,这里(C),拿走一块不起作用*。接着我们提议她可以加一些,她说:*在这里(A)加一块*。"确定?"*不太确定*。"还有其他可以做的吗(对于3,3,1)?"*在这里拿走一块*(从*C*)。*这和在这里(A)放一块是一样的。哦,不行,这里(AB),是直的*(=水平的,做出这样的判断,好像如果*B*保持不变,3,3就不能改变)。"能做些什么?"*没有其他办法*。对于2,3,1,她立刻做出反应:*加一块(A)——不,两块,否则它就太直了*(=平的)。"如果我们不改变这里(*A*)呢?"*可以,从这里拿走两块(B),就可以了*(=2,1,1)。"一块还是两块?"*一块,哈,不,另外这里有两块(A),弹子不能滚动,我们不能在这里(B)加任何东西,否则弹子就会回转*。"那么?"*不可能*。"为什么?"*如果我从(B)拿走两块,它就变低并成了直的*(*B*和*C*之间就成了平的)。*或许我们可以拿走一个*(2,2,1)*或者两个*(2,1,1)。"不能动*C*吗?"*如果从这里拿走一块(C),弹子总是从最高到最低(BC);因此不能改变任何东西!*

这些观察令人相当吃惊。只要被试可以调整所有三根支柱,即使在最初的尝试中单纯应用演绎思维没有获得随后的成功,但是他们相当迅速地找到了正确答案。和水平1B相比,取得了显著的进步:更多的预期,更少的错误概括和矛盾,在已经找到的解决方法和未来的反应之间有更大的一致性。新获得的主要是两类。它们影响上述的第五个和第七个因素:协同可能性的出现(Dom和由Alb对于相同系列的校正所预期的"不同方法"),以及在某种情形中,斜面和绝对高度的相关性(Dom说,"只要能使弹子滚动下来就足够了";类似的是Alb和Bel)。这就消除了"更低"(或"更高")=更好的下降的虚假必然性(如Alb所说的:"都是一样的,因为所有的都变低了")。仍然有疑问的是:只要一个支柱保持不变,一切都出现了错误,同样的被试会退行到水平1B上:Dom认为,如果保持*C*不变并且*A*不能超过5,调整5,3,3是不可能的,好像*B*=4根本不明显。Alb,对于2,2,3和*A*不变,从*C*上拿走一块放在*B*上,因为他不能把它放在*A*上。类似的,Nad,对于3,3,1和*B*不变,只能成功地从*A*上拿走一块,"因为不允许我从B上拿走一块",却忽视了或忘记了*A*>*B*的必要条件。Bel,对于同样的3,3,1和*B*不变,只想到拿走木块而不添加并发现根本没有的解决方法,好像固定*B*就等于同时固定了3*A*=3*B*,在*C*上的减少对于*AB*和*BC*之间的协调没有任何作用。另一个被试,Ben,只想到加法,从未想到拿走木块。

这样,我们的问题就是解释这些错误反应,其思想的特点是,固定的元素就不再是活动的一部分,只考虑剩下的另外两个因素和它们的相互关系;当Alb、Nad和Ben在相

邻因素上做出调整，而这种调整应在固定的因素上进行时，这些反应由他们的行为所证实。另一方面，因为固定因素必须保持不变，Bel认为弹子和被固定的元素之间的关系也被固定了。我们发现了相反的观点。这些困难的理由似乎是，转换中缺乏互反性，这种互反性是建立在固定因素和一个其他因素之间合适关系上的。当3个因素都能变动时，相应于相反的$B<A$，通过使A变大或使B变小就可以获得想要的关系如$A>B$。这就做了6种可能的转变，在每一方向上的$<$、$>$或$=$(AB或BA)，其中只有两个是正确的，其他四个被排除。考虑到两个方向是很重要的，因为被试可以通过审视或者$C<B<A$或者$A>B>C$来预期或检查序列。然而，当A固定时，有三种转变是可以用的，因为只有改变B来获得$A>B$，才有一个是正确的。因此新问题是对较有限的可能转换和涉及固定因素的必然性进行协调。毫无疑问，缺乏灵活性和互反性构成了这些问题的主要困难：只能改变B来获得$A>B$显然没有使用两种可能转换更便利(在A上$+n$，或在B上$-n$)。总之，如果所有的三个支柱都能被调整，可能总共有18种转变，但必须排除其中的12个(只有6个是正确的：$A>B$或$B<A$，$B>C$或$C<B$，$A>C$或$C<A$)；这就引起了水平1B上的困难，而这个困难在水平2A上就克服了。但是如果一个因素保持恒定，只剩下12个转换，其中8个必须排除；另外4个是正确的，其中2个由于缺乏互反性从而有困难。

水平2B和结论：整合与必然性

早在9到10岁的时候，被试可以根据纯粹的推论预期解决三个变量的问题，而不再通过水平2A上经验和推论的混合来进行。类似地，熟练掌握了有固定因素的情形：

Lau(9;4)对于2,2,1,从B上拿走一块,然后从C上拿走一块,这样:2,1,0。“它和3,2,1(在尝试1中出现的)的速度相同吗?”*相同,因为这里只拿走了一个*。对于3,3,1:*我们要么在这里(A)加一块要么拿走一块B*。对于4,3,3,*我们应该在这里(A)加一块并在这里加一块(在第二个上)*。“如果只想变动一个呢?”*从这里拿走一块(第二个支柱:3)*。

Oli(9;5)　2,2,0并且B固定:*我们应该加一块A和一块C*。“你应该?”*不,加一块在A上而在C上不加*。“如果在2,3,0上使B为三个呢?”*你应该在A上加两个。如果你只加一个,它将是一个平面*。“如果你把A加到10,你怎么让弹子像以前3,2,1那样滚落?”*放9块在B上,8块在C上*。“这一样吗?”*一样,同样是2,1,0*。“如果你让A=1,对于1,3,2该怎样?”*就不行了,因为我们需要使B为0。但对于C就没有可能了*。“A的最少数目是多少?”*是两个*。“如果我加一条轨道呢?”*那么你至少需要三个A*。

令人惊奇的是这些反应出现得这样迟。然而，这对于必然性和整合之间的关系很有意义。该研究暗含了两种必然性。第一种是物理必然性，在这里我们不准备做深入

的分析：为使弹子向下运动必须有一个斜面。在水平1A，这个条件还没有成为必要条件：如Bar所言，弹子“大”(=坚固)得足够从3爬到4；只有在教她之后才知道弹子只能下滑。但是从水平1B开始，被试，如San，指出弹子不能在“平面”上下滑，根据以往的材料指出“它有两个斜面”(*A*→*B*和*B*→*C*)。Ser更精确地指出*A*必须“高”，*B*“居中”，*C*“最低”。虽然，对于在水平1A开始时对事实所进行的简单概括而言，这种理解加入了某种必然性，但是那种结果模型只是把弹子的运动和它的空间背景联系起来，而不再简单地给予一个内部动力：在平面上；事物无法向前运动，但是在一个斜面上，向上就构成一种阻力，而向下就可以使它“滑动”(Dia)。后来，被试引用了重量等，但在这里重量是无关的。

必然性的第二种形式，由以下部分组成，即发现和满足下降的必要和充分条件，和当给出的排列不符合体系时进行调整，这种调整在水平1B上是可以接受的——换句话说，*A*>*B*>*C*。这些不断要求的调整直接来源于必然化过程，因为一般来说，必然性*p*可以通过非-*p*是矛盾的这一事实来认识；在这种特殊情形中，调整的关系与*A*>*B*>*C*的规则是矛盾的。水平1B和水平2A使我们了解到：对于被试，一件事情是理解系统的整体特性(如*A*>*B*>*C*)，另一件事情是掌握那些产生或重视这些整体特性的组合。因此，我们能够确定系统内渐进的整合、必然化过程和必然性组合之间的关系，而相反的关系与规则则是矛盾的。

以上所描述的系统是一系列相互依赖的关系，这些关系构成了具有稳定特性的整体，它独立于其成分的可能变异。因此一个系统通过动作或运算发挥作用，对其成分进行暂时的和连续的调整。它进一步整合成一种结构——非暂时性的可能转变系列——这保持了系统的整体特性。我们把这种建构过程称为整合，并把它的最后阶段称为整合的阶段。必然化由连续的组合组成，这些连续成分对由整合过程所产生的某种必然关系进行补偿(如，*A*→*B*和*B*→*C*的下降在开始是分别建立的)。必然性这个术语描述了这些组合结果的非时间状态，在这种状态下，它们的否定(或者缺乏)就会和系统规则相矛盾。

但是为了理解必然性和整合之间的关系，让我们区分由观察的事实所建立的三种可能维度。第一个是限制。寻求获得一个特定结果所具备的必要和充分条件：例如，*A*必须比*B*高，从而保证从*A*到*B*有一个斜面。第二个是分析，对所做的转换提供理由：例如，对于1，3，2，要有一个斜面，*A*应该变得较高，这样应该使*B*=0(Oli)。找到理由会推动限制并证明限制。它在必然化过程中的重要性也来源于那种事实，即所引用的理由会接着产生第二个理由，一个理由的理由。因此，Oli进一步提出，如果*B*减少到0，那么在*B*和*C*之间就不存在斜面。较多的分析使得他得出*A*不能少于2的结论。必然性所包含的第三个维度是蕴涵形式的扩大：如果*A*，*B*或*C*保持恒定，那么……(参看后续部分)；或者，在Oli的例子中，如果是两个轨道，*A*不能少于2，那么是三个轨道，*A*至少应是三个。

根据这些描述，如果要确保所做的转换能保留整个系统的特性，显然，整合的过程要求必然性。但在一个系统内同时也可能包含了非必然性成分：为了保证*A*>*B*>*C*的斜

面，A、B 和 C 的差异不必相等：因此所包含的整合要多于它们蕴涵的必然性。另一方面，必然化总是导致整合，因为这是不能保持孤立的成分的结果。但是由于每一必然性能产生新的可能性，由于它的分析和扩大的特征构成了新发展的起源，由此可以得出结论：必然化及随之发生的整合（如，系统的构建）通过创造一个新的系统来扩大旧的系统，这个新系统包含了先前的系统。从这方面来看，每一种必然性在它所蕴涵的可能性上要比它在任一特定时刻所整合成的系统丰富得多。因而可以断定，系统 S 内的整合过程和一个或另一个必然性 N 之间没有相互作用，这里 SN 代表两者的共同部分，S 非-N 代表了系统的非必然性转换，N 非-S 代表超出 S 并形成朝向一个新系统 S' 的通路的可能性。这样，既然 S 在 S' 不能成为整合的，且 SN 开始扩展为 $S'N$，我们可以说旧系统在新系统内的整合本质上构成了必然性的基础；没有这样的一个过程，系统 S，S' 等就会彼此矛盾或者不协调。

这些思考似乎被所呈现的事实所证实。首先展示的三种不同形式的必然性——限制、分析和扩大——构成了必然化过程的三个阶段。在水平 1A 上（被试没有假定一个斜面），我们观察到了限制（必要条件）的迹象，这来源于两个方面：一个是对事实的经验性的陈述（Bar 在做了对立预期之后，说“它可以下滑但不能上爬”），一个是源于被试行动的不完全推论过程：对斜面的纯粹的空间理解要求复杂的参照系，但是同化到个体自己的行动中（弹子向下运动比向上或水平运动要容易）[①]或许涉及了对观察的整合和水平 1B 的早期预测（预测前述斜面的真实构建）。因此，在水平 1B，我们发现了关于系统所采用的普遍形式的限制，但由于缺乏分析维度，被试仍不能理解成分运算——不能理解为什么一些解决方法能取得成功而另一些不能。相反，水平 2A 是分析的一个很好的例证（组合的理由），但是在固定因素的情形中，没有扩大。最后，我们在水平 2B 上有了扩大，当被试解决这个问题和其他各种问题时（对于 Oli 来说，2，1，0 和 10，9，8 是相同的类别），甚至从只有两个轨道的系统 S，到有 n 个轨道的另一个系统 S'。

这样，我们观察了在形成必然性过程中出现的特殊阶段和作为整合和必然化构成的特殊阶段之间的密切关系。适合于整合过程的方面也存在于从外部变异到系统内部变异的连续转换中。在水平 1A，经验的、外在的方面占很大的优势，整合的迹象和观察到的一样（记录的结果）：没有系统。第一个系统出现在水平 1B 上，简洁陈述了整个序列的规则（从 A 下降到 C）。但是仍然只有尝试错误而没有组合，没有恰当的预期：外在方面仍占优势地位。只有到水平 2A，转换才指向内部方面：它们部分是通过演绎，通过使特殊关系从属于整体规则而获得的。最后在水平 2B，内部方面占优势，这表明系统是整合的——作为组合的结果，整个结构被重构，正如后者可以从结构中推论出来一样。总之，整合，作为一种组织过程，是必然化的来源。反过来，必然化成为一种稳定的力量，从而确保整合是平衡的，同时进行扩大活动，使得扩大性变化成为可能。

① 很小的幼儿相信，同样的距离向下时就比向上时短些（参见皮亚杰：《儿童的运动和速度概念》，巴黎大学版，1946，第四章）。

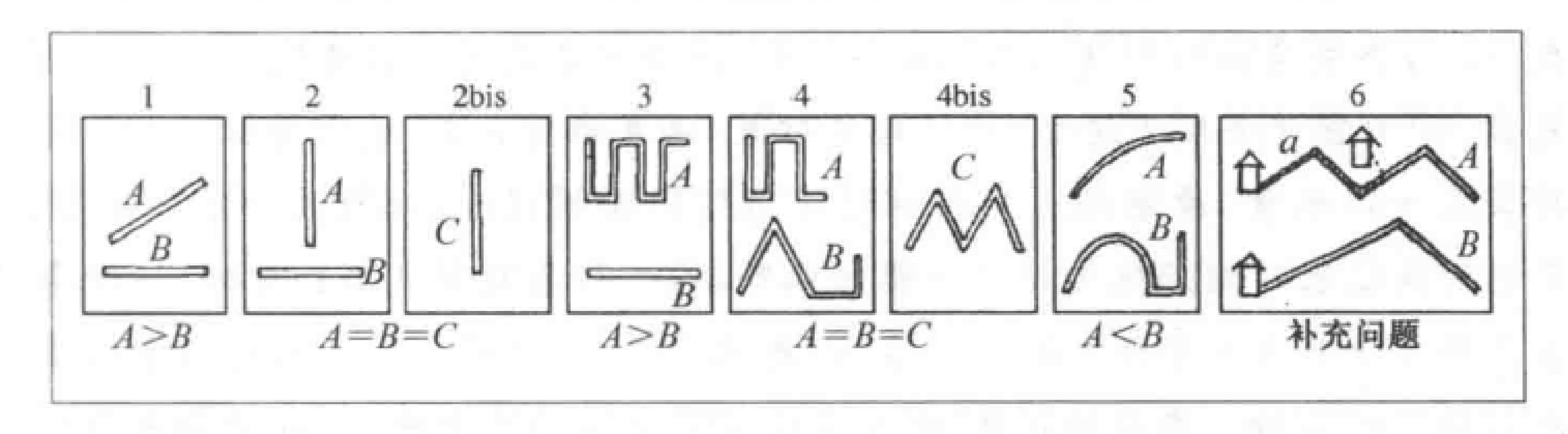
第四章　长度测量中的必然性

与E. Ackerman-Valladao和K. Noschis合作

第一章和第二章论述了由被试所产生的组合而导致的必然性与客体固有的必然性之间发生联系的因素。第三章主要论述必然性和整合之间的关系。通过考察测量，我们将把必然性和整合联系起来，并对两个新问题加以系统阐述。第一个问题是守恒，更精确一点说，是长度测量中的作为必然性的附加的守恒，它不再是第一部分所讨论的简单的可交换性。准确地说，它与可联结性或自同构的对应(automorphous correspondence)有关。在这里，长度测量标尺中的各部分a，b，c...和形状或方向改变后但相邻各部分之间的联系仍保持守恒的各部分是一种自同构的对应关系。第二个问题是，是否存在某种特别程序的必然性，或者，这种特别程序的必然性是否可以还原为结构的必然性，因为，即使这种程序只是"充分的"而不一定是必要的时，它也可以成功。因此，第二个问题只有在我们理解了被试取得成功或失败的操作结果背后的原因时，才有意义。由此也将把我们引导到必然性的结构方面。

下面所温习的关于必然过程的问题，与早些时候引导我们所做的关于测量研究中的问题极不相同。早些时候的研究由我们中的一位与B.Inhelder和Szeminska[①]合作完成。但下面要描述的一些行为已在先前的研究中报告过。

将两条线段画在纸上的不同地方，要求对它们的长度进行比较。两两呈现的线段既可以是直的，也可以是弯的，在最初的视觉估计后，要求被试用平展的可以折断的细面条作为标准，对线段加以测量。实验所采用的8个图形见下图。



任务描述如下："这里有两条路(实验者指出要比较的两条线段)。你能告诉我们其

① 见J. Piaget, B. Inhelder, and A. Szeminska. *The Child s conception of Geometry*. New York: Basic Books, 1960。

中是否有一条路更长,要走更多的路(诸如此类)吗? 你怎么知道? 可以确信吗? 为什么这么确信呢?”

在每一个实验中,实验者要求被试判断、说明和核实;如果被试未表现出自发的测量行为,那么,实验者建议他使用标准进行测量,同时记录下被试每次尝试的程序、姿势等。

在情境2和4中,引入第三条线段来探测儿童在简单图形和复杂图形中的传递性能力。我们还要求儿童建构两条路,使它们与情境5中的两条路的长度相等。

水 平 1A

正如我们所了解的,这些最初的前运算反应既无法达到长度的守恒,也不能进行长度的传递。因此,不存在自发的对测量工具的使用,甚至在实验者的要求下也不会使用测量工具。但是,在这种长度测量的必然性中,令我们感到惊奇的与其说是这种缺陷本身,还不如说是被试评价和描述长度的标准,特别是这些标准之间存在多大的组合上的相关。由于组合是被包含于必然性中的一个内在特征,因此,任何领域中的必然过程或整合(它决定必然过程)的第一阶段,便是异质标准的可比较性和可组合性。在长度测量中,水平1A全然不能达到该目标:被试对测量标准使用的极不一致性表明,在长度测量的必然性得到充分发展之前,儿童还有大量的技能需要获得。

Dim(5;0)在情境1中,判断斜线A更长,在情境2中判断横线B更长(唯一的原因是:*我想出来的*)。实验者拿一根细面条比拼A的长度,并折断面条使其长度与A一样长,然后拿着该面条与B进行比较:*A与B一样长*。但这种理解并不伴随传递和守恒。为了检验Dim是否具有长度的传递能力,我们又增加了一条竖线C,Dim判断:$C=A$,$A=B$,但(当演示被遮掩起来时),$C>B$,“*因为我看到的就是这样子的。*”为了检验长度的守恒,我们取了两整根细面条a和b,将它们并排放在一块儿进行对比,然后把a稍微往前推动一点点,Dim判断:*a更长,因为它的右端比b更突出*。我们把a弄成弯曲的形状,这时,b变长了,*因为它是直的*。在情境3中,B被判断为更长,*因为它这头到了这里,那头到了那里(两头都突出)*。我们建议他对B各部分的长度加以测量,试图以此判断他对该问题的理解程度:他取了一根细面条,使B是它的两倍长。然后他又把另一根细面条折断,但在比拼A的长度时,细面条只覆盖了整个A中的一部分。做完这些,他再次宣称:*B更长*。而他未对测量工具之间进行任何的比较。在情境6中,他没有注意到线段的弯曲形状,而直接把B处的房子放在靠近A的下面。

Lou(5;5)在情境1中说,*B更长*。“肯定吗?”*不知道*。“可以用细面条吗?”*可以*。他拿了一根长面条并把它放在A与B之间。这两条线段是小的。在情境2中,B比

*A*更长。“肯定吗?”*肯定*。“我说*A*比*B*更长。”*你是对的。不,我对:很容易就可以看出来*。实验者进行长度测量的演示后:*这两条线段一样长,因为细面条没有突出来*。但在情境3中,Lou只是简单地把一根细面条放在*B*上进行长度的比拼,并没有与*A*进行比较,然后就宣称:*B更长*。当我们把*C*引入到情境2中时,Lou并未表现出传递性:*无法判断*。

Nad(6;11)的表现说明她并不理解守恒(突出的线段=更长的线段,弯曲的线段=更短的线段)。在情境2中,横线更长,因为要走更长的路。当要求她对线段的长度进行测量时,她只是把面条拿过去分别靠近两根线段,但并不进行比较。在情境3中,*B*更长,因为*A*是像↓,像→,又像↑样的走向。因此,长度被认为是取决于方向的。

Pat(6;4) 相比较而言,她认为情境2中的竖线更长,*因为它从底端走到了顶端*。但实验者做了长度测量的演示后,她同意,*它们是一样长的*。然而,在情境1中(在情境2之后呈现),横线*B*更长。“为什么?”*你可以看出来*。为了证明这一点,她拿两根面条各自放在*A*和*B*两根线段上:当她发现放在*A*上的面条太长时,据此下结论说,斜线段*A更长*。“为什么?”*因为细面条走得更远一些!* 这表明她理解了成人关于测量概念的含义。

Xav(7;4) 当*A*和*B*从叠合变成交错时,并未表现出守恒的能力。在*A*与*B*叠合时,*你可以看出它们一样长*。但当*A*与*B*交错时,*B更长,因为你把它朝前移动了*。“但如果是一只蚂蚁在上面爬行会怎么样呢?“*A更长,因为它后面更突出*。我们使横线*A*保持不动,把*B*与*A*成60°角摆放:*A更长,因为它是直的;走B更累,因为它是一个像三角形样的路,一座山*。在情境2中,*没有哪根更长:两根线段一样长,因为它们都是直的*。在情境1中,*A*(斜线)*更长,因为它是一条更大的路,而且它走上坡路*。在情境3中,*A更长,因为它完全是直的*。Xav并未使用测量工具。

Ean(7;11)在情境2中,可以用手测量,但在互换的条件下不能很好地形成距离的守恒。因此:*B*比*A*更长。在情境3中,*B*更长,*但如果你把它弄长一点*(成直线地弄长些,*那么它们要走的距离相等*。在情境4中,*B更长,因为它有更多的弯曲*。然后,他甚至还数道:*B*有4个部分,而*A*有6个部分,但*A更长,即使它的弯曲更少些*。在情境5中,*B要走的路更短,因为它是弯曲的*。但是当情境4再次呈现给他时,他象征性地拿一根细面条与*A*放在一起,然后又把面条放在一边。对*B*的测量也一样:他比较了两根面条的长度,说两根面条一样长(显然,因为他并没有把面条折断);因此,他下结论说:*A*与*B*一样长,即使表面上看起来*A*要更长一些。

以上这些事实告诉我们关于必然性的某个方面,即决定性(determination)——使用一个概念的充分和必要条件。在长度估计和测量中,决定性主要是数字的或几何的附加量的组合。这种组合决定了测量概念的意义。甚至在我们要求被试采用面条的非数字的测量中(没有严格意义上的测量单位的测量),*A*与*B*的比较也就成了一种量的附

加，只要被试理解了长度A包含长度B加上一个附加的部分就意味着长度B是长度A的一部分。因此，长度之间比较，更一般地说，差异的比较具有同质性。否则，更多和更少就只能指不能进行附加组合的量的差异了。

准确地说，异质性(heterogeneity)是水平1A所具有的特点。在该水平上，长度仅仅是作为形状或方向的函数而被评价，而不用进行任何等级上的划分和附加。因此，Pat估计竖线更长(情境2)，"因为它从底部走到顶端"，这使我们想起人所共知的视觉错觉现象。但大多数被试(Dim、Nad、Lou和Xav)在情境2中起初认为横线更长，因为它是"直的"(Dim)、平展的和"要走更长的路"(Nad)。在情境1中，斜线段有时候被评价为更短(其实它更长)，因为水平线处于优先的地位。但有时候被评价为更长(Dim等)，"因为它走上坡路"，因此是"一条更长的路"(Xav)。同一个被试Xav，对同一幅图甚至得出了某种相互矛盾的结论，这取决于他是否认为"要走多远"(即走得有多"累")，或者它看起来像什么(知觉判断)：若采用前面这个标准，有角度的路途，"山"和斜线就更长；若采用知觉判断的标准，横线就更长，因为它是直的。同样地，在频繁地被采用的所谓的线延伸得更长的标准中(这可能意味着部分和附加的概念)，大多数被试只考虑到了终点，而未注意到起点。因此，他们常常混淆长度的概念和知觉的概念。Xav甚至还说，如果两条线段是交错的，那么B就更长，"因为你把它朝前移动了"(=延伸)。但对一只走在上面的蚂蚁而言(注意力集中于起点)，A更长，"因为它后面更长"。与横线相比，曲线一般被判断为更短，但仍然还是有可能被判断为更长，因为它包含了更多的部分。

这种对长度缺乏附加的组合自然可以解释为，对测量、守恒和任何必然性组合的传递缺乏任何的理解。当给儿童细面条时，他们从不把它当作中间项来利用，而是把面条放在每根线段上比较，好像把线段弄成2倍长就更容易判断似的。但这种做法是完全错误的。事实上，被试常常忽视了一点，即可以把面条折断，以调整其长度，然后比较放在B上的面条与放在A上的面条哪根更长，就像Pat在情境2中所做的那样。因此，A变得"更长"了，"因为面条更突出"。当实验者在情境2中进行长度测量的演示后，被试得出二者长度相等的结论是正确的。但被试并没有把它应用到其他情境中，他(她)们并没有把对某一线段的测量迁移到对别的线段的测量上，而且，由于情境2中的长度测量揭示的只是相等关系，被试仍未能理解其传递性，因此，儿童得出$A=B$的结论，可能是由于其坚持自己的初始判断，而不是通过演绎和对必然性的理解而获得的。

水 平 1B

以下被试在长度的数量方面表现出种种进步。我们将试图找出这些反应的共性。

Nic(6;0)说，在情境1中，*B更长，因为B比A更平展*。在情境2中，他用手指分别沿A和B走了一遍，然后下结论说，$A=B$。"肯定吗？"*我是这么想的*。"你可以用细

面条来确认这一点吗？”*可以*。他把一根细面条折断，然后把它放在A上比拼，然后又放在B上比拼：*A更长*。“肯定吗？”*肯定*。“一定要用细面条吗？”*不，也可以用手指*。我们向他演示了测量工具的迁移：*不过，A和B一样长*。“你怎么知道？”*你把一根细面条同时放在A和B上*。我们引入C（与A，B等长），这时，Nic能应用细面条了。他把细面条折断，使它分别与A和B一样长。当问及A和B、B和C、A和C是否一样长时，他的回答是：“*一样长，我记得*。”在情境3中，他把一根细面条比靠在B上，然后把它折断成与A的各段一样长的小段，但中途停了下来：*无论如何，我已经知道了。B更长，因为它是直的，而且更突出*。在一个类似于4的情境中，B比A更长，Nic用手指沿A，B走了一遍，说：*我知道了，B比A更长*。“你怎么知道的？”*A更曲折，所以更短*。我们把C（比B更长）呈现给Nic：*C更长，我用我的手指可看出来*。我们要他回忆B比A长，C比B长，然后问他C是否比A长。他作了肯定回答，并证明了自己的回答。然而，我们对此可能还有犹疑，是否可以把它归因为真正的传递性。因为这可能只是被试对术语更长的简单重复而已，与他判断相等时的重复（我记得）是一样的。事实上，Nic也确实并未形成守恒。当一条线弯曲成∧时，他宣称，它更长，*因为它是直的，也更突出*。当把这条线复原后，他发现，*两条线一样长*。

Mag（6;8）也未能正确回答守恒问题。在情境2中，她把纸张转了个90°，好像想独立于位置做出判断。她认为B更长，因为其此刻的位置为竖线。然后，她把纸张复归到原来的位置。这次，她却又认为竖线A更长：*可以看出，A更长，它就是更长*。我们建议她利用细面条，她把一根细面条放在A上，同时又取了另一根细面条放在B上，然后比较二者的长度。但是，一旦我们把两根细面条拿走，她又回复到一种矛盾的状态：首先是说A更长，过了一会儿又说B更长。*A最长，我可以看出来，但在正常情况下*（模拟测量），*我知道B更长*（此时细面条更突出），*而当我把纸转了一个90°时，A和B一样长*。在情境3中，*B最长*。“肯定吗？”*肯定，我可以看出来*。“用细面条也是这样的吗？”她把一根完整的细面条放在B上，把另一些或长或短的细面条放在A上，并认为那就是A的长度。*真有趣，这次是这根（A）更长。我刚才说B更长，那不对。应该是A更长。我知道*。我们把细面条取走：*是B更长！*

Syl（6;5）在情境1中，*两个一样长*。“你怎么知道？”*你得看长度*（*而不是方向！*）。但在情境2中，*B更长*（B是横线）。“可以用细面条来证明吗？”她分别用两根细面条放在A和B上进行比拼，并对两者的长度进行比较。*当然，B更长*。实验者拿了一根与B一样长的细面条与A比较：*哦，一样长*。“真是这样的吗？”*看起来B更长，但实际上一样长*。我们引入C来检验传递性，Syl下结论说，根据$A=B$，$A=C$，可以得出B与C一样长：*它们一样长*。“A与B相比较呢？”*是A更长些*。情境3：*B更长，因为A被折断成了好几段，而一根完整的线段应更长*。她拿了一根细面条与B比拼，使其与B一样长，并把它折断成与A中的各小段一样长的小段，但她并没有

进行总体的比较。“这样做有什么用吗?”*是的,可以很方便地看出长度*。情境4:*它们一样长,看起来B更长,实际上一样长*。“你凭什么这样说呢?”*不凭什么*。“凭细面条吗?”她用细面条比拼,但并不进行比较。*A更长。通过细面条看得很清楚*。“你怎么证明它呢?”*用我的手指*(重复她刚刚所采用的策略,不进行比较和附加)。我们引入C,它与B一样长。根据B比A长,C与B一样长,Syl下结论说,C比A长些,这确实是一种传递性,也伴随着守恒:*它们是一样长的,因为刚才是一样长的*(二者叠合)。然而,在情境6中,她报告了从A到B的距离a(即,相等),但她下结论说,*同样的这条路要长得多*(在B中)。因此,她并未对测量的结果形成守恒。

以上处于中间水平的反应同时证明了长度概念被理解为质的形式(水平1A),并试图整合为同质的量化的概念(水平2A),后者服从于量的附加。显然,该阶段还残留有许多质的形式的评价:如果线段是“直的”或“平展的”,如果它们包含了许多部分,则被认为更长(Nic),或者刚好相反,竖线被认为更长(Mag):如果它们由一些小段组成,而不是一根“长的”组成(完整的一节)(Syl),或者没有“弯曲”(Nic);特别是当它们的起点比其他的线段更突出时(这种情况一般发生于情境6中,或者在回答略去的守恒问题时)。

在其他情况下,我们观察到某种试图脱离形式而达于同质的量化的努力。其中,最值得注意的是自发地将手指当作测量工具来使用。这进一步扩展到一种情境的同质化。这也将达到(至少在行为上)对起点和终点的距离同时加以考虑,而不仅仅是只考虑起点是否突出。值得注意的第二点可以从Syl在情境1中的回答看出来“你得看长度”,从而对所要比较的线段的方向置之不顾(然而这种情况并未概括化到情境2中)。Mag的行为也表明了这一点:她把第二张纸旋转90°以比较横线和竖线的长度。然而这并未阻止她产生相同的物体有不同的长度的想法(中间水平经常出现的一种反应):当A在垂直位置时更长,在水平位置时却又更短。至于传递性,当Mag把与B一样长的细面条(情境3)折断成与A的各小段进行长度的比拼时,传递性便开始了(Syl则相反,她不知道如何进行比较)。

这使我们对被试基于实验者所建议的测量而做出的反应加以考虑,这种反应的复杂性富有启发意义。处于该水平被试的第一种极端反应是,只是简单地把细面条放在要测量的两条线段上,但并不移动它们,也不在测量标准间进行相互的比较,所要测量的两线段离得较远,就像Nic一开始的反应那样。但被试轻易就可以认识到,这种程序并不具有必然性,利用手指就可以很好地做到这一点。该水平被试的第二种极端的反应不在于自发地寻求测量标准,而在于当这种测量标准被观察到,以及随后至少是部分地采用时,被试对它的理解。当Nic观察到测量标准从A移动到B时(情境2),他立即理解(但有点惊奇)了:A与B是一样长的,虽然在这之前他将A判断为比B更长。然后,他利用同样的方法来比较C与B的长度。但随后,在情境3中,当该方法可能确实对他有帮助时,他却再次放弃了。在这两种极端反应——从完全不理解到至少部分地理解——之间,我们观察到对部分的整合性极其有利的行为:虽然被试接受了测量的结果,

但这种接受并未排除与测量结果相矛盾的直接评价。因此，Mag从情境3的迁移中应用自己的测量标准，并下结论说："真有趣。这次(*A*)更长了。我刚才说*B*更长，那不对。*A*更长。我知道。"然后，一旦细面条被取走，*B*又变得更长了。Syl则认为，线段的量的长度与线段质形式和方向之间存在巨大的差异，这就是我们前面阐述的两种不同长度测量的尺度标准。她坚持甚至强调这种差异，认为这种差异对于将不同的单个的长度整合为一个同质的整体至关重要：在情境2中，在对线段进行测量后(但由成人来移动测量标准)，她下结论说"看起来*B*更长，但实际上一样长"。然后她又说道，测量长度"比看长度要好"。人们可能会期望，她将优先选择后者，但实际情况并非如此。说得精确一点是，两类尺度概念同时并存，尽管它们相互矛盾，但都被认为是有效的。在情境6中，Syl正确地测量了*A*上的距离a(相对于房子的位置)，同时正确地迁移到*B*。但随后，据此她毫不犹豫地推论说，第二部分的距离b(b是在*B*上的距离，等于在*A*上的距离*a*)，其路程要"长得多"(因为*B*更突出，*B*只有一个角，而*A*有三个角)。因此，Syl对测量实体并未形成守恒，即使她正确地回答了守恒和传递性问题。

中间水平1B清楚地表明，必然性与整合之间存在相当复杂的关系(正如第三章所讨论的那样)。一旦被试寻找同质的测量标准——这是所有长度各种质的形式所共有的(唯一的例外处于水平1A)，整合便开始了。有时候，整合的发展可以通过建议被试进行测量引导出来，有时候也可以自发产生。然而，以上整合的努力还只是部分的整合，事实上将产生两个主要的子系统：形状和方向质的长度系统和服从于守恒附加性的量的长度系统。后者只有在水平1B才开始出现。

水平 2A

7—8岁时，也就是具体运算的初期，儿童开始对量化的意义形成一种普遍的整合的理解，这与黑格尔法则所认为的是从量的变化转变为质的变化恰好相反(黑格尔法则在其他领域中是正确的)。这些进步表现在为确保正确的测量而对转换的概括化，和被试对线性的搜索(将曲折线转换成直线)以及某些外显的附加事例中。

Nat(7;6)开始了水平1B的反应。在一个类似于3的情境中：*A*比*B*更长，但她首先判断*B*比*A*更长，因为*B*是直的；在建议下，她利用细面条，将一整根细面条放在*B*上，又将另一根细面条比放在*A*的四个小段上，但并未在面条上做记号。据此，她得出*A*更长的结论。"如何才能确信呢?"于是她将细面条折断成4段，每段与*A*的4小段一样，然后把它们放在*B*上比拼，毫无疑问这是一种附加程序。在情境4中，她把折断的细面条放在*A*和*B*的各小段上，但她并未把它们组合成可以比较的两条直线。尽管如此，她说：*我努力想象出，如果它们是直线会是什么样子。以前，这样作比较是很容易的，因为线是直的。*这可以解释她为什么把*A*判断为比*B*更长，*因*

为*A*包含了更多的部分。她在情境5中的回答也一样(*B*比*A*更长),但她用线进行总体上的测量。

Ste(7;9)在情境1中,一开始用手来测量长度,并得出了*B*比*A*更长的正确结论。*如果转动这张纸,你也可以看出来:它们在相同的地方出发*(水平参考),*但B更高*。在情境2中,他自发地用转换来测量:*二者长度相等*。*这真让我惊奇:B似乎更长*(众所周知的视觉错觉)。在对*A*各部分的长度进行测量后,Ste把测量标准摆放得与*B*平行:*我把它们排成一行,因为我不能把A打开!*在情境4中,在测量了*A*和*B*各部分的长度后,他把它们排列成两条平行直线。我们又给Ste呈现另一幅图形,情境4中的*A*和包含8个曲折线的*B*:*哦,A更长*。"*A*有几部分组成?"*四部分*。"*B*呢?"*九部分:你得懂我的意思*。*但是这里的*(*B*中的)*各部分都很短,它们加起来甚至还没有A中的一个部分那么长*。Ste理解等量的传递性,但当给他呈现三块不等长、不规则形状的线段时,他却又被弄糊涂了。

Uro(8;4)在情境2中,自发地利用细面条来进行长度的测量。在情境3中,他利用一根细面条,在每个角度上进行旋转,并正确地把各部分的长度一个接一个地累加起来。然后,他将该细面条与放在*B*上比拼的细面条进行长度的比较。"如果你只有一根细面条,而不是两根细面条,你会怎么办?"*哦,那(也)有帮助*。他正确地发现了测量单位并计数。在情境5中,*我想象它(A)是直的,把它拉直,大概有三张纸这么长*。*而B,它可能朝上走到那儿,然后,我把那些和那些*(呈直角的各小段)*加起来*。我们给他呈现两条简单的曲线,他发明了一种灵活的测量:他把食指弯曲地放在曲线上以测量其长度。

因此,作为附加的量的长度概念肯定是在形状和方向质的概念基础上获得的,由此而导致诸多必然性的组合,虽然这种组合还伴随着不肯定性,并且与真正的必然性的组合还存在某种差距。可以发现,与水平1B相比较,水平2A取得了五个方面的进步。最重要的一个进步是,从总体上来说,所有的同质性的比较都是基于长度的单一概念基础之上的。我们再也没有观察到评价随可观察到的知觉判断而不可避免地出现的不一致和相互矛盾的话语。因此,Ste可能会发现,在情境2中,"*B*看起来更长一些",但他不能区别水平1B的两个子系统——"一个人所看到的"长度和通过测量证实的长度。他只认为后者是有效的,而认为前者是一种错觉:"它只是看起来如此而已。"

第二个进步是使用单一的、整体的标准;路途的长远被定义为沿着路途进行测量出的线段的起点与终点之间的距离,而与形状的方向无关。因此Ste在情境1中把纸张转个90°,以使*A*的一个终点与*B*的终点重合,由此发现*B*在另一头更突出。在情境6中,*B*中的房子不再被看作位于*A*的下面,而被认为与终点的距离相等,这可以通过考虑弯曲和忽略表面的突出而被测量出来。

第三个进步是,当所要测量的长度的形式具有异质性特点的时候,被试能通过将它还原为线性加以补偿:"我试图想象出,如果它们是直线会是什么样子"(Uro),甚至还有

更好的表现，Ste在情境3中还对各组成部分进行了测量，在情境4中“把它们排成一行”来比较二者的总长，因为他无法展开*A*和*B*。

因此第四个进步是，我们获得了长度的基本特点：附加的守恒性，它指的是，路途的总长等于各部分的长度之和。水平2A的所有的被试都认识到了这一点。甚至还有比这更好的，当测量工具是作为一个测量单位的细面条的一部分时，长度被看作是测量单位在所要测量的路径上的相邻部分的连续的和累加的总和。

这将导致第五个进步，该进步相对来说似乎并不重要，但从必然过程和测量的角度来讲至关重要。由于长度具有共同和同质性的特点，因此，通过抽象，被试可以理解：如果*A*比*B*长，那么*B*的长度就是*A*长度的一部分，这等于说，$A=B+X$，这里的*X*指的是附加的长度的差异。因此对于Ste而言，“这里（*B*）的各部分很小。它们加起来（*B*中的附加）的长度甚至还不及*A*中的某些部分的长度。”

在讨论水平2B——它将完成水平2A未完成的发展任务——的时候，我们将回过头来探讨在这些进步中的必然性的原因。即使水平2A中的所有被试都形成了长度守恒的概念，理解了简单等量之间的传递性，但他们还是无法理解三个复杂的、不等量的图形之间的传递性关系。

水平2B及结论

在9—10岁，在以下研究的所有情境中，传递性似乎被理解为逻辑上的必然性（除了一两个转换错误之外）。

Mic（9;9）在情境1中，开始评价在两头都有不等突出的长度，并正确地推测*A*比*B*更长[①]，但必须通过测量加以检验，他对*A*和*B*的长度进行了测量并正确地加以转换。在情境2中，他说：*A比B更长，但由于二者的长度差异不大，我们不得不进行测量*。因此，*A*与*B*的长度相等。我们引入*C*，其长度与*B*相等：“那*A*与*C*谁更长呢？”他笑了笑，并立即回答说：“*A与C的长度相等*。”在情境3中，他测量了*A*的前面一些小段的长度之后，与*B*进行比较，然后下结论说，*B比A更长*。在情境4中，*B*比A长。他随角度对测量标准进行转动，并比较*A*与*B*的长度。我们假设*C*的形状为*M*型，他对*C*的长度作了测量后下结论说，*C比B更长些*。我们提醒他说，*B*比*A*长，*C*比*B*长，然后问他*C*与*A*的关系。他回答说：“*显然，C比A更长。这用不着去测量——C就是比A更长*。”

Lil（9;6）在情境3中，把一根细面条折断，使各小段的长度与*A*中各小段的长度对应相等，并将这些小段的长度与*B*进行比较。在情境4中，他多次重复使用同一

① 原中文版为*B*比*A*更长，根据实验开始的图形，情境1中正确的答案是$A>B$，所以应为*A*比*B*长。——编者注

测量单位。很显然,Lil已经具有传递性的能力了,这与Mic是一样的。

这种对异质图形之间的传递性的获得,标志着长度守恒形成的最后阶段,在该阶段,长度独立于任何形式或方向的变化而存在,因此,此时,我们该问一问,这种守恒起源于何处。这种起源使被试能够对附加的、量的长度与质的长度进行比较,同时,它也是被试达到水平2A所观察到的进步的起点。这种长度的量的守恒是必然性n的一个典型例子,因为它对非n的否定将产生矛盾,这正如水平1A和1B中的反应所表明的那样;现在,还需要说明水平2的被试是怎样从这种矛盾中脱身而出的,换句话说,我们得问一问,使被试发现从以前的一无所知到发现这种必然性,其认知或组合的基础是什么。

当客体形式的变化是由于客体各部分之间的替换(就像黏土球测验中的那样)而导致的时,那么,当被试能够理解,在某一点上增加的东西等于在另一点上被取走的东西——当总体不变的问题被替换成部分的守恒问题时,守恒就被认识了。要解决这个问题相对较为简单,因为它是基于简单的补偿概念。相比较而言,当变化是以总体的形式发生而与单个的部分无关但相邻各部分之间保持守恒时(就像一根线,其形式发生变化),只有当被试认识到各部分还是原来的各部分,且各部分之间的联系不变,只是其彼此的方向发生变化时,守恒才算获得。在这种情况下,我们说这是一种可交换性[①]。在这种情况下,守恒的问题还包括从整体迁移到部分,说得简单些,有点类似于这样的事实,即各部分之间的相互联系有助于保持其自身的稳定,整个图形的变化可还原为邻近的,彼此相互联系的各部分的相对方向的局部变化。处于水平1B的儿童是无法理解这些的。Nic坚称,一条直线比相应的弯曲的各部分之和更长,但当后者被打开时,二者的长度实际上是相等的。该被试只是把形式当作一个整体来理解,还不能把它分解为相互联系的各部分。相比较而言,处于水平2A的所有被试能根据位置的替换进行推论:Nat试图把情境4中的角距离想象成一条直线,Ste把作为测量标准的细面条排成两平行的直线,"因为我不能打开(要测量的东西)。"在情境5中,Uro通过把A想象成一条直线而把它拉直。因此,以上每个被试都能够根据部分之间位置的替换来想象整体之间的差异。因此,由于被试能够根据各部分之间的相互联系进行组合,守恒也就成为一种必然性。这就等于把各部分整合为一个可替换的整体,与各部分之间的可相互交换性是相似的。在这种情况下,位置的替代(广义上是一种补偿)对在某一点被取走而在另一点增加的各部分之间起着补偿的作用,这种补偿通过可交换性来刻画。此外,连续各部分之间的联系是整体或部分与其紧邻各部分联系起来的自同构对应的结果,这种联系与方向无关。

测量不仅要求对测量工具,而且要求对测量客体产生守恒(见水平1B中Syl在情境6中的反应)。就其本身而言,它完全依赖于可联结性:不管它是将不规则形状的线还原

---

① 其定义见本章开头。

为直线，还是利用一系列无空隙和部分重叠的相互联系的单元，它基本上能达到对任何形式的*A*与*B*进行比较，而不管其中间项*M*为何。这就需要某种传递性。这种传递性可通过*A*和*M*以及*M*和*B*之间双向的可联结性而产生。这可以解释简单形状条件下进行长度比较的普遍性（开始于水平2A）和随后的，在复杂形状条件下可以对表面形式（水平3）进行长度比较的现象，后者使可联结性的应用变得更难。

这使我们来到最后一个问题：测量的结构方面是否意味着，存在一种有别于结构的必然性的程序形式，或者，更精确一点说，结构是否是必然性的唯一形式？首先，人们可能会假设，只有在可以弥补知觉缺陷的测量程序被发明之后，受其影响，水平1的质的长度概念才能发展成为量的长度概念。

但根据前面的分析，我们的结论与这种假设相反，因为我们的分析表明，只有在长度的概念经历了某种必然性的转换之后，测量本身才是可能的，因为测量要求守恒和传递。事实上，这只是更大的一般性的一个特例：我们需要在产生成功表现的程序和解释这种由主体理解的（成功或失败）表现的原因二者之间做出区分。被试的操作只需要充分条件，并不一定需要必要条件，但对操作原因的理解就包括取决于渐进的、最终达到系统的永久整合，特别是新系统中替代的、完全的整合结构的必然性。在当前这种情况下，我们发现，早在水平1A中，此时长度依赖于形式和方向，两部分就可能总是被准确地判断为相等或不相等，整体总是被判断为比部分更长。因此，尽管各水平之间存在巨大的差异，但对量化加工的发展是持续的。该发展包括最初的、局部的必然性的持续扩展，它是精致加工的结果（对原因的理解）。发展的最后产物是可交换性，后者使得测量成为可能。毫无疑问，程序在心理发展中起着重要的作用。[①]但其具体的贡献是产生新的可能性，而不是产生逻辑的必然性。逻辑的必然性只有通过对原因结构的理解才能产生。

---

① 见B. 英海尔德及其研究小组最近开展的关于一般策略的研究。B. Inhelder, E.Ackermann—Valladao, A. Blanchet, A.Karmiloff, H.Kilcher, J.Mantangero, and M Robert, "Des structure cognitives aux procélures de découverte, "*Archives de psychologie*, 1976, No. 171, pp. 57—72。

第五章　长度的结合性

与 C. Coll 和 E. marti 合作

在处理适合于结合性组合(associative compositions)的必然性这一问题时,我们提出了两个重要的新问题。即使在它们的具体组织中,运算组合也是必要的,但是有两个不同的方面。第一种和结构的协调有关,如群集、群、格等。如果研究这些运算组合的内部必然性,我们所作的只能是重复先前的结构分析。我们一定要避免这种冗余的做法。然而,运算组合的其他一般形式存在于诸如加法或乘法的结合律以及有或者没有交换性的分配律中。对几种结构来说它们的一般特性是相同的,这使得它们具有结构协调性的特征,你也可以称之为预备结构(pro-structures)。[①]例如,用数字表示的加法和乘法的结合条件:$(n_1+n_2)+n_3=n_1+(n_2+n_3)$等。在替代法则中,也可表示为:$a+(b+g)=(a+b)+g$,或者$A_1$($a$=相关类别)$+A_1'$(=$a$剩余的子集和$b$)$=A_2$(=$g$)$+A_2'$(=剩余子集,$1+b$)。最后,我们将在本章中研究长度加法的必然性。这些预备结构有自己合适的封闭性,或者如Bourbaki所说的运算的稳定性:当与其他条件组合时,一个三元素的结合性系列就会产生另一个结合性协调。因此,为了方便起见,我们将用4或者6成分的长度系统,且为获得那些预备结构的必然性而变动它们的形状,这些必然性就是我们第一个新问题的研究目标。

这个问题会带来第二个问题。如果由不同部分相加得到的结合性组合会得到封闭系统的守恒性,那么我们必然要问,是否系统的守恒性是成分的守恒性的必要条件,或者说两种过程是否在相反的方向上进行。前一章已经证明了用于限定一个基本长度概念的标准的异质性。这恰好证明了假设的确切描述,根据这一假设,当结合性整体的成分朝向不同的方向时,结合性整体的守恒性在其成分的守恒性中就起着支配性的作用(因此这个整体会被分成不同的子集,这些子集保留了其顺序和数量的恒常性)。更确切地说,成分是指构成图形的各种长度不变的线段;部分指成分的可变化的亚构造,它形成图形的内部子集;而整体则是指所有成分的总和以及与之同义的所有子集系列。然后我们要问的是,当变动部分时,整体的守恒性是来源于成分的不变性还是其他途径;或者,另一种说法,两个是否是同时进行的——部分的变化妨碍了成分和整体的守

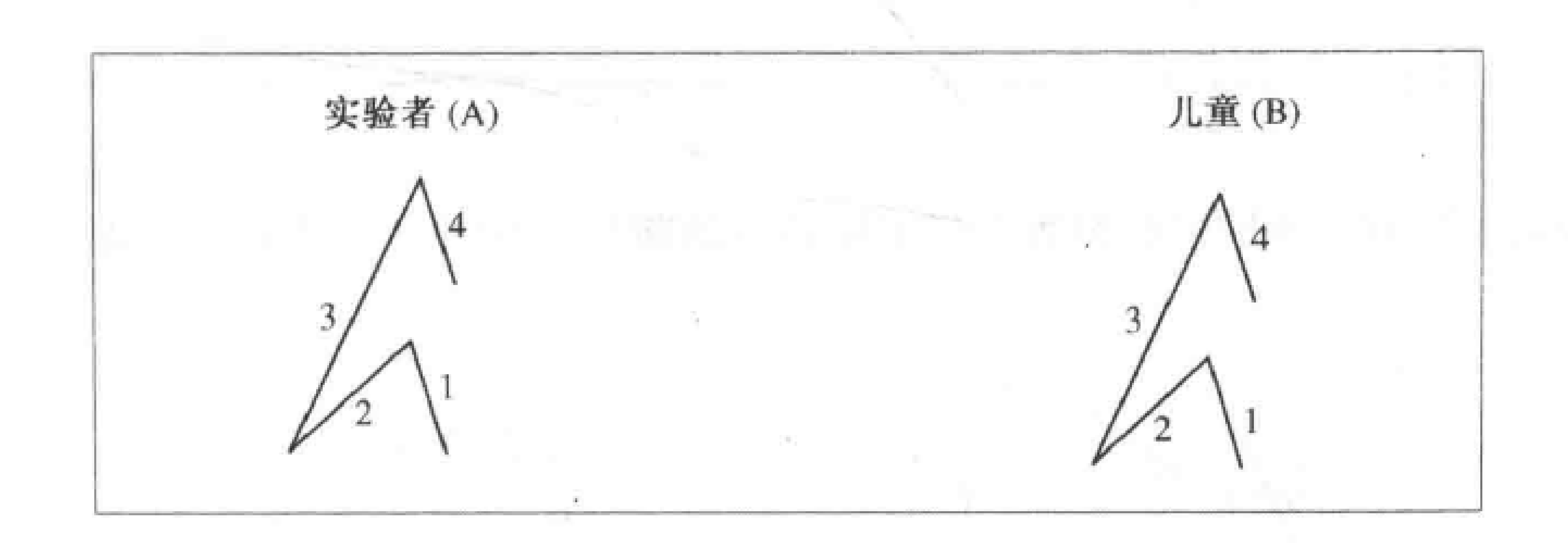
① 这里的前缀pro是指预备之意。

恒性。

除了这些关于结合性的一般性问题外，我们还引入了补偿的问题。这使得正确答案出现得相当早这个事实更加有趣，正如第三章所描述的那样，这和水平2A（7—8岁）是一致的：长度是作为一种同质的、可相加的量来构建的，这与根据形状和方位来评估的定性长度是相对立的。我们关于补偿的问题的新颖性如下：当我们希望从一个相同的整体内部区分出不同的部分时——例如，$(A+B)+C=A+(B+C)$——我们不能简单地使用直条来表示这些部分（AB/C 和 A/BC），而是用分隔符来表示（$AB\cdots C$ 和 $A\cdots BC$）。这样，主体就能在内心进行部分的相加——在某种程度上，可以进行推论。因此，这就避免了由线段 *A*，*B* 和 *C* 的邻近而造成的知觉易化。当我们整个运算的成分和部分都发生了方向的改变时，这种加法运算的困难就增大了。

方　　法

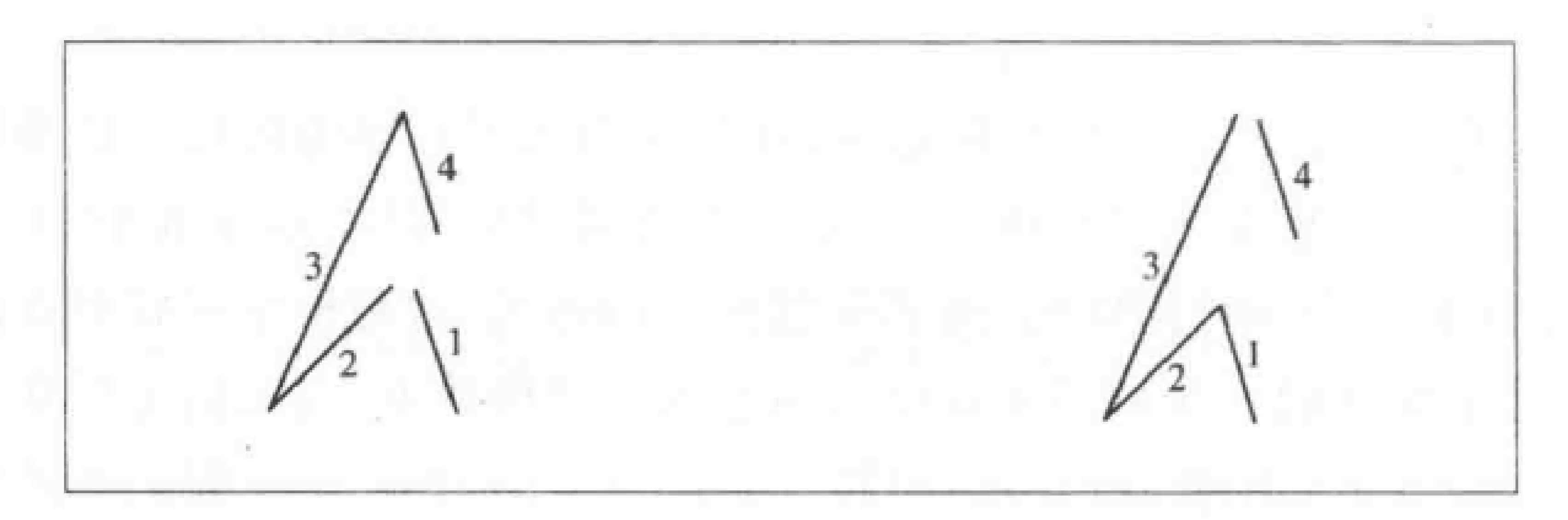
我们运用两种补偿方法。第一种在于给被试呈现一定数量的、长度固定的各种线段（用针和线连接在一起）。我们称之为栅栏。起初，试验者和儿童都会得到这样一种栅栏，两个同样的开口和连续的图形（没有间断）。其中一个在位置、长度等等方面都是另一个的精确复本。稍后，实验者把她的图形在一个或者两个地方断开，从而在她的整体中就形成了不同的部分；然后她对被试的图形作同样的事情，但是选择不同的地方断开，从而产生不同的部分。然后，问儿童，原来完全一样的两条路径长度是否仍然相同，如果相同，为什么。



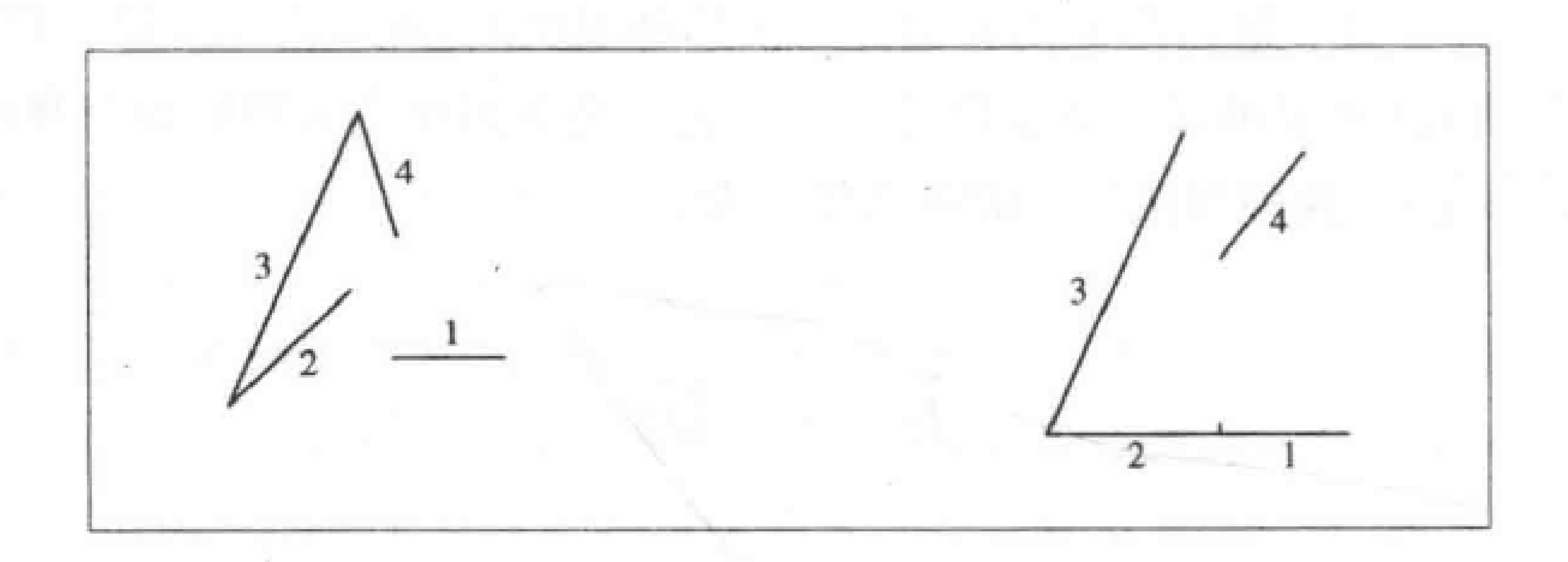
每条线段的颜色不同。*A* 和 *B* 两个栅栏是完全一样的。这些栅栏当着儿童进行构建，儿童要比较每一对线段。然后接下来的问题是：如果我在这条路上走（用手指描述整条路径 *A*）而你在那条路上走（用手指描述整条路径 *B*），那么我们走的长一样还是我们其中一个走得更长或更短？

实验变化（在下列情形中问同样的问题）：

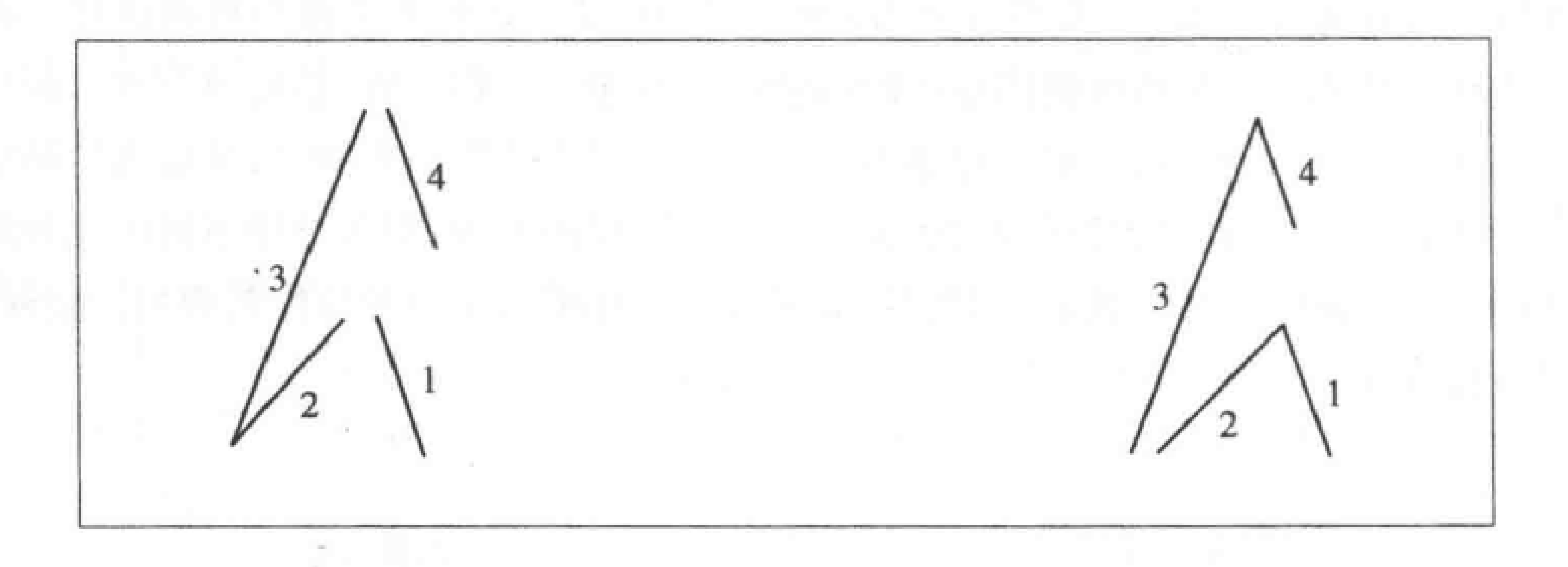
A-1。在不同的地方进行相同数量的断开：



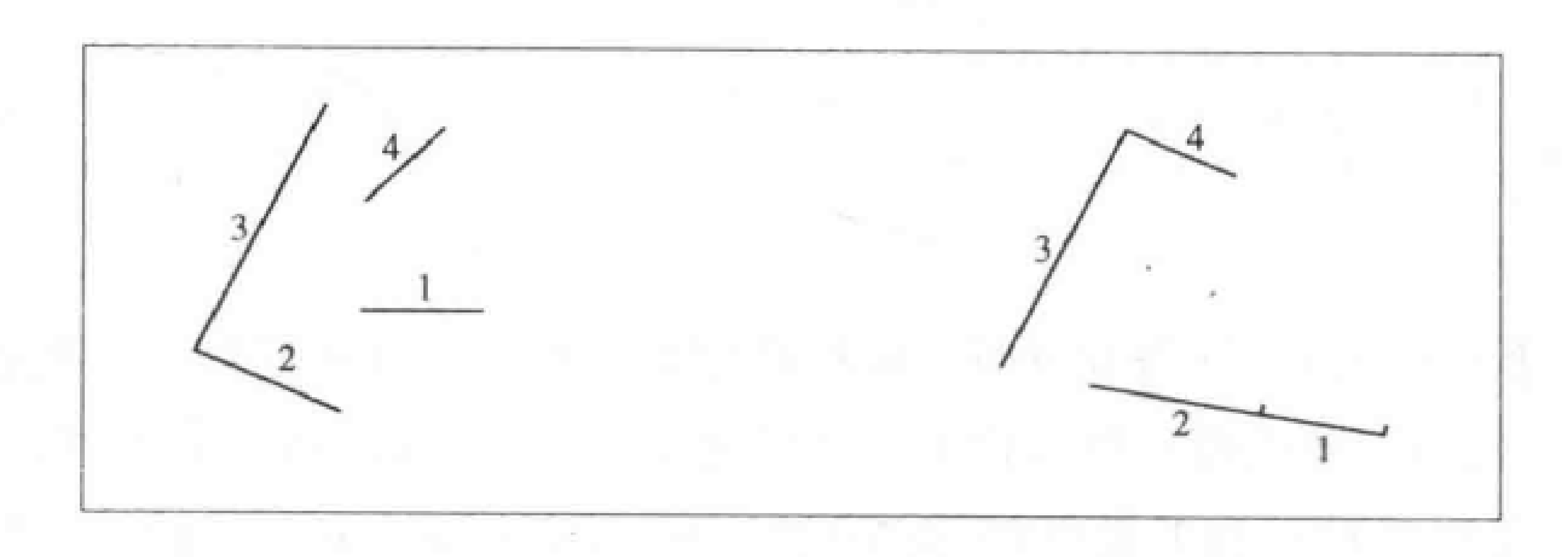
A-2。改变图形中成分的空间位置：



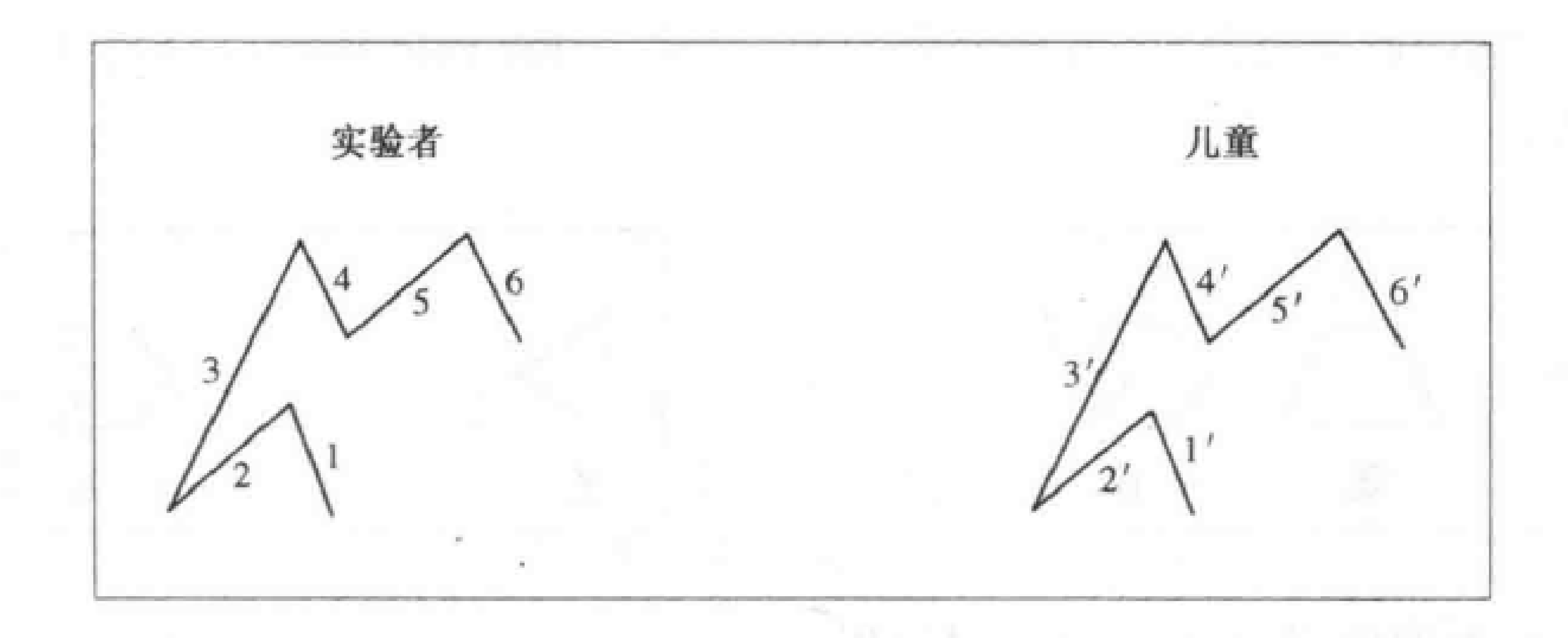
B-1。在两个图形中进行不同数量的断开：



B-2。对每一个图形的组成进行不同数量的断开和不同的空间位置变动：



对于一些被试，我们采用一个较短的试验步骤。首先，儿童注意到两条线长是相等的(试验者和他自己的)，这些线是用一些针连起来的相同的锯齿形：



在整个实验部分，任务始终是判断在不同情景中，两条栅栏长度是否相同，然后采用第一种变化：每一个栅栏在不同的地方断开一次（例如，看 A–1）。以后重复这种变动，但可以使其中一个栅栏断开的地方更多（例如，B–1）。

第二种方法和第一种方法相当不同，因为它用了围栏（封闭图形）。图形变式包括种种开口或变化形式。同一条线经历所有的变化但总的周长是保持不变的（如 7 岁的 Cat 所说的，“那是同一条绳子，只是形状不同：是的，绳子不会越变越短或者越变越长”）。从结合性相加（associative additivity）的观点来看，以下加入的新问题会更复杂但很有趣：三个形状不同的封闭图形，A，B 和 C，其中两个组合成一个新的形状单元（$A+B$ 的长度）；这三个图形在相应的组合中保持独立。这样问题就出现了：$(A+B)+C=A+B+C$？但是无论这个任务和那种栅栏任务如何不同，两者都包含了具有结合性特征的必然连接：假设两个整体，T 和 T'，由相同的成分 E 和 E' 构成，这些整体能被分成不同的部分 P，既然 E 经历了 P 部分的变化后仍保持不变，那么 $T=T'$ 是否仍然正确？两种任务不仅包括空间的变化而且包括方向的变化（要不然，只有一条单向的直线，问题通过简单的知觉就可以很容易得到解决），以及封闭图形的形状变化。但是，既然这样，$T=T'$ 这个问题仍是相同的，且正确答案因为不太明显会更有价值，也会更有趣，因为它们和长度概念无定性的标准那种水平相一致。

在情景 1 中，呈现两个相同的封闭图形，由 4 条 10 cm 长的线段构成，颜色各不相同；然后，对开口作某种变动。例如：

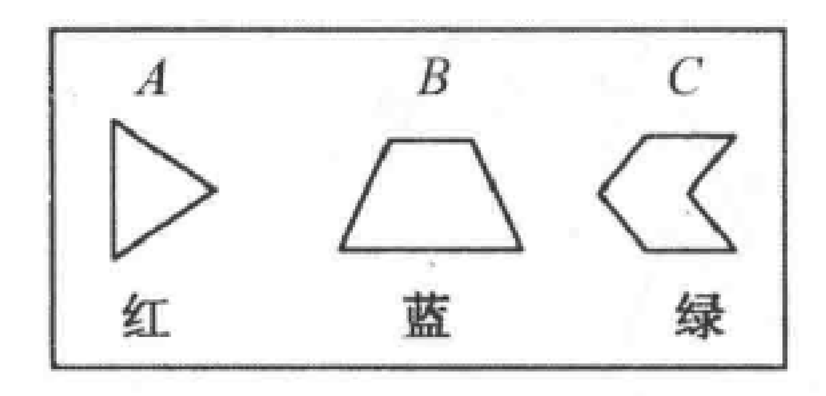
= ?　(a) = ?　(b) = ?

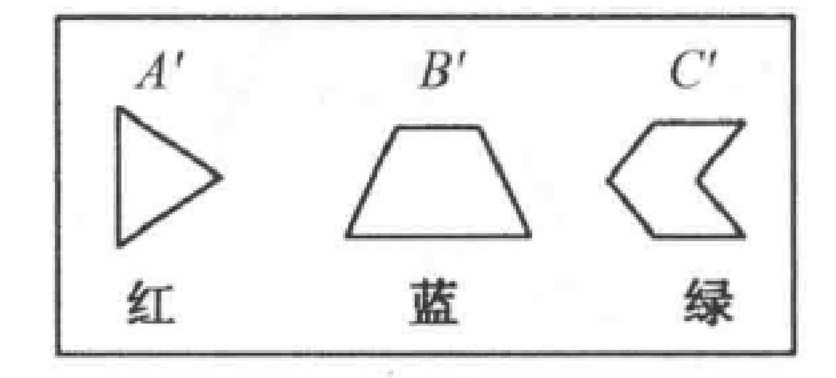
(c) = ?　(d) = ?　(e) = ?

在情景 2 中，对封闭图形做改变，例如：

= ?　= ?　= ?　= ?　= ?

在情景3中，长度组合，开始有六个图形，组成三对相同的图形(颜色相同，长度相同，形状相同)：





我们探讨下面的组合：$(A+B)+C=A'+B'+C'$？

例如，

$+C=A'+B'+C'$？

$(A+B+C)=A'+B'+C'$？　例如，

$=A'+B'+C'$？

$(A+B)+C=A'+(B'+C')$？

例如，

$=C=A'+$ ？

构建栅栏

水　平　1A

水平1A长度特征的不同和矛盾的对比(如第四章所指出的那样)自然会再现相加困难——把独立的部分连接起来。因此水平1A的特征仅仅是被试完全没有意识到这些矛盾，且缺乏加法意义上的任何定量的长度概念。

Jul(5;2)在A-1中已经否定了起初完全相同的图形是相等的：*我的较长，因为它是那样的*[断开(1)十(2+3+4)]*且我的在这里没有隔开*(3和4之间)。"如果你不把门算进去呢？"Jul用手指比划两条路的总长。*是的，它们一样长，因为你的是那样的，我的也是*(指出整体轮廓和角度，然后指着两个端点)：*你的圆形几乎是在这里，我的也是*。我们给出部分分别为(1+2+3)+4和(1)+(2+3+4)两个围墙的成分，

平行放置，但直线不在一条线上：*我的长一些*（*伸得更远*）。我们把它们排成一行：*现在，它们是一样长*。我们进入情景A-2：*那个长一些，因为它的门很多*。我们把实验者和被试图形的四个成分排成四条平行线，以（1）+（2）和（3）+（4）分成组：*你的长一些，因为你有许多弯，而我只有一个*。他把3排除了，但是（3+4）要比（1+2）长。然后实验者把自己的线段排成一条长的直线并要求被试也那样做：Jul的起点和实验者的相同，但没有作如何测量的尝试，他把（2+3+4）排成一条连接起来的线，使得这条线成功地超过了实验者线的终点：*是的，我的更长，因为我的那条线的终点在这里*（正如由他预先就决定的）。

Pat（5；2） 由三个成分组成的简单图形（有一条延伸基线的Z），Pat指出，对于各个图形中的1和2之间的空隙与2和3之间的空隙而言，*它们是相间的*。但问及她是否能使她的线更长些时，她把空白去掉，把各个成分排成连续的图形（ ），说这样一来，*路人就不会停在这里了*。

Cri（6；1）能较好地理解起初两个图形是一样的，因为它们走起来时"围墙"是一样的。但是只要图形被断开，他就会提出速度的观念，出现以下矛盾：*如果在这里断开，它会走得更快些*（跳）*并继续走那一段*。或者，如果那一段没有隔开，它就不会同样快，*它只是一直走下去*（没有必要停顿）。其他一些标准：*当它全都是直线时会走得更远些*或者取决于端点分开得有多远。

Oli（6；2）认为如果*洞洞越多*，要走的路就越远，但是不知道原因。稍后，他又提出相反的看法，也没有任何理由。他只考虑了分割点而没有考虑端点之间的距离（成分与成分或者部分与部分之间）。

类似地，Pra（6；2）指出初始的两个图形的长度是相等的，甚至用线段来说明线段；但是对于B-1情形（只研究了这一情景），他指出，*你的长一些，因为你的有更多的洞*。后来，他又说自己的更长些，但没有给出理由。

既然第四章已经详细证明了定性长度的各种矛盾形式，这里就没有必要给出更多的例子或详细的描述。这里出现的新东西是，对于被分割成的不连续的线段之间或形成角度的连续线段之间的对比需要加法。值得注意的是，被试的反应中没有采用加法。无论是相等的反应（在同一时间呈现给所有的被试总体形状相似的图形）还是不相等的反应（到目前为止是最频繁的反应）。加法缺乏的原因是，被试认为此处的断开不能决定定量的长度和标记边界线，而只是干扰了道路的连续性，最终影响行走的速度，或者简单地决定组成的数量，而没有成分与部分的区别。

对于非添加性，Jul起初认为，由于共同的行动所以两个图形是相等的（"你那样走，而我也是"），且当两个图形的终点聚在一起时（几乎都在这里）这两个图形也是相等的。但是当我们把这些组成排成一条线时他随后否定了图形是相等的，且加法被降为一种简单的、知觉性的阅读。对于分割点，当要求被试加长他们的道路时，他们通常会

把断口去掉，因为如Pat所说的，路人在这条路上“不用停下来”，或者如Cri说的，它“一直下去”：因此，连续性变成了长度的一个指标，特别是“当它都是直的”时候。也有相反的意见：分割点可以看作是把道路加长了，“更多的洞洞”暗含了有更多的块块。还有许多其他的标准，如，判断不相等的标准有开口的程度，覆盖的表面，终点；或者，判断相等的标准，终点，分割或者组成的数量。但是一致性地缺乏加法，这和第四章所指出的缺乏定量长度的概念是匹配的，也和标准的多样性是不连贯的。

水 平 1B

水平1B的新反应是不再简单地把断开看作是改变了连续性，而是划定了长度的界限，因此就易于进行相加。然而，使整体守恒的加法仍缺乏部分与部分之间的补偿概念——换句话说，理解这种事实，即一部分的增加总是伴随着其他部分的减少。这样的理解会使出现的添加保持守恒。

Ovi(5;3)开始时认为A-1中的两个图形是相等的，*因为它在这里和那里分割*[(1+2+3)+(4)与(1)+(2+3+4)]。但是他改变了主意认为他的图形比较大：*那是较大的一块*(2+3+4)，*而那一块小*(1)，*在你的图形中，也有较大的一块*(1+2+3)*和一小块*(4)。当然，这似乎是补偿的一个例子。当问到那是否是同一个整体时，他似乎同意：*是的，我认为是这样的*(不太确定)。当问到能不能使其中一个变得更长时他又退行了：*与那个一样*(他把4和1+2+3序列连接起来)，*现在它变长了*。类似地，在A-2情形中，他否定了相等性，因为*左边的图形有更多的断开*。“怎样做可以使它们一样长？”*你把这里和那里*(1+2和2+3)*放在一起*(没有相加的表达)，*保留那个不变*(3+4)。

Fra(6;3)否认A-1中图形的相等性，因为*你走了*(2+3+4)，*而我走了*(4)*和*(1+2+3)，*而那个*(1)，*你没有管它*。“但是我走了整段路。”*那不一样，因为你在这里分开了*[(1)(2+3+4)]，*那就下很长了，而这里*(1+2+3)*是长的*。“但是所有的那些都是在一起的——难道不一样吗？”*不一样，如果你把那个*(组群)*和那个*(独立的成分)*放回原处就一样了*。“*如果保留那些断开呢*？，*那就不一样了，因为*(在一边上)*你把那一块放在这里*(2+3+4)，*而我这里只有那个*(4)。这种看法持续了一会儿直到问他：“如果我取那一块，也取那一块呢(如，整个图形)？”*那就一样了*。Fra最终退让了。但很快他又矛盾了，指出，如果又有一个断开，*那样就短了，那就不一样了*(总长)。在B-2情形中他似乎恢复了理解力，指出，在这种情况下是相等的，如果两个断口*不在相同的地方也不会改变任何事情*。但是随着在一边断开的越多，结果成了*我的较长*。当实验者把她的四条线排成一行(1+2+3+4)并要求Fra也做同样的事情时，她沿(1+2+3)描了一条线并加上4。整体显得相当长(和Jul在水平1A的

一样)。

Xan(6;8)认为A-1中的图形是相等的,而且对于相等性做了一个评论,这值得引用一下:*你不会有这样一个图形,它和另一个一样而又不是另一个;它们两个必须是一样的,否则你就不能做到*。对于六成分的图形,我们在一个图形的[(1)+(2+…+6)]之间插入一个断开,在另一个图形的[(1+…+4)+(5+6)]插入一个断开:他把这些部分分为,*这里是小的(1)*,*大的*[(1+…-|-4)],*这里是最大的*[(2+…+6)]。指出一个断开使得[(1)+(2+…+6)]变小了(在一部分上)和变大了(另一部分)。不过,图形[(1)+(2+…+6)]比[(1+2)+(3+…+6)]有更多条线:Xan提供了一个补偿的所有成分,但是并没有坚持到底,因此他的加法仍然是不守恒的。

Dan(7;8)对于同样的问题出现了类似的反应,根据大小相似的片断对部分进行分类,并通过谈论成分和每一图形中分割的奇特处之间的一致性来肯定相等性,[(1)+(2+…+6)]对(1+…+4)+(5十6)]。但是当我们在他的图形中加一个断开时,*这使得我的图形更大、更长*。"但是整条线是怎样的?"*我的更长些*。"你能安排一下使得它们同样长吗?"*能,这样摆*(封闭)。后来,他把所有的线都变为原来的封闭状态。

相对于水平1A被试而言,这些被试的第一个进步是不再简单地把断开看作是造成了中断,而是看作划定了部分的界限,而这些部分在长度上发生了变化。结果是被试经常运用加法,这依赖于成分是"放在一起"(Ovi)还是分开的;然后这些内部的群体被分成较大的或较小的,中等大小的或小的。第二个进步产生了一个问题,这是关于结合性的主要问题:如何来解释两个整体必须彼此相等,因为它们由相等的成分构成,那么当比较两个图形时,或许也包含了长度变动的部分(加入分割)。

事实上,结合性可以比作类的置换:由相同成分构成的相同类能够用各种方式分成子集,这依赖于所用的标准。如果是那样的话,整体的守恒性就不会出现任何问题,因为这些亚分类不是定量的,因此不要求米制的或数量的补偿。相反,结合性是一个定量的置换,因此部分的任何变化就要求在某些部分上增加补偿而在其他部分上相应地减少。当Xan说一个分割"使得(一部分)变小而(另一部分)变大"时,他似乎理解了这些,甚至理解得很明白,但是尽管有对同类的不同直觉,这些被试仍然缺乏对补偿的概括能力。即使被试通过成分的添加而一致接受整体的守恒性,只要图形消除分割(当整体是"封闭的",Dan指出),但是对于这些被试来说,部分的总和还是不等于整体。在这种情形下,加法不再守恒。

水平 2A

7—8岁对应于第四章描述的长度守恒中涉及的加法水平,被试能够进行部分和部分之间以及成分和成分之间的相加——这两个现在可以共存。这以逻辑必然性的形式

建立了结合性。让我们先来看一下居间状态的案例。

San(7;5) 呈现由六个成分构成的图形,分别被分成[(1)+(2+⋯+6)]和[(1+…+4)+(5+6)]:*是的,那是相同的,因为我们做了相同的断开*。我们把第二个图形的空隙拉大。"现在它开口更大了,但是没有线被拿走吗?"*不*。"还一样长吗?"*不,这里有更多的线*。"为什么?"*我不知道*。"给我看看整条线。"*不,我们没有相同的线,这里*[(1)+(2+…+6)],*这里更多*。而后她改变了主意。然后我们给出[(1)+(2+3)+(4)+(5+6)]对[(1+…+4)+(5+6)]。*它仍然是相同的……你的有更多的(部分),但是它们比较小,我的部分较少但是它们都比较大*。这样,证明她理解了补偿。

Sof(7;4)在成分相等的基础上建立了整体的相等性。当考虑部分时,Sof说:*我赢了,因为在我这边的两块较长*。但是当呈现另一个组别[(1)+(2+3)+(4)+(5+6)]作为[(1+…+4)+(5+6)]的对照时,*它是相同的,因为以前我们有相同的门。而门(断开)不能改变任何东西*。

Pie(8;2)对于同样的问题——[(1)+(2+…+6)]和[(1+…+4)+(5+6)]——说:*相同的计算但是不同的长度(!)。我的这边在这里(在起点),比你的更大。但是你把它们放在一块,所以长度还是一样*。接近结束时,他理解了补偿:*与我的小终点相比,你的终点更大,我的*(1+2+3+4)*比你的大。两个是相同的*。

这些被试遇到的障碍是缺乏对"部分"之间的理解,随后他们通过补偿克服了这些困难。这些最终导致了整体守恒性的建立。在接下来的被试中,守恒性迅速出现或几乎是迅速出现。结合性偶尔是清晰的。

Yve(6;10)在犹豫了一会之后[三成分的图形]:*哈,那是一样的*,(1+2)和(3)与(1)和(2+3)*所做的是一样的,是的!* 类似地,对于四个成分的图形,她立即同意[(1+2)+(3+4)]=[(1)+(2+3+4)]。

Rim(7;0)简单提到守恒性:*我们拥有的是一样的,因为我们没有拿走任何线段,且因为你有*[(1)+(2+…+6)],*而我有*[(1+…+4)+(5+6)]。

Phi(7;4)做出相似的回答:*我们只是移动了一些东西,但没有东西被拿走或加入*。对于一边有四个部分而另一边有两个的图形:"那个奇怪吗?"*不*。"你的图形有更多块(部分)吗?"*是的*。"因此这里的线更多?"*不*。

在这个最后的水平,部分的加法因此变得和成分的加法一样自然:在两种条件下的加法都是守恒的。当他们意识到部分和其连接所用的都是相同的成分时,被试就能一直理解两个系列的汇集了。加法过程成为可推论的,不再受观察到的可知觉的断开的数量支配。但是在验证什么样的必然性形式导致了这些进步之前,我们将看看这种情形,即结合性不是关于一个开放的线条结构的片断问题,而是由初始的封闭图形转变到有或者无结合的开口图形。

封闭任务

材料是由四个10 cm长、颜色各不相同的线条组成的，通过大头针连在一起的图形。

水 平 1A

我们已经知道这里所观察的反应，这是由形状、方向和开口所决定的定性的长度。回到这些上面似乎是有用的，因为某时栅栏任务的结果是造成了不理解而不是指导性反应的印象。

Isa(4;5) “用这条线(四条悬挂的线,1),我们围成一个形状(正方形)。它的大小还和以前一样吗(展开的线条)?”*因为它是正方形,所以它变小了。*“为什么变小了?”*因为以前这里没有正方形。*“像那一样吗[一个细小的开口(a)]?”*大一点,因为它不再是一个真正的正方形*[(b)]。*较大,因为你把它打开的更多。*“怎么做会使线变长?”他立即画了(c)。“但是所有的这些和所有的那些呢(我们沿着两条路)?”*在它变大之前,它像那一样*(直线)。稍后,长方形比正方形大,*因为它是一个较大的图形。*

Fre(4,10) 我们给儿童和实验者建构了情景3中的三种模式。使Fre认识到三个构成相同的路径。我们把前两个合成一个大的长方形,保留第三个不动。儿童的三个保持独立不变:*你的图形最长。*“为什么?”*因为有这个和那个*(已组合的),*我有三个*(指着它们)。我们把1和2组合成一个正方形,并对儿童的序列也做同样的事情,但是用2和3,在两种情形中都有独立的部分(成人的是3,儿童的是1):*那是你的和我的*(如,正确认识到这个路径的相等性)。之后,我们用1和2构建一个正方形(3独立),而给儿童用2和3构建了一个长的三角形(1独立):*我的长。*然后我们构建了各种封闭图形,每一个都包括了所有三个成分。每一次,被试都认为是不相等的并支持长的图形。我们进行到情景1。Fre和Isa在开放图形中的反应是相似的。但是当斜线定位到正方形内部时,路径就变短了(在两个短暂独立的情形中)。

Ria(4;7)认为正方形的口朝外会使周长变长,一条边朝向内部没有影响,但是两条边都朝向内部就会使周长变短。

Dan(5;8)对开口的正方形做了同样的反应。“怎样使它变长?”*把它们都排成直线。*形成几乎不改变线段方位的一个角,这样一种分割也会使它变长,*因为我们把*

*它隔开了：现在它成了几块了。*情景3：线段1–2构成一个正方形而3独立就会使它比1+2+3更长些，*因为你有一条长的线，你把它们混在一起了。*"如何得到相同的路径？"*我把1和2连在一起，而把3留下来。*

Mic(5;7)认为，*如果你把正方形和长方形像这样放*(两条线的纵向长度)，*它们就是相同的，但是，如果你保持那种形状，长方形就长一些，因为它的底边长。*我们把他的正方形变成各种形状的长方形。最长的总是有一条边最长的长方形。情景3：1和2部分构成一个正方形而3独立，与1独立而2+3构成一个长方形，判断结果为后一个较长，因为它的底边长。

Sca(5;8)认为一条边向内开口的正方形比封闭的正方形要长，但是比一条边向外开口的正方形短。

值得说一下Tep(6;7)，因为他似乎很自然就解决了情景3中的问题：一个长方形(1+2)加上独立的3，与独立的1加上(2+3)构成一个六边形是一样长的。"为什么"*我们用两个构成一个大的，而用一个构成一个小的*(这或许是水平1B的补偿的开始)。但是长方形(1+2)比(2+3)构成的长方形要长一些，而分开的3比分开的1要长，*因为它是一个长方形而它有一个项。*事实上，在两种情况下并不存在定量的相等，有的只是整体的单一形式，而表面的补偿只是图形上的。

这些反应和前一部分中被试的反应的共同点是都缺乏对成分或者部分的加法。在情形3中，被试并没有对比(1+2)+3和(1+2+3)，从宽泛的意义上来说这只是结合性加法的一种形式。相反，除了Tep，原因我们刚才已经看到了，他们对自己做出的前一个连接较长的判断很满意，因为它包括了一条"长线"(Ria)。当前两个成分(1–2)和后两个成分(2–3)用不同的形状连接起来时，他们否认了相等性。因此Fre认为第二个系列(一个长方形)，比第一个系列(一个正方形)要长，因为长方形的底线比正方形的底线长。

当联合的部分在两条边上都是相等的时候，他们就会认为是相等的[Fre说："你的和我的是(一样的)"]。但是形状的一致性足以解释这些判断，并不必然涉及部分长度的加法。

对于那些分割，他们和该水平的被试在先前任务中的反应是一样的。在两种情况下，他们都改变了总长。但是在当前事例中出现的一个不同原因是：对于封闭图形，一个分割导致方位的改变。事实上，如果正方形的一条边在一端分开，那么就有两种可能性：它或者指向外部，从而导致长度的增加(参看Isa在情景1中对于变化的连续反应)；或者指向内部，从而判断总长变短或不变(Fra和Dia)。封闭图形组之间的对比证实了一条边长的决定性作用：对于儿童来说，在对比的情景中，只要一条边明显地比另一条长，就可以充分得出该图形较长的结论。图形总的大小也明显起到了部分作用(如Isa说长方形是一个"大的矩形")。但是儿童并没有很好地把图形的周长与图形的横向长度区别开来。

水平1B和2A

在水平1B,我们发现了和前一水平任务中所描述的相同的冲突,即在伴随第一种补偿形式的加法和决定不相等的因素(诸如形状和方向等)之间的冲突。

Tar(5;4)在情景1和2中,起初出现的是水平1A的反应,但是在情景3中,当一个图形是由(1+2)构成的一个正方形和(+3)独立,而另一个图形是(2+3)构成一个长方形而(1)独立的时候,Tar立即通过补偿完成了加法的判断:*因为我有一个大的图形(2+3)和一个小的(1),而你也有一个大的图形(1+2)和一个小的(3)*。"所以如果从整体来看,那是相等的?"*是的*。"你不是告诉我说这个长方形(2+3)比那个正方形(1+2)长吗?"*是的,(因此)我比你的长*。

Gil(6;0)在情景1中作了水平1A的推理。在情景2中,Gil对分别由等长的10cm线段构成的一个正方形和一个长方形进行了比较:"长还是短?"*一样的,我看到两个的长度是一样长的*。"那么现在呢?"*不,不,我们的线不一样长:一个正方形,比一个长方形用了更多的线*。相反,在情景3中,(1+2)和(3)构成一个长方形,和独立的(1+2+3)构成的长方形:*这些形状更多,但是它们是等长的*。然后,*不,你的更长……不,两个一样长……如果你把我的所有线段放成那个形状(长方形),一个就不……是的,它们是一样的*。

Aur(6;2)出现了冲突的两个极端。她开始时在情景3中取得了成功:把(1+2)+3和1+2+3进行对比,指出她的更长因为她没有*把它们放在一起*,这使得她有更多的片断。但是很快她就提出校正:*我们走的长度是相同的,因为它们有相同的成分,两个图形都包括了1,2,3*。但是,当比较长方形和六边形时,由于6>3,她退行到认为两者是不相等的。

Ago(6;4)在情景1中,断开并没有改变长度:*你只不过是把线动过来动过去,而它们是一样的*。在情景2和3中取得同样的成功:*那个(他的1),我同意它比(1+2)构成的长方形小;但是我加入那个(右边的3)和那个(在左边),它们就是相同的。我聪明极了!* 但是当问他成分1,2和3(两个图形)的长度是否相同时,他先是否认,指出不相等,错误地认为直线证实了这种不相等:*它们的大小是一样的。那你赢了我!* 这显示了整体的守恒性先于成分的守恒性,甚至当结合性的部分进行了正确的相加时也是这样:(1+2)+3=(1)+(2+3)。

Sco(6;10)相当接近结合性相加。在情景3中,(1+2)+3=1+2+3,*我们两个的是一样的(长度),因为我可以做出和你同样的事情(图形)*。因此,在这个原则上他理解了数量置换(分配的变化),但是他仍认为,*如果你把它们都钓在一定,你有的就更长,如果你把它们分开,它们就不再相同了*。这恰恰是失败的加法。

Cat(7;1)在情景1，*它们是同样的线，但是长度不同*。11个变异上的矛盾使得她发现了定量长度。*它们的长度是一样的，只是形状不同：是的，线不可能越来越长或者越来越短*……然而，在情景3她得出结论，*如果你把它们连起来，总长是相同的*(部分和成分)。*如果你把它们都放在一起，它们的长度是相同的，否则，你的就长一些，我只有一些小块*。这里被试只是明白了具体实物的相加，但是还不具有独立成分条件下的推论性加法。

Gue(7;1)在两者之间犹豫不定。在情景3中，对于(1+2)+3=1+2+3：*我的更多。不，不，它们是一样的，因为它们都是这两个的和*(1+2的和)，*这和那种*(1和2独立)*是一样的。如果它们不在一起，你也有两个*。相反地，如果你把独立的部分连在一起，通过把部分相加而不仅仅是成分的相加，你就可以得到相同长度的部分和整体：(1+2)+3=(1)+(2+3)。当把(1+2+3)构成的多边形与分离的图形1，2，3对比时，它又退行了。

Ani(7;8)和这里所描述的其他被试一样，在情景1中的反应仍不具有守恒性；但是在情景3中立即获得了成功，依据两条理由：*我可以*(用我的组成)*做和你一样的事情，所以它们的长度将是相同的；因此我们拥有的是相同的线*。

Fri(7;0)在情景1和2中都失败了；在情景3中，起初相等性受具体连接的支配，*如果你把它们连在一起它们就是相等的*。随后有了一个突破：*因为以前，这些线是同样长的：如果你把它们按照不同的顺序摆放*(=不同的分配，不是连续的顺序)，*它们的长度总是相同的*。

在进入全面讨论之前，让我们再举两个水平2A的例子(7—8岁)：

Jas(7;11)：在情景1中，*长度总是相同的，但是形状不同。或者它们是相同的，除了有一块分开的之外。如果你把它拿出来*(图形中的)，*那么你的就少了，但是*(如果你把它放在里面)*它们就是相同的*(尽管有开口)。在情景3，*线的长度是相同的，我可以用我的线制成*(你的图形)。

Pha(8;0)在情景1中，*长度总是相同的，因为你*(开始)*做了和我的一样的正方形*。在情景3中，*如果我把这两个组成放在一起，它就和你的图形的长度一样了*。

在水平1B，我们看到了加法的进步。这个进步表明：在对比中(如Tar所作的，然而他并没有坚持下去)以及实质性补偿或者定量置换的特殊形式中，都认识到，个体可以改变自己的图形并能做出与其同伴相同的形状——独立的部分能够"连在一起"，反之亦然。但是对于水平1B的大多数被试来说，一个奇怪的事情是，虽然在想象这些具体加法和有效合并的可能性时很熟练，但是他们接着认为只有当他们真正那样做时它们才是相等的，而没有不相等性的具体实现。水平2A中的被试，材料相加的可能性的逻辑价值是相同的，无论他们是否认识到了。这实质上导致了他们的相等概念的逻辑必然性。

关于水平1B的另一个引人注意的事实是，情景1和2比(情景3)中的结合性加法的

进步要困难。因此，似乎在形状发生变化的图形中，一个独立成分的守恒没有部分发生变化的一个整体的守恒性明显。

结　论

我们讨论的关于预备结构的第一个问题是和特殊结构有关的情形，长度的结合性提供了一个简单的例子。乍一看，人们或许把它们看作是较高等级的结构，因为它们包含运算之上的运算：把成分相加构成部分，把部分相加构成整体。但是如果只把成分连成整体而不通过部分，这些运算就是相同的，并且后者仅仅是由于整体内部的区别所导致的结果，如一个类中的子类和它们可能的变异（替换类）。这样，预备结构不会与不完全的前结构相混淆；当然，它们构成了结构得以被调节的手段。它们用于在形式或者分配发生变化的条件下保持守恒。

在讨论结合性加法中所涉及的必然性问题之前，让我们先解决已经提到的问题。当把成分相加时，是成分的守恒问题带来了整体的守恒问题吗？那些过程是在对立的方向上进行的吗？或者它们是互利的？在许多案例中，被试是以成分的变化为基础来判断两个总长的相等性的。"它们是相同的线，"Cat说道，"但是不一样长。"因此，就有了单独线段总和的必然守恒。或者"以前，这些线的长度是相等的"，如果你以其他一些方式来安排这些线，"它们的长度仍然是相等的。"（Fri）但是两种事实显示了整体的独立的守恒性，这对成分的守恒性可能会产生影响，且在分离状态下，经常缺乏成分的不变性。呈现两种特殊特征的整体有助于其成分的守恒。第一，补偿性，通过补偿可以把妨碍守恒的外显的加法或减法还原为简单的置换：Ago在情景3中达到了整体的守恒（封闭的图形），但是仍未理解它在逻辑上暗含了成分的守恒性。第二个方面是被试理解了，对于构成图形整体的成分，也能够很好地构成同伴的图形（Ani说："我也可以做和你一样的事情"），这暗含了成分的不变性。

但是最惊人的事实是，许多被试在情景3中都接近了整体的守恒（封闭的），但是在情景1中却相差甚远。因此Ani（7；8）在情景3中取得了成功，但仍认为通过稍微改变正方形的一条边——很少把它与底边分开——能够增加长度。情景3的复杂的整体守恒性，与基本图形中长度守恒的缺乏形成反差。在水平1B的所有被试身上都出现了这种反差，即使这些被试没有完全掌握结合性加法，但仅仅是把成分归集为各种部分的机会就有助于守恒，至少有助于指向该方向的整合。因此我们得出结论说，守恒在两个方向上进行：从成分到整体，反之亦然；即，这两个过程是互反蕴涵的关系。

但是结合性不能简单地归为这两类守恒，然而，守恒却是必要条件；当然，其独特的特征是可变部分的分配，这意味着用补偿来替换定量的长度。换句话说，这是与整合的分化，即部分之和等于整体，同样，成分之和也等于整体。我们研究所提出的问题是守

恒所固有的必然性，与其说是部分本身的守恒（因为这些是变化的），不如说是它们的总和的守恒（相当于整体的总和与部分的总和）。我们试图对这些发展作以下解释。事实上，它和任何形式的守恒一样，都是以相同的方式进行的。当被试理解了部分间的差异只是从一个部分到另一个部分的成分的替换之结果，而且所评估的长度和形状的变化没有任何关系，只是由替换的成分保持本身的固有长度不变这种事实来决定，这时，被试就获得了后一种守恒。简言之，结合性必然是加法守恒（二加数守恒）的结果。相反，所有的加法守恒就是必然的结合，因为它保持部分的总和不变，部分之间的差异只是成分间替换的结果，这些成分在分配变化的过程中是守恒的。

至于解释替换成分的长度的守恒性问题，它们由于位置不同会有稍微的变化。在可替换的情况下（封闭图形，情景3），它们被看作是从起点拿走的东西和在终点添加的东西之间一种必然的补偿。在简单的可联结性方面，它们是方向或位置的替换，这里不变的东西是邻近的，这暗含着整体和单元之间的自同构（automorphism）关系，彼此邻近构成图形。

第六章　乘法与乘法运算

与 I. Berthou-Papandropoulou 和 H. Kilcher 合作

在前一章分析了加法运算，我们这儿就不必从加法原理及其意义的研究开始。加法原理是很基础的部分，我们足以从其具有决定性的转折点着手，即如何从非守恒的加法向精确的定量加法转变。其中，非守恒的加数被看作具有使形式或位置发生变化的功能，而精确的定量加法需要加数守恒。然而，在守恒的加法中（相当于水平2A），并不总是可数的或可测量的，获得可测量的加法的前提条件是掌握单位这一概念。

乘法的演进则更为复杂。大体上，乘法看上去不过是加法基础上的相加，但是这种相加过程是同时完成的，而不是一个一个地相加。这样，3×4=12就可被写作：3+3+3+3=12或许4+4+4=12。这里，每个加数本身又都包含一个加法，如3=1+1+1和4=1+1+1+1。然而，我们很容易在以下的例子中发现二者的区别。在乘法中，人们需要搞清楚三个基本层次，就像我们在研究加法思想中，必须要弄清的几个层次（部件/概念）一样。首先是总数（这里为12，它不随乘数位置的不同而改变，3×4=4×3）。第二是小计，我们称作乘数部分（在本章中我们用数字容器或数束来代替），在我们的例子中，有3组，每组包含4个元素。第三是元素或基本单位（这里每个乘数部分中的4充当被乘数……）。或许有人反对说这些区别在加法中也能找到。例如在3+4=7中，7就是总数，3和4是加数，单位就是基本元素。但这里有一个重要的差别，即在乘法中（如果乘法被认为是在加法基础上的相加，就更为明确了）乘数部分必须彼此相等，或者说包含相同数量的基本元素。而相比之下，简单的加法，总数的计算则并不要求加数部分间彼此相等，甚至不要求其所包含基本元素相同。就像在第五章中整数部分中所说的那样，并没有构造什么可测量的单位。这样，乘法就显得更加复杂，而且包含更多的隐含条件。因此，当把乘法和加法区别开来，研究乘法演进的阶段就成为一件很有意义的事情了。

实验方法

材料：一个玩具绵羊，一个玩具鸭，一堆特定数目的谷物。实验情境：绵羊一口吃3粒谷物，鸭一口吃2粒，这个基本条件在情境1、3、4中适用。

情境1：乘法（4×3=?×?）。实验者为绵羊准备4束谷物，每束3粒。

问题是：根据以上给出的基本信息（鸭每口吃2粒谷物），为小鸭准备相同数目的谷

物。

情境2:运算[2×(4×3)=(2×4)×3]。基本条件:绵羊和鸭均一口吃3粒谷物。实验者为绵羊准备两顿食物,每顿4束谷物。问题是:如何为鸭准备一顿,但相同数量的谷物。或者:实验者同样为绵羊准备两顿食物,每顿4束谷物。让儿童为鸭也准备相同数目的谷物,也分作两餐。当这些工作完成时,询问其二者食物是否有区别。接着,把鸭的谷物放在一堆。问题是:为鸭准备一顿,但相同数量的食物,让其从谷堆中取食。

情境3:互换运算(2×4×3)=(3×?×2)。实验者为绵羊准备每顿4束的谷物两顿。问题是:在满足基本信息的前提下——绵羊每束3粒谷物,鸭每束2粒,用相同数量的谷物,为小鸭准备三顿食物。

情境4:输入对应系列。实验者和儿童同时分别取一束羊食(3粒)和一束鸭食(2粒),重复取6次。然后,将所取谷物隐匿。问题:请问这两人所取谷物的数目是否相同。计算这两人所取谷物数目的差值,当取谷物的行为重复数至够大的N次时,再归纳这个差值(=预测)。

可见,实验中每个情境包含以下乘法中三个不同层次特征(表征含义不同)的变量,这些变量我们在前面定义过,即:

元素=每束谷物数

(加数或乘数)部分=束的数目

总数=谷物的总数目(总量)

这三个变量对应于传统对乘法的描述中所使用的三个术语:乘数、被乘数和乘积。即束的数目×每束谷物数=谷物的总数。情境2和情境3(关于运算)还给出了一个补充的新变量——食物的顿数——与另一个乘数相对应。同时,使变量"束的数目"的身份发生改变,由乘数变为被乘数:顿数×束数×每束谷物数=谷物的总数。

这项关于儿童发展阶段的研究兴趣在于为了证明,每个年龄段的儿童如何理解这些变量以及组合这些变量(同时,或不同时地)去解决所提出的问题。而我们的主要目标则是揭示产生这些原因的基础(或明或暗地),这些原因隐含在儿童构造能力的背后,它是判断和建构相等关系和不等关系的基础。我们的实验情境并非仅仅通过诱导激发儿童的判断力——例如2×(4×3)=(2×4)×3;然而,判断力引发了儿童对一个集合被认为是与标准集合相等的这个建构能力;我们可以根据他们的建构能力来分析其判断力。

水 平 1A

处于水平1A的被试能够注意到以上所区分的每个变量,但他们每次都只操作其中的一个变量,忽视其他变量,这种状况一直会持续到进入下一水平为止。一般有两个结果:一个是包含和被包含变量之间缺少协调,因此他们对变量间相互关系中的任何变化

都不会使用补偿。第二个结果是在被试的回答中存在不一致及大量自相矛盾之处，而被试对此浑然不觉。

面临情境1(绵羊吃4束谷物，每束3粒；鸭每口吃2粒谷物)时，Chri(4;11)让鸭吃了每束为3粒的谷物4束，绵羊亦然。"你记得吗？它每口吃2粒。"她听后让鸭改吃4束谷物，每束2粒。"它们两个吃的食物是等量的吗？"*是的*。接着，我们将问题简化：让绵羊只吃2束谷物，每束3粒。Chri就让鸭吃每束2粒的谷物4束。"现在等量吗？"*哦，没有！*她又改成鸭吃每束2粒的谷物2束。情境2，条件是让绵羊在早晨和晚上吃每束3粒的谷物4束，让鸭吃一顿同样多的谷物：Chri将每束为3粒的谷物4束包起来，"它们吃的谷物等量吗？"*绵羊只吃了4粒*。"4粒什么？""*早晨吃4粒谷物，晚上吃4粒谷物*(可见她混淆了束和谷物)。"那么，我们得给鸭吃多少束谷物呢？"*4束*。"它们吃的量相等吗？"*是的*。"其中一个不是多些吗？"*是的，绵羊吃得多些*。"能解决这个问题吗？"*不行*。*因为绵羊早晨吃4粒谷物，晚上吃4粒谷物*。然后，我们又为鸭安排了和绵羊同样的情况：4束谷物，每束3粒；还为鸭安排了比绵羊更少的谷物；然后，我们将为鸭准备的谷物堆在一起，让Chri从中为鸭取食。她取了每束3粒的谷物4束，没有管剩下的，"那剩下的谷物该怎么办呢？"*它不吃了*。"为什么？"*它得和绵羊吃同样多的*。"同样多的谷物？"*是的，因为这儿(鸭)是4，这儿(绵羊，早晨和晚上)也吃了4*。可见，她对4的解释的角度是定性(隐含的)而不是定量的(外显的)。最后，我们让她比较两种情况量的多少，一种是绵羊吃2顿谷物，每顿4束谷物，每束3粒，另一种情况是鸭吃8束谷物，每束3粒。"*鸭吃得多，因为它吃了所有的谷物(8×3)*。"

Phi(5;5)　条件是绵羊吃每束3粒的谷物4束，鸭吃每束2粒的谷物3束。"你让鸭吃了多少谷物？"*2*(她混淆了束和粒)。"它们吃的谷物等量吗？"*不是*(她给鸭加了一束3粒的谷物)。"现在相等了吗？"*是的*(她指着鸭的所有食物说)。我们将问题简化：让绵羊吃谷物3束，每束2粒。她就让鸭吃谷物2束，每束2粒。"这样分配，它们吃得等量吗？"*是的*。"你能演示一下吗？"*绵羊吃得多些*(她指着羊食说)。"怎么分配？"她将每束3粒的谷物2束分别分配给绵羊和鸭，完全忘了我们提过的谷物2束，每束2粒。

Cla(5;11)　让绵羊吃每束3粒的谷物4束，让鸭吃每束2粒的谷物4束。"它们吃得等量吗？"*不是*。"那么？"他将鸭食调整为每束3粒的谷物4束。"但是它一口只能吃2粒啊！"Cla就将鸭的食物又调整为谷物2束，每束2粒。我们按照3×2将为绵羊和鸭准备的6粒谷物分别杂乱地堆在一起。他最后从鸭食中取出了2粒谷物，那么为绵羊准备的食物就是谷物2束，每束3粒，为鸭准备的食物就是谷物2束，每束2粒。

Isa(6;7)面临情境1(绵羊吃4束谷物，每束3粒)时，她给鸭4束谷物，每束2粒。"它们吃得等量吗？"*不*。*绵羊吃得多*。*它的一束谷物就能分成2粒和1粒*。"将

这些谷物分成两部分,我就能将我的分成三部分。"她在一堆谷物上放了4次,每次3粒谷物,在另一堆上放了4次,每次2粒谷物。"它们吃得等量吗?"*我想是的,因为我们是同时开始,也是同时停止放食物的,因此两边的食物应是相等的*。面临情境2时,Isa为绵羊准备了2顿食物,每顿4束谷物,每束3粒,只给了鸭4束谷物,每束2粒。"它们吃得同样多吗?"*绵羊吃得多一点点*。然后,我们准备了2份2顿食物,每顿4束谷物,每束3粒,然后将第二份食物搅乱,让Isa重新放置每束谷物,她将4束谷物,每束3粒放好。这行了吗?"你认为它们等量吗?"*是的*(她犹豫着说)。"下一步做什么?"她就添加了第5束(每束为3粒)谷物,接着又加了第6束。

很明显,这些例子对于理解乘法原理具有重要意义。但我们很快就发现,他们很缺乏用于解决乘法问题所必需的原理,即使是最简单的。

总的来说,这些儿童出现以上反应是因为,没有理解那三个层次系统之间的必然的包含关系。我们区分了元素或谷粒、部分或束、总数(必须守恒的部分)这三者。那些被试没有考虑到束所包括的谷粒数,自然就不可能保持总数的守恒了。实际上,相对于谷粒来说,总数里的束是包含数;相对于束,谷粒就是被包含数,而相对于总数,束就是被包含数。正如我们在第五章所讨论的长度运算一样,在这初始水平上又出现了一个问题:情境的二重性,即部分同时扮演两个角色,总数的被包含数和元素的包含数。这说明了被试中的一种趋势(开始无法说明的),每次只考虑这些关系中的一部分。

以上每个被试的第一反应都是给鸭4束谷物,每束2粒,因为绵羊吃4束谷物,每束3粒,而鸭必须每口吃2粒谷。差异性的缺乏使被试们,如Chri和Phi混淆了束和谷粒的概念(据Chri的想法,绵羊应早、晚各吃4粒谷,但实际上绵羊每次吃了4束谷物,每束3粒)。根据运算法则,当绵羊获得2顿谷物,每顿4束,每束3粒时,被试们通常只给鸭1顿食物,每顿4束,每束3粒,好像总数的平衡只取决于定性分布,即4束谷物,每束3粒。当为Chri提供同样多的羊食(28粒谷)时,她为鸭准备了一些不定量的食物。当要求她为它们准备以3为单位的食物时,她将食物的安排改为每顿8束,每束3粒。实际上,每顿食物安排得过多,以至于早就无相等可言。可见,这种安排就是由于只考虑到束数的缘故。

当被试们发现无法取得总数的平衡时,他们试图通过变化束数(绵羊比鸭多)或顿数来解决。最后,他们得出了结论:没有解决的方法,或他们坚持为绵羊和鸭提供同样多的谷物(4束谷物,每束3粒)。当然,后者也不能真正解决问题。讨论这些是因为有一个限制性前提:总数必须守恒,各部分都要考虑。其实,儿童之所以出现这些想法是由于缺乏对这三个系统彼此嵌套的必然层次关系的理解,即部分同时扮演两个角色:总数的被包含数和元素的包含数。

水平1B

处于这一水平时，被试们都倾向于在变量之间建立关系，尤其在开始时，他们会根据包含和被包含关系将加数(或乘数)部分与谷粒数联系起来。因此在前面，我们会观察到一些被试们所采用的正确方法，还有一些不能完全解决问题的策略。现在让我们举两个介于水平1A和水平1B之间的例子：

Dia(5;0)面临情境1时(绵羊吃4束谷物，每束3粒)，她给鸭吃4束谷物，每束2粒。*这儿!*“它们是等量的吗?”*是的*。“你看那儿。”她看了那儿3秒，“数数。”*3粒，3粒，3粒，还有3粒*。“鸭呢?”*2粒*。“绵羊呢? 它有多少堆?”她指着绵羊的一部分食物在数，*4堆*。“鸭呢? 它有多少堆?”*同样是4堆!*“谁的谷粒最多?”*绵羊*。“下一步做什么?，*给鸭添1粒(即，和绵羊的4×3一样)*。“但它每口只吃2粒啊。”于是，她给鸭添加了2束谷物，每束2粒，这是正确的，但同时，她感到有必要给绵羊1束谷物，共2粒。*像这样，数目就相同了*。“如果你不给绵羊2粒谷，又有什么关系呢?”不行，*那样它们所得的谷物数就不相同了*。“给绵羊添2粒谷是不是太多了?”不。在情境2中，绵羊得到的是2次4束谷物，每束3粒。“鸭呢?”她记下每束3粒谷物，10×3，12×3，直到16×3。“它们吃的量相等吗?”*鸭吃得多*。“那么?”她为鸭留下了和绵羊同样多的食物：2顿谷，每顿4束，每束3粒，然后撤走了多余的谷物。“现在等量了吗?”*是的*。我们又为鸭添加了2束谷物，每束3粒。“哪一个吃得多?”*鸭*。我们为绵羊和鸭各安排了2顿谷物，每顿4束，每束3粒，然后我们又将后者的食物堆成一堆。“你能分配这些食物吗?”她根据经验分成了8束谷物，每束3粒。这个方法是对的，不过，她认为这样做了以后鸭的食物就多了，所以她将食物改成7束谷物，每束3粒。*好，现在它们又等量了*。

Sop(5;7)从1A水平(绵羊吃4束谷物，每束3粒，鸭吃4束谷物，每束2粒)开始。“它们吃得等量吗?”*不等量，绵羊每次吃3粒，鸭每次吃2粒*。“那怎么办?”她取了1粒谷，然后加了一些谷物给绵羊和鸭：*那么现在，两个都吃的是4束谷物，每束3粒*。“但是鸭每次吃2粒啊!”她又为鸭安排每束为2粒的谷物6束，此时她并未意识到二者已经守恒了，她将食物排成4行，留出一行空隙：绵羊吃2+1粒，鸭只吃2粒。绵羊吃4束谷物，每束3粒，鸭4束谷物，每束2粒，回到了最初的方法。

以下的案例都很明了：

Mur(6;7) 绵羊吃4束谷物，每束3粒。她给鸭吃每束为2粒的谷物4束，然后就停下来数谷粒，推算绵羊吃得多些：*我得给鸭加1束*(即每束为2粒的谷物5束)。我们重复上面的步骤：*我看着绵羊，数着谷粒。我看着这儿(鸭)，数目是相同的*。她最后认为应该是6束谷物，每束2粒：*我仿照绵羊的食物准备鸭食，鸭得到更*

多束的谷。

Rob(6;5)面临情境:绵羊吃4束谷物,每束3粒;鸭吃4束谷物,每束2粒。哦,不相等。他一边在每束为3粒的谷物3束,和每束为2粒的谷物3束之间取得平衡,一边说着:再加一束(即5束谷物,每束3粒)。"它们吃得等量吗?"不,绵羊吃得多,我们必须得为鸭加2小束。但他不能确信如何将每束为3粒的谷物4束,转化成每束为2粒的谷物6束。他甚至得出结论:一个人必须数数,才能求得均衡。

Yva(6;10)面临情境,绵羊吃4束谷物,每束3粒;鸭吃4束谷物,每束2粒。"它们等量吗?"不。她将鸭的食物一直加到8束谷物,提醒着自己:总数为12。想了想最后将食物减少到6束。

Luc(6;6)面临情境1:为绵羊准备2顿食物。Luc除了为绵羊准备2顿多食物外,立即就为鸭准备7顿谷物,每顿2粒。一个人必须算算绵羊吃多少谷物——如果多于鸭,我就得拿走一些。"如果拿走以后又不够了呢?"那我就放一些回去。

Dia的例子很有趣,因为从她开始就进入了水平1A,而且通过她(为鸭添加2束谷物,每束2粒)让我们明白如何使绵羊、鸭的食物均衡。但她一直坚信必须使二者的束数相等,因此她给绵羊的食物过量。Sop的情况正好相反。她也进入了水平1A,并意识到问题所在,因此试图通过变换束数和谷粒数取得守恒,虽然她为鸭安排了每束为2粒的谷物6束,但没有意识到已经找到了正确的解决方法。所以她做了一个"诡诈"的安排,让绵羊每次吃3粒谷,鸭每次吃2粒谷,外加上剩余的谷子。

在上面谈到的"很明了的"案例中,被试们开始发现两个要点:束数或(加数或乘数)部分是包含数,包含着谷粒数;另一个是当Mur为鸭加1束为2粒的谷物时,她吃惊地说:"鸭的束数多一些",结果就"仿照"绵羊的食物为鸭准备了1份。

虽然在上述案例中,包含数和被包含数之间的关系不是很明显,但通过观察还是能清楚地看出来。第一次"试验处理"后,被试们数着谷粒数检查二者的食物是否相等,但没有因此而添加或删减谷粒,而只是为鸭追加了1束谷,共2粒。被试们试图将束数里所包含的较少谷粒转化为较多谷粒,这一考虑虽然离我们的期望(守衡原理)还相差很远,但他们分析自己的错误时,能很快找到原因,说明守恒还是可以通过后天学习获得的。然而,Rob、Yva、Luc虽然宣称:我得数数以求得均衡,甚至已做出正确预测(偶然地):"我得为鸭添加2小束谷物。"但他们的解决方法确实离我们的期望值还有很远的距离。

水 平 2A

到了7—8岁这个阶段,又出现了一些新发展。首先是儿童理解了那三层次系统的稳定关系,即元素或谷粒,还有特别是包含在总数中的、同时又是作为元素或谷粒包含

数的部分或束，虽然在绵羊和鸭的食物中，束中包含的谷粒数不均衡，“因为一个吃得多，一个吃得少”。（正如Ana所说）其次，他们理解了总数不再仅仅是谷粒的总数而已，它还会随着包含数和被包含数关系的变化而变化。因此，它们之间的关系会朝着多元化的方向发展。再次，他们理解了包含数是可更改、可分解的，被包含数也可转化为包含数。这样，被试们就能根据鸭的食物量相应地调整绵羊的束数和谷粒数：绵羊食物中每束的谷粒数3（过量地）可以变成鸭食物中的谷粒数2。类似的行为在此水平比比皆是，他们不断调整着包含数和被包含数，演示着假设关系：$xg \times np=yg \times n'p$。实际上，这和加法运算一样，是数量分布的另一例证。最后一个新发展是，小朋友们理解了这些替代部分的数量本质：如果$n>n'$，那么$x<y$（或者$n<n'$，那么$x>y$）。

Cor（7；7）面临情境1（绵羊吃每束为3粒的谷物4束）时，她很快算出：3+3=6，6+6=12，并回想起鸭一口吃2粒谷。她很快准备好鸭食：每束为2粒的谷物6束。“那个小孩说鸭有6束，绵羊有4束谷。”*因为有的束里有2粒谷，有的束里有3粒啊*。面临情境3时，她为绵羊准备了3顿食物，共24粒，然后为鸭准备了每束为2粒的早餐5束，晚餐2束，每束7粒，恰好总数也是24。

Ana（7；0）　她为绵羊准备了4束谷，每束3粒，为鸭准备了4束谷，每束为2粒，外加每束为2粒的谷2束。“为什么？”*我给了绵羊4束，然后一粒一粒数了数谷粒数，就给鸭加了2束谷，每束2粒*。看到绵羊有每束为3粒的谷2束，她就为鸭安排了每束为2粒的谷3束；看到绵羊有每束为3粒的谷3束，她就为鸭安排每束为2粒的谷4束，外加1粒谷，*否则，要剩下1粒*。“那为什么它们的总数是12，而鸭是6束？绵羊是4束？”“*因为绵羊一口吃得多，鸭一口吃得少*。”面临情境3时，她将鸭的饮食量转化成绵羊式的，即3×（4×2）=2×（4×3）：“单从束数看，它们是否不同？”*是的，但它们总数相等啊*。

Dom（7；1）在情境1中，给鸭每束为2粒的谷物4束，另加3粒。然后，她检查了绵羊的食物，并将每束中的第三粒谷取走。这时，我们告诉她，当鸭的食物为每束为2粒的6束谷时，绵羊应该有每束为3粒的4束谷。面临情境3时，她为绵羊准备了2顿每束为3粒的谷物4束，然后不加思考地，她以2粒谷为1行排列起绵羊的食物，也就是1束（2粒谷），至12束。最后，她不假思索地重新安排了绵羊的食物：3顿谷物，每顿4束，每束2粒。

Bea（8；11）说，*绵羊的束数少，因为束里包含的谷粒数多一些*。面临情境2和3时，他为绵羊准备了2顿食物，每束中的谷粒多些，*因为一个人能以2，2和3，3的方式计算，它的总数刚好是24*。

处于2A水平时，被试们开始明白包含关系，我们必须得注意被试们所使用的概念是否暗示着乘法反应或者简单的加法。发生认识论的目标不是根据认识史解释知识的心理发生，正好相反，是根据知识的心理发生解释认识史。无论我们所持有的证据如何，这儿感兴趣的是被试做了什么，而不是被试的行为与今天数学家们所称呼的加法和

乘法之间的类似或差异。

所有这些被试们的反应都说明了一个最关键的事实：无论面临怎样的任务，他们都将（加数或乘数）部分、束的数目理解成包含数，将谷粒数或元素理解成被包含数；有的将每束为2粒的谷物6束与每束为3粒的谷物4束相匹配，还有的为了和鸭的食物量相等，重新安排绵羊的束数。被试们的目标不是改变每束谷物数（除了在重新安排每束为2粒的谷物束时），而是改变束数（在总数保持不变的情况下）。当被试真正理解了基本守恒原理后：$n(xg \times p)=n'(yg \times p)$（通常理解为内部关系：如果 $n<n'$，那么 $x>y$），无论组成部分如何，都确信能满足总数的守恒了。

当将此与其他运算，如长度加法运算相比时，我们发现乘法运算具有的三层结构：总数、部分和元素仅仅出现在涉及结合性的问题中；然而，在简单的加法运算中：4+3=7，加数4和3在某种意义上不算包含数，有两个原因：首先，这些加数仅仅包含着一些单位，而且只用很短的符号即可表示：(1,1,1,1)=4。在这个表达式中，这些单位不能成为基本的加数（这仅仅能出现在系列 $n \rightarrow n+1$ 的整数构成中，而不能出现在通常意义上的加数中；在表达式4+3=7中，3绝不能被认为被包含在4中，因此在这种意义上加数不能算包含数）。比较二者：加法4+3=7，乘法4×3=12，最重要的差异是在4+3=7中，4和3处于同一水平，且都只包含着一些基本单位，而4×3=12意味着，运算中包含着单位乘以单位（=未来的被乘数）3被乘以4，因为包含数（=未来的乘数）不是处于一个等级，意味着包含数的数目和束数已经获得了预期的结果。这4个包含数或者束数不能组成、也不能含有和加数4同样的单位，因为它们指的是特定分布中的特定数字。

其次，这里的实验结果说明：加数不能被用作可重复的单位，只能用作总数中的部分：甚至在加法运算如4+3+6等中，只有1个4，如果有一些4——如绵羊的食物有4束谷，每束3粒，鸭的食物有6束谷，每束2粒——那么就得写成4（乘以3）和6（乘以2）。在这点上，即使被试通过加法得出了谷粒的总数，说不出4×3=2×6，但他在行为中所建构和使用的束数（部分，包含数）却不是简单的加数，因为存在着几种不同包含成分的同类型。表达式"n包含着x乘以？"里包含着多种含义，即使被试不知道乘法表。为了保留乘法中的后一个术语（它与学校教育紧密相连），我们只有采用一种相当不发展（nondevelopmental）的观点。然而，它在水平2A非常具有教育意义，因为水平2A非常强调包含与被包含关系，但后者在附加的"加法"中并没有论及。

另外，这项实验的结果还表明：被试们有时会为绵羊和鸭重新分配谷粒，即使二者的食物已经相等，也不考虑减少，而只考虑组成部分之间的功能平衡。因此，为了鸭吃3顿谷，Dom将 $2\times(3g\times4p)$ 重新安排成 $3\times(2g\times3p)$。

处于该水平的儿童使用最频繁的策略，我们称之为数量分布。这项策略在于根据绵羊的食物分配情况，两两"投射"鸭的食物分配，最后鸭的食物在开始每束2粒的谷物4束基础上，又添加了2束。这引起了两个明显的问题。首先，这个投射的程序是附加的，因为它关心的是谷粒数，要确保绵羊和鸭的谷粒数相等，但它并未要求对可能需要

的束数进行预测[事实上,我们没有指望,而且处于这水平的儿童(与处于2B水平的儿童相比)也不可能预测束数]。第二,所得到的总数是经验判断的结果。然而,值得注意的是(真正达到了乘法认知的水平),被试们理解了被包含数与包含数之间的关系,并确信新的安排(乘以2)能产生新的包含数,新的包含数里的单位能组成和绵羊食物同样多的谷粒数。

因此,我们大大低估了2A水平的被试附加使用的策略。我们得仔细地区别预期前的程序和通过试误法所获得的对实验结果的最终理解。当然,由于缺少乘法期望的运算工具,出现了附加使用的策略以达到前面所提到的两类食物分配结果之间的平衡,这不足为奇。但是真正重要的是对结果做出解释。当被试们意识到6个包含数、每个含有2粒元素所得的结果与4个包含数、每粒含有3个元素相同时,就清楚地理解了不同于简单相加的包含关系。尽管Dom是以3顿的形式安排了鸭的食物:$3\times2g\times8p$,但她不懂运算中的除法,只是按照相同的原则,因此结果也是分布式的结果。总之,处于该水平的儿童还不能够将包含数转化为乘数,被包含数转化为被乘数。被试们面对乘法问题时,是根据分布情况、联结而成的关系、包含数以及被包含的数目,来确定每项的确切数目。如果不想看到先于数字格式化的、从组织化的行为衍生出来的完整形式的概念并与所有其他领域的相似序列相平行的乘法运算行为,是很困难的。

处于这个水平,被试们已经能很好地处理长度的结合性,即使掌握后者是相当容易的。原则上,这只涉及守恒问题$(A+B)+C=A+(B+C)$。但我们在第五章可以看到,被试们对于理解用相同的元素表示可变化的部分包含在不变的总体方面存在困难。同样的问题又出现在乘法运算中。这一阶段出现了加法的复杂计算:不仅(加数或乘数)部分和束数取决于被试是如何分配以穷尽总数,而且被包含的元素是可变的,与束数呈负相关。这富有启迪意义,因为这说明,理解基本的包含→被包含关系有助于被试们解决乘法运算中的复杂加法问题。可以肯定的是,只有通过试误法、连续地读数而不是预期才能达到。这一特点将在下一水平中再现。

水平2B(9—11岁)和3(11—12岁)

很难具体地指出水平2A(几乎觉察不到什么学校知识的影响)和紧接着出现的水平2B(在其中孩子们学习了$3\times4=12$,$2\times6=12$…之间的关系,但是认识到在没有前提条件(同时获得性格式)的情况下同化学校知识的困难,我们不相信,都需要将包含数转变为乘数,被包含数转变为被乘数(也就是,将一个所谓的加法转变为乘法关系),这一切就是把数字附加给这些实体。让我们再回想一下为鸭子附加(4×3)束中的第三粒,而不改变包含数的数量(束数),而仅仅是证明总的被包含元素是否守恒。水平2A到2B之间的主要区别在于,在2A水平,被试者根据经验寻找要关注的包含数,而在2B水平,他们

倾向于预期。但是，尽管他们都肯定已掌握了计算方法(在学校或自然地掌握)，但他们都要受到在2A水平中已发现的逻辑支配：总数可以分成几个不同的包含数，包含数的数目与被包含数之间呈负相关。如果加以拓展，并能预期数字(读数)，它就能成为乘法关系的基础(同样，如果没有单位和预期，数字加法就比加法出现得晚些)。

Dan(9;7)给羊吃4束每束3粒的谷物，迅速地拟定6束每束2粒的谷物给鸭子：*我对自己说，4×3=12，6×2=12。*但是在情境3中，她就像在2A水平中那样犹豫了。她开始不知道怎么来安排羊的2顿食物；最后她发现2×12=24，就尝试着安排鸭子吃3顿，后来找到4束，每束2粒，共8粒，每束2粒对于3顿来说不够用。最后，她发现：*我对自己说24，就是3×8。*

Cat(9;5)面临情境1时：*我应该给……6束每束2颗的。*“你是怎样做的?”*在我脑中我是这样想的*(表明在羊和鸭子之间)。他面临情境3(绵羊早晨和晚上各吃4束，每束3粒)，他数了数，绵羊的食物总量为24粒；但当他将羊的4束每束3颗转换到鸭的6束每束2粒时，他对如何安排束数和每束的谷粒感到困惑，最后还是没有使二者相等。在最后时刻他说：*不，它有24粒，我犯了一个错误。*

Lau(9;7)在情境1中：*我想羊有3(粒)，那么3+3=6，再加3为9，再加为12，这样也需要放相同的数目在鸭这边，成双的4束每束2粒，另加2束……这样就完成了。*我们将鸭子隐藏起来，“你认为这边也是12吗?”*是的，4束在这边*(对羊)，*2束在那边*(这样束和束就对等了)。在面临情境3时：他数出了羊每顿需要12粒，吃2顿，则得2×12=24，但是鸭子要吃3顿，他打算用“乘”来算，以3为比例，他安排了3×3，*不对，3×6=18。*“鸭子的对吗?”*不对，我数错了，我应该用加，2+2+2+2…*但最后还是18。*我试图：在早上为8；在中午为10，12，14，16；在晚上为18，20，22，24，这样就对了。*“有办法立即找到24吗?”*没有，必须是先试着“乘”再试着“相加”。*

Oli(9;5)在情境1中：*同样计算2×2，如果羊吃了6粒，那么鸭子的6为00…00…00…*他在情境3中：羊将吃2(顿)×4(n×3(粒))，而后分成12份，即12束每束2粒。准备鸭子的食物时，他将谷物分成2顿，每顿4份：*我脑子是这样想的，早上吃12粒，晚上一样，则总数为24，安排鸭食时我从羊食1，1，1，1个取走，然后我将余下的分成每顿4对，就是3×8=24，*“那么羊呢?”*2×12(粒)。*

要比较水平2B和2A的高低，让我们先测试水平3。

在首次检查水平3时，我们发现水平3比水平2B和2A更好，因为出现了一个新的策略：从总数开始是守恒的，被试们开始处理分布中的不相等，这样按照这种方法部分或束与谷粒的乘积就仍然保持不变。

Yva(10;10)在情境1中：*我将它们用完了，那么哪里都会一样。羊这边，总共有12，我用6×2，羊吃12，我用3×4。鸭也吃12，用6×2=12。*她在情境2中：*羊12加12为24，鸭子这边，早中晚各8，也是24。*

Hen(10;1)在情境1中：*我看了羊的谷物，将它们变成每束2粒得许多束。*在情

境3中：*我将鸭子和羊的都合起来一起数，除以3，我把它分成3顿*(*尽管还没有教他去除以3*)，*是的，就这样，是相同的数目，24*。

Did(10;5)立即将鸭子的12粒分成6份。在面临情境3时：他迅速发现每顿吃4束，因此羊食用24除以2，鸭食用24除以3。*每边24，12+12给羊，8+8+8给鸭子*。“这么做干什么？”*每顿8束……每顿8粒，24粒*。“哪一个是对的？你是用3除的？”*因为它每天吃3顿*。“那么你得到什么？”*8粒*(犹豫)。“在哪里的？”*每顿的*。“那么有多少束？”*3，不是4*(他用了4束每束2颗的谷物)。“这样你要做几次？”*3次*。“这样就得到24？”*是的*(很肯定)。

Dan(11;3)立即分配6束、每束2粒谷物给鸭子，相应地3×4=12给羊。情境3：*是24÷3，3×8=24；所以，鸭子每天3顿，吃8束每束2粒……2粒，8束：我有一些问题了……*“3和8得什么？”*24，谷物的总数*。“3是什么？”*3顿*。“那8呢？”“*通过这个数字我可以得到24*(！)”“那么它是什么呢？”*每顿吃的总数：每天3次，每次4束*(*每束2粒*)。

Sto(12;0)在情境3中：*羊这边有24，这是24÷3=8束*。“鸭子这边每顿有几束？”*8束*。“你怎么得到的？”*谷粒数，24÷3=8，不对，我犯了一个错误，是每顿8粒，也就是每顿4束*。

被称为3A水平的这些被试者中，虽然有很好的基本数字乘法的控制力，但仍然在情境2中犯错误。因为鸭子吃顿数多，那每顿就吃得少。但是如果它只能吃2顿时，那么束数多时每束的谷粒就少。换句话说，这些被试们对乘数的双重特性仍然还有问题，实际上它既有被包含又有包含的性质。然而，到了3B水平，儿童们面临的这种困难就会立即消失。

Lyd(12;10) *羊有8束，8×3=24，鸭每顿4粒，我们应该用24除以3再除以2，因为每口不是吃了3而是2粒，所以24粒谷物：3×(8÷2=4)*。她引用了2个4，并明白了*她应该说4束，每束2粒，8÷2，把我弄糊涂了*。

在研究乘法运算的水平2B，甚至水平3A时，儿童们出现的反应给我们留下了一个同样的印象：被试们在运算时不存在问题，但对理解数字所代表的实际意义上存在问题。这儿被试们出现的典型问题是：运算24=3×8中，8的含义是什么(因为总数是24，而鸭吃3顿)。对于8代表什么，11岁的Dan首先慎重地说：“我可以得到24的那个数字。”稍后，他就能正确地具体解释包含数(每束的谷粒数)和被包含数：4束每束为2粒的谷物。他这样做并不令人吃惊，因为事实上，实验情境很复杂，层次不仅包括3个系统(总数、部分或束数，和元素或谷粒数)，而且还包括附加包含数(包含在总量中的，包含着束数的顿数)。在被试们进行数字运算的过程中，他们很难记住每个数字在包含和被包含系统、在乘数–被乘数关系中代表什么。

通过这些结果，我们可以提出加法和乘法运算之间的一个区别，它比我们的被试Lau阐释得更为丰富，也是我们到目前为止比较满意的一个系统：从相等的部分(束数)

所构成的n中计算总数，也可向Lau那样计算“次数”，也就是$n \times p=T$，或通过“相加”$p+p+p+\cdots=T$。在这个例子中，乘法就只是加数的加法。它的独特性仅仅在于建构了一个次数，运用加法的n的主题，也就是$T=np$。但实际上，以上所呈现的例子还暗示着，乘法系统包括两个进一步的必要条件。一个是包括三个层次(与加法相比，这三个系统不仅相互关系，而且存在线性关系)：被包含数，或基本的元素，被嵌套在部分(束，等)——起包含数的作用——中；最后，问题是所有部分的结合，代表着与之相关的被包含数。因此，从心理学的角度来讲，被乘数与乘数的概念代表着系统的被包含和包含概念。即，表达式4×3=12，被乘数3被包含在乘数4的每个数中(不为加数所具有的一种关系，除结合性的情况外都处于同一水平，甚至是以缺少系统性的形式)。乘法系统的第二个必要条件同样重要，甚至更富有产生性。总量可以根据元素除以部分、除以其数字而发生变化，即：在总数里改变部分和元素的各种分布的关系，如下：$T=n(xe) \times p=n'(ye) \times p'$ 或者如果 $y<x$，$n'>n$。乘法系统比加法系统更为灵活、更为丰富。

可见，呈现建构过程中的各阶段是很有趣的。我们看到，首先应该理解包含和被包含关系，这出现在水平2A阶段，在这一阶段，那些被试们甚至还不能提前考虑可能出现的结果，而只是通过经验逐步建构包含和被包含关系。在这方面，盈余方法(将绵羊的3顿食物缩减到2+l粒，并将剩下的1粒重组到每束为2粒的谷物中)就是这些不同分布出现守恒结果的了不起的例证。所起作用的不是细节中的程序，而是被试们坚信如每束为3粒的谷物4束，和每束2粒的谷物6束，这两种分布是相等的，两两投射只能保证儿童们在操作时不会遗漏任何元素，且总数保持恒定。在下一个水平(2B和3A)，对数字进行的预期增多，但同时出现了一个新的问题：当变量的计算量增加，被试们同时组合总量(包括它们具体的含义和被包含关系)的能力降低。

结　　论

从一个水平上升到另一个水平，这个必然的发展过程对于一个持续性的系统而言是一个很好的例子，它呈现出相当重要的转变。在水平1A，唯一必然的关系似乎是使总数从属于部分或束数，不用注意它们包含的元素。一般来说，我们在这里能看到虚假必然性(需要被更正的错误)和前必然性(这个问题的因素在后面的水平中被保留和完成)，被试们自己发现了其中的一些因素，但还没有组合到一起。然而，在这种不完全的组合中，真正的必然性不能发展。

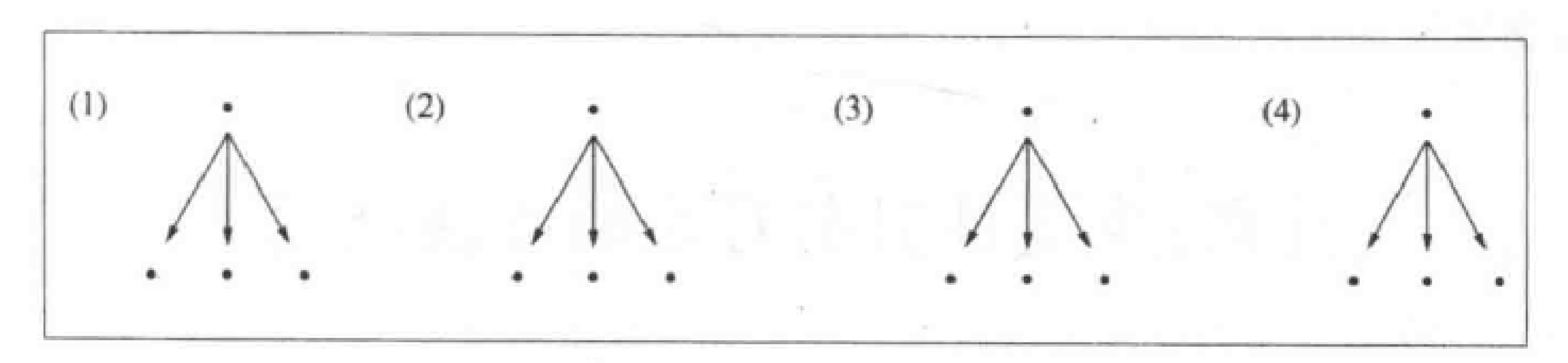
在水平1B，被试者开始算出束数和每束包含的谷物数之间的关系，但是这仍然处于前必然性的状态，从某种意义上来说，这已是一个很好的方向，但在细节上(特别是在补偿方面)不算成功。在2A水平要认识四个必然性：(1)第一是每束有相同的谷粒数(包含数里包含着被包含数)。这涉及一次分配(对羊或是对鸭子)。如果包含和被包含的

关系确立,这个不变性是必然的。(2)确保总数恒定,这是充分必要的,n(谷粒数×束数)=T。(3)这种分配事实上必然暗含在总数不变时它可能转变成另一种形式:m(谷粒数×束数)=谷粒数′×n'=T。(4)这些数量上的变化暗示着补偿能被证明甚至可大致预测(多的束,则每束的谷粒数就少,等等)。

除非被试们能理解他们行为的原因和结果,否则这些必然性绝不可能被预测,被再组织。然而,这些被试们很快领悟到:当总数保持不变时,一种分配可被另一种分配代替。这种理解力带来其他的必然性,但有个基本的限制:推断可观察的部分为包含数,被包含数待定,或者增加新的变量会带来紊乱。

乘法演进的关键问题是如何解释在水平2B和2A中的变化,即从一种集中于可观察的和分散的束数或被包含数的推断,到一种包含数变成乘数和被包含数变成被乘数的推断。我们认为这个从某种程度上形成概念之间关系的方法,绝不是一个意想不到的变化或者突然的变形。纯粹的数字间的关系4×3=12仍然是把4作为包含数,但是从原本意义上包含着的3个单位属于被包含数。无论我们怎样处理物质和精神客体(这二者之间所有的中间情况),这些关系或一致性仍然是相同的;同样地,由于在所有的4作为包含数中重复出现,相应地这3个单位就属于被包含数。

在提到的每个水平里,我们区分了被试们操作任务的三个阶段:一是他们关心的总数;另一个是部分或子系统——我们称作束数或是包含数,或者是最高水平的乘数;第三个是包含在部分里的元素或者谷物。我们假设,每一级水平都有包含关系,但它们基本上不同于各自所代表的系统——表现出嵌套的抽象程度。水平2A视物体(谷物)组成为束,在这个例子中包含和被包含有空间上的关系,甚至具有图像性的意义。在另一极端,即纯数字乘法的水平等级上,如4×3=12,4个乘数的每1个(这一术语在这个水平是适用的)平行支配自己的系统或部分,与其他3个不相交,它们都有内在结构,都属于包含数。除了可以用箭头表示一致性,它不具有空间或图像特征,如下图所示:



上图中的4个乘数以及它们的对应关系所决定的,从某种意义上讲,仍然是包含和被包含的乘法。

简而言之,乘法在于构成包含关系:就是1个与多个的对应关系。在2A水平,能从数据和其他模型(盈余元素的两两投射等)中直接观察到这些对应关系。这些表现使得我们能够说到乘法的作用或者至少是前驱机制。在水平2B、3A和3B中,模型一致性的角色不断得到发展。我们仍然发现,在交换结合性中协调新变量时会出现试误行为,但是数字包含数已完全被具有数字对应关系的网络代替(这可以说明从计算回到具体的

模型中常会出现的困难,如Dan的8=24÷3)。但是从一个水平到另一个水平的演变中(一旦三个水平的元素,部分以及总数被很好地区分),在探索内在包含关系的必然性中,存在着功能性的连续性。这种连续性,对于解释乘法与加法的不同,比起通常或多或少随意运用的标准来说,似乎是一种更好的选择。

至于乘法中的结合性,我们在本章或者以经典的形式或者以其他形式研究了两种情况。第一种是嵌套(层次)的数目是恒定的,仅是(被包含的)内容发生了如下变化:$np=n'p'$,n和p的值之间可以进行补偿。我们说这个数量上替换的例子,就像以前看到的那样,它同样需要对水平2A的乘法理解,并通过直接结合(一致性)构成它自身。第二种是在某个层次中(顿数)增加一个水平,因此相互间的补偿会更加麻烦,操作(2B和3水平)上的发展会出现迟缓,尽管实际上这儿的包含关系和简单乘法和更彻底的乘法替换如出一辙。但是总数要保持恒定,不仅仅需要某个项目,而是许多不同的类别(如谷粒与束,束与顿,顿与总数)进行数量上的替换,且必须同时进行。这种困难类似于从类替换到部分的全部集合(在3水平出现的建构)的变化。这第二种形式的结合性,人们称之为结合的交换性,被试的任务是使总数相等,而在简单的结合性中,他仅需要决定总数是否守恒。

出现这些困难有某些明显的原因:第一,在第一次任务中,只允许采用一种补偿方法,即改变每束中较少的谷粒数,但实际上需要改变的是束数(改成较多束)。但是,现行的例子中,在顿数、每束谷粒数以及束数上进行补偿,目的是保持总数24不变;除以3(顿)则8,这个8代表的是每(顿)为8粒谷,也就是4×2。以上所述就是困难的根源之一。第二个困难紧接着第一个困难,它指的是:"束"在这些组合中有双重角色,即包含数(对于谷粒)和被包含数(对于顿),也就是说,束既是乘数又是被乘数。这是乘法和互换的结合性所需要的二阶乘法的基本特点。因此,毫不吃惊的是,相比较前面的任务,完成第二项任务需要儿童年龄稍大些,因为任务中数量更多,束中的被包含和包含关系更为复杂。

补充:重复性引射对应的乘法性质

延续前面的实验,我们使用一个附加实验作为控制。为了验证对应关系中程序的乘法原理,我们决定再次研究包含和被包含(束和谷粒)的问题,这个问题我们曾在1963年和英海尔德研究过,是关于多次对应导致了乘法的不相等。例如:2A水平的被试之一,Graf(6;11),已经能提及2比1,如果一个包含数(可见的)有4个元素,那么另一个就有8个(隐匿的),如果为6,则对应12,10则对应20,"如果'隐匿'的瓶子满了,那可见的那个装到了哪儿?"一半。

在目前的研究中,实验者和儿童同时分别准备一束3粒和一束2粒的谷物,重复一

定次数，且至少有一边要被隐匿，问儿童两边是否含有相同颗粒的谷子。如果持续这样做一段时间，是否还会相等。分析的目的在于从这些引射对应(Injective Correspondences)中找出的不相等——2比3，是源于谷粒数增加的加法运算，还是源于包含数乘以被包含数关系的乘法运算。

在水平1，我们发现不成功和部分成功的结果，Mon(6;7)，先前处在2B水平，争辩地说：3×3(可见)与3×2(隐匿)结果相等。“*因为我们取了相同的次数*”。我们简化到3×1(实验员)和3×2(被试)，回答相同。“你共有几颗？”她数了数说：6“那我的(隐匿)也是6个吗？”*是的*。“你看。”*3个*(很诧异)。我们继续回到3×3和3×2：她数出了两边不相等而且3×3这边要多些。“你共有几颗(隐匿)？”*6*(正确)。“那我这边呢？”7。我们继续用4×2和4×3得到的答案为8和9。由此可见，推论仍然完全是加法的。相反，Sop(5;7)介于水平1B和2A之间，对于4×3和4×2马上回答：*你的多，因为你拿了3次(每束3粒)，我的是2次(每束2粒)*。“一直这样拿下去，我们会一样多吗？”*不，你拿了3次*……“那现在怎样？”*你先拿了3又拿了2，一共为5，我的是2+1为3*。“为什么是3和5呢？”*因为你取了3束呀！*“那么我们永远不会有相同的谷粒吗？”*是的*。“你确定？”*确定*。“不用试吗？”*不用试！* 由此可以看出，尽管她一直用不变的领悟力看待相等的必然性，但还是按加法进行计算。Rob(6;5)就不知道：*你必须数一下才知道*。

在2A水平，令我们特别感兴趣的是包含和被包含之间的关系，Dom(7;1)说：*我总是少因为我拿的是少束*。“那么(3×3和3×2)呢？”*我的少*(他数过)：*6个*。“那我的呢(隐匿)？”*9*。“你怎么得到9的？”*因为你在为我准备的每束里加了第三粒谷*。“如果我们再拿一些束(4×3和4×2)，你现在有多少？”*8*。“那么我呢(隐匿)？”*12。因为你总是将我的拿走了*。“你放了多少束在下面？”*也许是5*。Cori(7;7)从可见的6=(3×2)到隐匿的9粒谷中得出了相似的推论。如果再重复，就变成了9到12。Chri(8;4)面对2×3和2×2时：“你需要拿多少束才能和我的谷物相同？”*1次*。Bea(8;11)面对7×3和7×2时说：*即使我们重复一万次，鸭子得到的还是少些，因为我们取了相同的束，而每束里的量不同*。面对(6×3，6×2)时：“数数我的。”*18*。“你的？(隐匿)”*12*。“你怎么做的？”*我拿2加2*。“那你什么时候停止呢？”*因为我们取了6次，我用6×2=12*。“你要再拿多少次才能得到相同的数目？”*3次*(也就是：3束，因为12+2+2+2=18)。Oli(9;10)面对(10×3和10×2)时：“如果我们一直持续到明天？”*我敢保证我的要少些。一开始你拿的就是3，而我的只有2，那么就永远会有不同。如果你有18而我有12时，我们就得继续拿*。“当你有12个而我有18个，而你也想有18个，那怎么办？”他取出了9束每束2粒的谷物数了数，*你拿了6次，我拿了9次*。

从2B阶段开始，过程立即数字化。Dan(9;7)计算6×3，6×2时，说他还需3束因为6×3=18，6×2=12；所以多拿3束因为9×2=18。水平3的儿童也出现了相似的结果。Yva(10;10)算10×2和10×3说：*需要拿5束……5束*。“那么？”*你多拿了10粒，我算得3×10=30和2×10=20；我必须拿*(10粒的)*一半*。

在乘法任务中，总数得守恒(4×3=6×2)，需要变动的是每束中的谷粒数，这样每位参与者总的谷粒数才相等。在2A水平所使用的解决问题的投射方法，我们解释为行动中的乘法。相反，我们在当前任务中为每位参与者提供了相同的包含数(束数)，然后不停地增加束数，每次束里的谷粒数都不相同，看被试们是否能使这些不相等的谷粒数保持总数守恒，或者看看在这个过程中被试们的行为方式。我们在水平1时看到Mun(和其他被试)相信数目上的不相等是由于引射对应2<3，因此每次增加1粒。这些被试们没有看到，数量上的增加是可以累积的，且是束数的函数($\delta=n$，如果他们的每束中的谷粒数相差1；如果他们的每束中的谷粒数相差2，那么$\delta=2n$；这个问题并未明确提出，因为$\delta=n$的关系问题对于被试们来说太难了！)，总之，随着包含数(目)发生变化，不守恒的可能性也在增加。当处于2A水平的被试们能推算出如果一个人有6粒谷，另一个必定是9(隐匿的)；一个是8，另一个就是12；一个是12，另一个就是18，这说明他们已经理解了这一原理。

在这个解释被包含的元素(谷粒数)一直增加的例子中，包含数或者束数呈现完全不同的功能，束数在行动中被理解为乘数(在包含与被包含的关系而不是两个被乘数之间的任意关系中)。Cor(7;7)经常使用"次"这个词；*一百万次*，Bea说；*6次，我的为9次*，Oli宣称；处于水平3的Dan(11;3)宣称：*我拿了6次(每束2粒)你拿了6次(每束3粒)，那么你就多6粒*。被试们在2A水平中都已经使用的这些隐含的原理，就是我们所要说的行动中的乘法。

总的来说，乘法就是加法的加法，但是后者能够设想为两种不同的方法：每个被试者将每个加数相加的结果，是一种很简单的加法行为；或者，他们认识到(有时候甚至是数出来的)加数的总量n对应于每个操作变量，因此，这个变量代表着一个乘数。这种理解力不依赖数字计算($n \times n'$)，它在水平2B，甚至是水平3，才变成主题和所使用的唯一的程序。

第七章 分 配

与 A. Henriques-Christophides 合作

本章将论述乘法中的分配(distributivity),这种分配在两个数相加中也可发现——即,总和($A+B$)的增加(xn)是在部分基础上的同质性累加,如 $n(A+B)=nA+nB$。我们将在乘法分配的条件下论述条件必然性,后者是诸多数字、空间甚至物理结构的共同属性。以前我们关于橡皮条伸展的研究(和 G.Cellerier)业已表明,在物理领域,这种预备结构在很晚的时间才获得(在被试不明白橡皮条的各部分伸长的同质性时,要使被试确定橡皮条伸展的终点,要经历很长的一段时期)。[①]这种对分配的理解在算术和空间领域是否更容易被理解,对此,我们决定予以研究。作为一种运算,分配是复杂的,因为它必须在积的总和与各个相乘部分之间的附加,即乘法和加法之间进行组合——甚至不用考虑总和 $A+B$ 与部分 A 和 B 之间的分离问题。这种分离本身意味着总体的守恒,虽然分配本身要求增量的守恒,但增量的守恒与分配之间存在极大的差异。

第一个要解决的问题是,表面上基于同一原则的两类方法是否在难度上存在差异。第二个关心的问题是从非连续与连续性物体中或获得的研究结果之间的不同和相同之处。

一、非连续性物体的分配

实验采用两种不同的任务,第一个任务,我们把它称之为 CT(糖果任务),给儿童呈现一堆一堆的糖果,或者 3 颗一堆,或者 2 颗一堆,或者 1 颗一堆的单个糖果。首先给被试 3 颗一堆的糖果一堆,被试必须明白,它等于一堆 2 颗一堆的糖果加上 1 颗糖果的总和。接下来,我们给被试 n 堆 3 个一堆的糖果($n=2$,3 或 4,等等),同时,实验者也取走 n 堆 2 颗一堆的和 1 颗一堆的糖果。等式 3=2+1 就说明了整体与部分的最初关系。随后的增量 xn 表示的是被试所理解的相同的乘法效应的分配。

第二个任务,我们称之为 BT(豆子任务),要用到两个大盒子。第一个大盒子装了一些实验者放进去的豆子(数目不多),第二个盒子是空的;当实验者每次向自己的盒子投入 1 颗(堆)豆子(给儿童看过后就连续地投)时,儿童也要向自己的盒子投入实验者

① 见 J. Piaget and R. Garcia, *Understanding Causality*(New York: Norton, 1974)。

的2(或3)倍多的豆子,这样儿童每次投入的豆子数是成人每次投入数的2(或3)倍。我们把实验者的盒子叫作$A+B$、被试的盒子叫作$n(A+B)$。然后实验者就把自己的豆子($A+B$)放到两个小的空盒子里,一个盒子装有A颗(堆)豆子,另一个盒子装有B颗(堆)豆子。之后(或同时),儿童也拿到两个小的空盒子,放在第一个盒子$n(A+B)$的下面。要求儿童从储备盒(即$n(A+B)$——译注)中,把nA颗(堆)豆子放入其中一个盒子中(即n=2,3,等等),这里,n在这一系列的实验中保持恒定,并与$n(A+B)$中的n相等。这样,当被试把总体从($A+B$)增加到$n(A+B)$时,其部分A和B也就成2(或3,等等)倍的增长了。问题是,被试是否理解$nA+nB$与$n(A+B)$之间的相等关系,而不再关心事先被实验者放入了糖果的盒子。

这里,$n(A+B)=nA+nB$的关系表示的是非连续性物体增量的分配。在论述了儿童CT和BT任务上的发展水平之后,我们将报告用于连续性物体分配的两个相似任务。

水　平　1

在该初始水平上,被试在CT和BT均表现失败。他们对任何转换均不能进行推论,只是通过看结果来进行判断,这是一种知觉判断,或者只是根据糖果或豆子的堆数来判断。有时,如果不数豆子,他(她)们将拒绝做出判断。

Cri(6;7)拿到3颗一堆的糖果一堆,实验者也有2+1颗糖果:我们两个人的糖果一样多,因为2+1=3,因此你那里有3颗糖果。"好!你想要多少堆3颗一堆的糖果?"*4堆*(她取了4堆)。"我拿4堆2颗一堆的糖果和4颗糖果。我们两个一样多吗?"*我得数数才知道*。"好"(又将上述的:儿童拿4堆3颗一堆的糖果,实验者拿4堆2颗一堆的糖果和4颗糖果的任务重复了一遍)。*那里(2+1)更多*。"为什么?"她用手指一指糖果的堆数。"好,我们再玩一次,你自己拿吧。"她拿了2堆2颗一堆的,2堆3颗一堆的,另加2颗糖果。"我拿这些"(4堆3颗一堆的糖果)。*你拿到的糖果更少,你每次拿4颗,我每次拿2颗,因此我拿到的糖果更多*。我们把2堆3颗一堆的糖果返还给她,然后两次把2颗一堆的和1颗一堆的放在自己的盒子下面:*你的糖果更多,你每次拿2颗,我只拿那么多*(开始数)。*哦!还是一样多!*我们又继续玩5堆3颗一堆的和5堆2颗一堆的,再加5颗糖果的任务:*我得数一数,因为糖果混合起来了*。豆子任务。*如果你把两个盒子加起来,这里就更多*(两个盒子),*那里更少*(一个盒子)。"你肯定吗?"*我肯定,那里有两个盒子,而这里只有一个*。

Lua(6;9)　豆子任务:她认为,*2×(A+B)中的豆子更多,(2A+2B)中的豆子更少,因为放在前面的豆子更多*。"你怎么知道呢?"*我数了*(其中一个盒子),*有6颗*。"那里有几颗呢?"*我没数*(但我看了),*有12颗*。"两个加起来呢?"*更少*。"肯定吗?"*肯定*。我们又重新做了一遍实验,结果一样。

Kat(7;1) 糖果任务：*我有3颗，你有2颗和1颗，也等于3颗。*然后，她取了3堆3颗一堆的糖果，实验者取了3堆2颗一堆的糖果，另加3颗糖果：*不相等*，然后她重复了一 遍3=2+1，似乎在重新考虑。我们以(5×3)与(5×2)+(5×1)的比较重新开始实验：*我们的糖果一样多，因为你取了5(堆)3颗一堆的糖果，然后又取了1次5堆3颗一堆的糖果。然后，你拿走了5颗和5堆2颗一堆的，因此都是5。*因此，她所认为的相等是基于次数(5)，拿糖的次数相同，而不是考虑盒子和盒子里的糖果之间的关系。豆子任务：*如果不把它们加起来，那个盒子(半个盒子)更多，如果把它们加起来，那里(两个盒子)更多。*

这些反应普遍见于最年幼儿童的身上。这清楚地表明，还有许多障碍需要克服，因此，这些障碍也就是达到分配所需要满足的条件。首先，很明显，附加必须是守恒(对加数和总和的守恒)的。而Kat显然是在否定守恒："那里更多……如果它们(加数)不加在一起"，但是，如果加在一起，反而更少；因此，对Kat而言，总和的值仅仅取决于糖果的堆数。对Lua而言，$2(A+B)$比$(2A+2B)$更多，"因为我们把更多的糖果"放到一个盒子里去了。事实上，一旦糖果的堆数太多，"就混合起来了"(Cri)。因此，两种矛盾观点的共同点是这样一个事实，即在把握盒子和盒子里的东西之间的关系上存在困难：Kat甚至用相同的表达"5颗糖果"来指称糖果堆数本身。更重要的是，虽然这些被试会说3=2+1，但是，一旦当$n\times3=n\times2+n\times1$反复出现时，他们就被弄糊涂了。Kat忽视了糖果的数量可以根据5(部分)在每次都相等来推论糖果总数的相等中推论出来——相同的乘数(相同的动作)被重复了。她甚至多次报告1，大概是由于她将实验者的糖果数与她给出的糖果数相混淆了，以致未能注意到乘法关系。总之，尽管被试最初肯定3=2+1，但是，由于他们既未掌握乘法，也未掌握加法，因此，被试无法理解把加法和乘法组合成的一个单独、系统的组合，这似乎毫不奇怪，因为，对3=2+1的肯定还只是一种局部的洞察，还没有概括到对加法形成守恒。而且，它也无法运用到乘积式的增加，或者需要对等量守恒的预备-结构进行分配。

水平 2

水平2的反应(从七、八岁到九、十岁，常常是10岁)仍然处于中间水平和探究阶段。我们发现，被试在糖果任务中的反应要好于其在豆子任务中的反应，这似乎并不奇怪。被试在豆子任务上的问题是被试总是对效应怀有一种甚至是比较系统的信念，认为总体比部分之和增加得更快，因为总体的值大于部分的值。因此，我们应该对这种错误的比例及其与正确的比例之间的关系进行分析。

Dev(7;10) 糖果任务：3堆3颗一堆的糖果与3堆2颗一堆的糖果，另加上3颗糖果。"哪个更多？"*一样多。*(5×3)与(5×2)+(5×1)：*一样多。*豆子任务：*它们一样*

多,因为我们总是2颗2颗地取。但他不能重复该游戏:*你取1颗,我取2颗*(他这样做了多次)。"完成了吗?"完成了。我们重新开始:*那里*(一个盒子)*更少*,*n(A+B)*。"你是怎么知道的呢?"*不知道*。碰运气而已。

Tal(8;10)　糖果任务:即使她很轻易地就宣称,3=2+1,还是过快地选择6堆的任务,然后是10堆3颗一堆的糖果任务。她利用2堆2颗一堆和1颗一堆的糖果,试图在6堆和10堆之间画上等号时,她被弄糊涂了。但在4堆3颗一堆的糖果任务中,她把2+l放在每一堆的下面。当我们继续进行7堆3颗一堆与7堆2颗一堆和7颗糖果的比较时,她立即得出结论。*你和我的一样多……你把它们放到一块,然后你的就和我的一样多了*。然而在豆子任务中,其表现只是糖果任务的简单重复:*那里*(*nA*和*nB*)*更多*。"为什么?"*因为那里有2个盒子,这里更少*(*只有1个盒子*)。

儿童在7—8岁的时候便掌握了糖果任务(也可见下面Nic的表现)。相等概念的形成既可以通过在3个一堆和配对(2+1)之间建立项与项的对应关系来实现,也可以把3个元素分解成(2+1)来实现。由于这些等量关系是对盒子与盒子里的东西之间关系的多次理解,因此,这些反应可被看作是动作的乘法(这个意义上的定义见第六章)。因此,我们可能已经谈到了分配问题。但是,在该水平上由于豆子任务中的容器比糖果任务的更多,因此被试产生了大量的错误,成功也只是部分的,除非先进行糖果任务。

Mar(7;6)　一开始便宣称3=2+1,但后来她说,*要么*(*nA+nB*)*更多,因为我们把一个又一个糖果放进去了,要么*(*nA*和*nB分别*)*有更多的糖果,因为它多两个盒子*。

Ile(8;5):*这两只盒子里的糖果比那只盒子*(*nA+nB*)*里的要多*。"肯定吗?"*肯定。那里有8颗糖果,这里……不,是一样多*。随后:*如果你何时指这两个盒子,那么,这里的糖果就更多*。

Lip(8 9)正确地描述了动作。"那么,这两个加起来与那个,谁更多?"*它更少*(*部分*)。"在那个(整体)里面呢?"*因此,那里等于……6和6……因此,相等*。"肯定吗?是不是最好去数一下糖果的颗数呢?"*最好是数一下*。

Pin(9;8)　*不,不相等。那里有许多,因为那里有两个盒子。我们把它们放在一块。这里的糖果更多*(*A*与*B*加在一起与*A+B*相比较)。

Bea(9;9)　*这里更多,不是因为这里有两只盒子,而是我们放进去的豆子更多*。"需要数一数码?"*都是14颗!*"那里有多少?"我们重新开始3的游戏:*一样多*。"你怎么知道?"*不知道*。

Ton(10;10)　*我认为,这里*(*总体*)*更多*。"为什么?"*因为你放进去的豆子更少……等一等:那里*(*两只盒子*)*的豆子更多*。他数了数,发现二者一样多。我们又从3重新开始游戏:*我认为这里*(*总体*)*更多*。

Xan(10;00)重复了以下主题:*把豆子放在一起的盒子里的豆子数更多*。

除了以上案例,还有些被试到10岁时还断言不相等,趋向于认为堆数多的豆子数就多,或者,更有趣的是,总体是我们"把它们放到一块去了"(Ile和Xan)。我们还发现,甚

至在7—9岁，通过唤起动作的正确顺序或对最初的总体形成守恒，有些被试也能够正确地得出相应的结论。与前面的儿童相比较，这些更聪明的被试是从糖果任务开始参加实验的，该任务给他们提供了一种学习容器和内容物关系的机会。

Ton(7;10)一开始有点犹豫，然后下结论说：*一样多*。“有什么理由吗？”*如果我把这两只盒子里的豆子全部放在那只盒子(一只盒子)，那么，二者是一样多的*。“肯定吗？”*肯定*。

Nic(8;10)断言糖果任务中的3堆是相等的。“现在，你取了30堆3颗一堆的糖果，我取30堆2颗一堆和30堆1颗一堆的糖果，谁的糖果更多呢？”*不，我们两人的糖果一样多，因为你有2+1，我有3，但我可以把它们分解：如果我这里放2颗，那里放1颗，结果就相等。即使你有30堆，结果也是相等的*。“300呢？”他笑了。*总是相等的*。豆子任务：*我认为，我的豆子和你的一样多*。[$n(A+B)=nA+nB$]，*因为你是一次给我的，而我是分两次把它们放在这里的。除非我搞错了*。“有些儿童说第一次更多。”*我说二者一样多*。

Iva(9;1)　*一样多*。他根据动作的顺序次数来加以说明。

概而言之，我们发现，具体运算水平上的在糖果任务上的概括化的成功，同时伴随着在豆子任务上的失败，这是由于被试缺乏概括化能力(Mar和Tai)，或者，被试在糖果任务上的成功只是以对固定和守恒的理解为中介。相比较而言，实验中不是以糖果任务开始的被试(从Mar到Xan的所有被试)，一般在豆子任务上将无法取得成功，这一事实可以这样解释：豆子任务中的附加的组合比糖果任务中包含了更多的乘数或盒子。

水 平 3

大约在10—12岁时，被试可以不在糖果任务的准备下便在豆子任务上取得成功。他们根据对动作、守恒或数字相乘的分析来做出判断；他们还偶尔求助于加法的结合性。

Van(10;10)　*一样多，你每次放1颗豆子，我放2颗，那么我就是你的2倍。但是，你分开放，只不过是放到了两个盒子里，显然，我们两人的豆子数一样多*。3倍的任务：*如果你放入5颗，我放入15颗，然后你把15颗分成7颗和8颗*。“我把它们分开来了吗？”*是的，5分成2和3。而我则分成6和9，结果也是15*。

Car(11;13)　*一样多，因为你每放1颗豆子，我就放2颗豆子。然后我们重来一次，但只用1只盒子。因此，数量是相等的*。“你可以用数字来解释吗？”于是他写下一行1，1，1，……，共10个，又在下面写20个2，2，2，……。然后他又分别写了两行1，每行有5个1(即5+5)，又在其下面对应地写上两行2，每行有5个2，因此是10+10，结果证明20=20。

Ori(11;9)　*我们两个人的豆子完全是一样多的*[$n(A+B))=nA+nB$]。*你把1颗*

豆子放在那里(A+B),我把2颗豆子放在这里[n(A+B)]。然后你告诉我把它们分别放入两个小盒子里,我每次放2颗,因此结果是相等的。“你肯定吗?”当然。“你可以解释给我听吗?”可以,但不是用豆子。于是她画了一些小圆圈:你:111→(11+1)。我:111111→1111+(11),这恰恰就是乘数的附加的组合,$n+2$。

Bra(11;9)通过描述动作和像Ori那样,通过画一些小圈,我们用数字把它表示如下:4→8,比较1→2和3→6,因此等式成立8=2+6,这样她就证明了自己的判断。

Dan(12;0)　*相等,因为24+24=48,即,$nA+nB=n(A+B)$。*

虽然没有一个被试能够抽象出,总体与一个数n的乘积——$n(A+B)$——等于该数n分别与各部分A和B的乘积之和,这将建构一个具有普遍意义的分配律,但每名被试都能够理解这种关系。Car、Ori和Bra甚至通过画圆圈,流利而毫无困难地把它表述出来了。这证明出现了一种新的必然性,这种必然性在水平2B时只在糖果任务中表现出来,在豆子任务中还处于一种准备状态。在第Ⅱ部分结尾,我们还将回过头来讨论该问题。

二、连续物体的分配

前面我们刚刚描述过,在糖果任务和豆子任务两种方法的结果之间存在极大的差异,现在我们增加另外两种方法,它们与糖果任务和豆子任务虽然在结构上是相似的,但仅涉及连续物体、表面和长度;这些物体可能对被试的操作有某种促进作用。我们采用正方形任务(ST),将正方形劈成几小块P。问题是,正方形的总和nS是否等于部分nP之和。该任务与糖果任务的相似之处就在于$n(A+B)=nA+nB$。至于更复杂的豆子任务,我们用一个要求长度组合的任务LT来替换它,材料是一些小纸片。在该任务中,当部分分别由$A\rightarrow nA$,$B\rightarrow nB$被拉长时,其总长$C(C=A+B)$也将变长为nC。问题也是:nC(A部分与B部分长度之和)是否等于$nA+nB$——长度的个别增加,乘数都为n。

实验获得了两个有趣的结果。连续物体任务与独立物体任务的难度相等,特别是长度的组合与豆子任务的相似。LT与ST之间的差异与BT和CT之间的差异相似。LT和BT分别比ST和CT要难得多。这种相似性不仅使实验者放心,而且有利于对分配加以分析。

正方形任务

给儿童两张纸,让他们把两张纸切成两块正方形(大约5cm²),一个留给自己用,另一个给实验者用。实验者把正方形切成3块小长方形,同时儿童也增加3到4块同面

积(5cm²)的正方形。然后,儿童把3块正方形再切割成9块长方形,它们与实验者手中的3块长方形的面积相等。然后,儿童把这些长方形递给实验者。这样,儿童(例如)就有了4块大的正方形,成人有12块长方形(3块是原有的,9块是被试给的)。问题是,让儿童确定,儿童自己手中的4块正方形的总和是否与实验者手中的12块长方形的总和相等。

以下是水平1的四个例子。

Cri(6;7)同意,3块小长方形等于一块大正方形,因此,老鼠吃到的东西一样多。但是,6块小长方形比2块大正方形要多:"老鼠可以吃到更多的东西吗?"*是的*。过了一会儿,她又改变了自己最初的回答:(一个大正方形和3块小长方形)*如果你把3块小长方形放到一块,那么它们与一块大正方形相等,但现在你把它们切开来了,那里是3块,而这里是1块,因此,老鼠在3块那里可以吃到更多的东西。*

Tin(6;11)　给被试呈现2块大正方形和6块小长方形(n=2指的是整体及其部分):*无论如何是不相等的,老鼠可以在你那里吃到更多的东西。*

7岁时,有些儿童在回答问题时还比较犹豫。Col(8;10)的反应最引人注意:给被试4块大正方形,实验者拿12块小长方形,你更多;*12比4更大*。"再看看。"*哦,一样大!因此你的地毯最小,但如果是通过计算(=数字),那么你的地毯最大。*

但是从7岁开始,儿童往往可以正确地回答问题,或者是自发的,或者是(经过实验者的建议——译注)最终取得成功。

Tia(7;1)　*我们两个人的正方形一样大,因为,如果你把它们放到一块*(最初的3小块),*它就成了那边的那块正方形。如果你把所有的小块放到一块,那它们就成了那块。看,我把它们粘合在一定。*"如果你不把它们粘合到一起呢?"*也还是一样多。*由此我们可以看出传递性:从$C=P+P'+P''$到$nC=nM+nM'+nM''$,等等——那是一种动作的分配。

Vid(7;10)　*一样大,因为我把它们劈成了两半,这两半是一样大。*"但现在我有6块?"*没关系。*

Har(8;10)　*你更多张纸,因为你把它们劈开来了。但我们两人的一样大。*

Van(9;11)　*把3块小长方形放在一块,便成了一块大正方形,把所有的小长方形放在一块,便形成4个大正方形。*

我们看到,该任务与糖果任务无论是在最初的错误,还是随后观察到的成功,都极其相似。

长度任务

我们割出一片长方形的纸,长约10cm,同时也让被试割一片纸,使它的长度是这片

纸的两倍。[1]然后实验者把自己割出的纸片切成不等长的两段，A 和 B，那么实验者纸片的总长为 $(A+B)$，而儿童手中纸片的长度总长为 $2(A+B)$。然后，我们让被试分别割出两片纸片，其中一片为 $2A$ 长，另一片为 $2B$。所考察的问题是让儿童确定：$2(A+B)$ 是否等于 $2A+2B$，或者更一般地说，$n(A+B)$ 是否等于 $nA+nB$。被试可以用胶水把 nA 与 nB 粘合起来以找到问题的答案。可以看出，该任务与豆子任务几乎无异。以下是水平 1 的一些例子：

Nat(6;2)　*不同意 $(A+B)=A+B$，因为 A 本身是一片非常长的纸条。$nA+nB$ 用胶水粘合后与 $n(A+B)$ 的长度就更加不相等了。我想说，它要更长一些……不，更短一些。*

Lua(6;2)　*A 和 B 比 $A+B$ 更长，因为它们是两片纸条。*

在 7—10 岁(正常的话应处于水平 2)，也发现存在同样的困难：

Col(7;4)说，*$2A$ 与 $2B$ 粘在一起后更长了，因为它是被弄长了。*

Dal(7;5)*在正方形任务上取得成功后，将其概括化到长度任务：一样长，因为粘合起来后是 2 倍[$2(A+B)$]，这两片纸片($2A$ 和 $2B$)是那两片纸片(A 和 B)的 2 倍长。*

Mar(7;10)*假设二者是等长的，但要通过质的补偿：一样长，因为我们是把等长的一片纸片分别割成 2 片更长的纸片和 4 片更短一些的纸片。*“你肯定它们等长吗?”*是的。*“怎么证明呢?”*测量一下就知道了。*

Phi(8;5)　*整体[$2(A+B)$]比那片纸片($2A+2B$)更长些。*

Pin(9;8)　*也许那片纸片($2A$ 和 $2B$)更长些，那片纸片(总体)更短些。*

Bea(9;9)说，*$2A+2B$ 更短。*

直到 10 岁，被试还要经历与水平 1 的被试所经历的同样的困难，但正方形任务不再成为一个问题。因此糖果任务与正方形任务之间的关系类似于豆子任务与糖果任务之间的关系。我们将提供一些水平 3 的例子，从 Van 开始，她在豆子任务上的表现处于水平 3，但在长度任务上还表现出某种犹豫：

Van(10;10)　*它们一样长，因为我们并没有使用两片纸片(A 和 B 是两张新纸片)，我们只使用了一张纸片，长度相等的一片纸片。*“肯定吗?”*是的，我肯定，但没有十分的把握。*“[$2(A+B)=2A+2B$，重述一遍动作]怎样?”*是的，是的，相等。*“肯定吗?”*不太肯定。*

Car(11;3)　*长度相等，因为它是由同一片纸片组成的，只不过把它剪成了 2 段，每次都是这个长度的 2 倍。*“需要进行比较吗?”*不需要，如果计算(推理)正确的话，长度应该是相等的。*

Ema(11;4)　*长度相等，因为我们拿的是一整片纸片，而我拿的纸片是你的 2 倍长，然后又把它剪成 2 段，因此，我的纸片是短纸片的 2 倍长，因此二者长度相等。*

---

① 我们把一半的纸卷起来，以避免被试做出纯粹的知觉判断。

我们看到了推理的清晰之处，但令人惊奇的是，这种推理的清晰之处将这种运算发展的高级水平运用到这些相对较简单的演绎中。我们还惊奇地发现，有一个被试(Van)对其逻辑必然性尚存有犹疑。

三、结　论

解决豆子任务和长度任务的必然性显然比在糖果任务和正方形任务上的成功操作所表现出的必然性处于更优先的地位，因此，也就更“强”。为了证明这一点，我们首先必须仔细分析这些任务之间的差异所在。在糖果和正方形任务中，最初的总体在以下操作过程中是保持守恒的：在糖果任务中，3颗一堆的糖果和正方形任务中儿童手中的大的正方形只是某种重复而已，因为最初的模型总是保持恒定，并可以获得。而在豆子任务和长度任务中，最初的总体从一开始便发生了变化：实验者的总体$A+B$变成了毫无关联的A和B，但儿童最初的总体又由于乘以n而变成了2倍或多倍：$n(A+B)$。同样地，长度任务中的纸片被成人剪成2片，被试的纸片也被剪成两片，其长度对应地是前面二者的2倍或多倍。结果是，在糖果和正方形任务中，分配在对总体的守恒中找到了它的支持。这种对总体的守恒极大地促进了对关系的理解。但在豆子任务和长度任务中，需要形成守恒的是增量xn。这是一个极不相同的问题。事实上，大家都接受的一个假设是，正如Ile、Ton和Xan在水平2上的表现一样，当同时乘以同一个数(2)时，一个大的乘数(这里指总体)比许多小的乘数增加得要快。或者反之，即使是很小的许多数相乘，其所得到的积也可能比一个最初比它大的数要大。

我们这里正在讨论的是错误的比例关系问题；但是，隐含在这些反应背后的是对比例的求助。与当前这种分配有关的正确的比例关系是：

$$\frac{n(A+B)}{A+B}=\frac{nA}{A}=\frac{nB}{B}=\frac{nA+nB}{A+B}$$

这些关系明显在豆子和长度任务中对分配的理解中有所发现(因此，这种困难直到水平3才得以解决，在该水平上，比例关系才得以建构)，但它们在糖果和正方形任务中的作用并不相同，因为最初的总体的守恒所提供的支持不同。

总之，分配在于理解总体和部分增量的同质性。拿糖果任务来说，糖果被分成3颗一堆的、2颗一堆的，或1颗一堆的糖果，而在正方形任务中，正方形被分成3个小的长方形，增量xn是一个一直可见的模型的几次重复的结果，在那里，总体和部分的相等关系很容易就可以得到证明。而在豆子和长度任务中，总体分别被增加两倍，然后被分成各部分，各部分又再相乘。在这种情况下，要在一个模型和它的复本之间建立一种对应关系，以确信新的总体确实等于2倍(或3倍)的部分的联合体是不可能的，哪怕通过推论也不可能。因此，在这种情境中，增量的同质性只能通过推论并且必须基于外显的推

论(如水平3那样)才能获得,而在糖果任务和正方形任务中,它产生于知觉的多次重复。在这些任务上观察到的水平2上的成功并没有超越分配在动作中的作用。

把这些差异避开,我们可以看出,分配中的必然性多半伴随着一个整合的过程:在解决前述任务中要求的每一次和每一个加法和乘法运算本身是很简单的,但是它们的组合却并非那么简单,因为增加的东西就是增量。这也就可以解释为什么整体系统内的整合要比结合性更复杂,因为,与后者相比,前者是一个更高水平的系统。

第八章　证据建构中的充分必要条件

与 C. Brulhart and S. Dionnet(一)
and A. Henriques-Christophides(二)合作

前面我们分析了因果关系和空间关系中所固有的必然性形式(第一到四章)与组合或预备结构的一般方式中所固有的必然性形式,现在我们对最能代表逻辑必然性的推论机制进行研究。但是由于所有逻辑-数学推理是固有的必要条件,且由于我们已经花费多年时间来研究它们的运算结构,那么对于理解必然性,接下来要做的是集中于最简单形式的证实,从发展的观点来说,这种证实也是最有指导意义的——证据的精心组织。本章所选择的问题是能想象的最简单的问题。它只与一致性有关。

一、连续整合问题中的充分必要条件

实验者有一个由13条边组成的大而非常不规则的封闭图形,其中12条边是直线,形成各种角度,一条曲线连接图形中剩余的两条边。这个图形隐藏在20个矩形覆盖物下,这20个矩形,儿童可以任意取出(图1)。

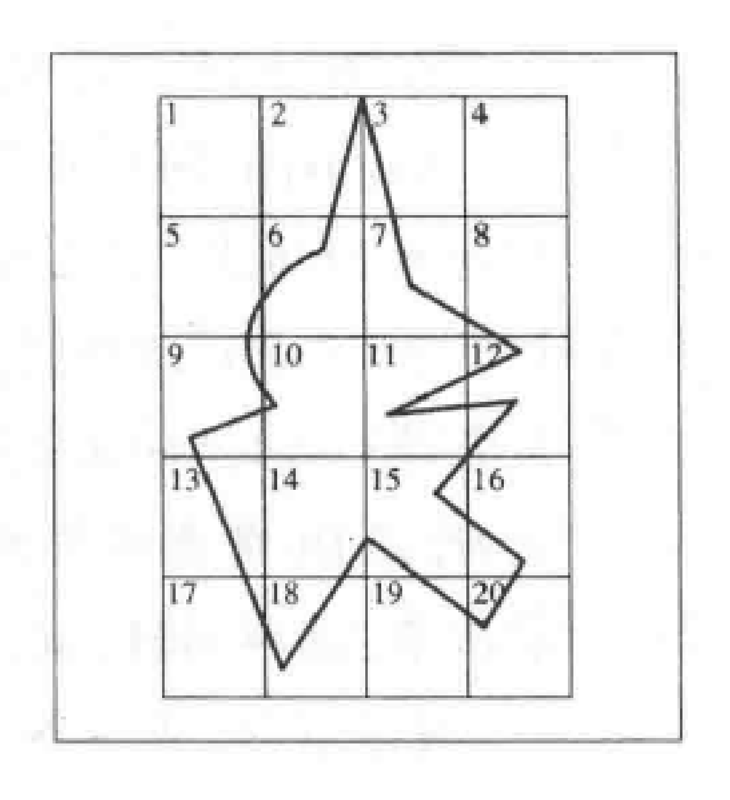


图1

在被试面前有12个相似图形,其中只有一个和隐藏图形是一样的。问题很简单,即排除其他图形从而找到一致的图形(图2)。

对于作为组合结果的必然性的所有形式来说,这里有三个方面:限制(必要充分条件)、精心组织(理由)和扩大(结

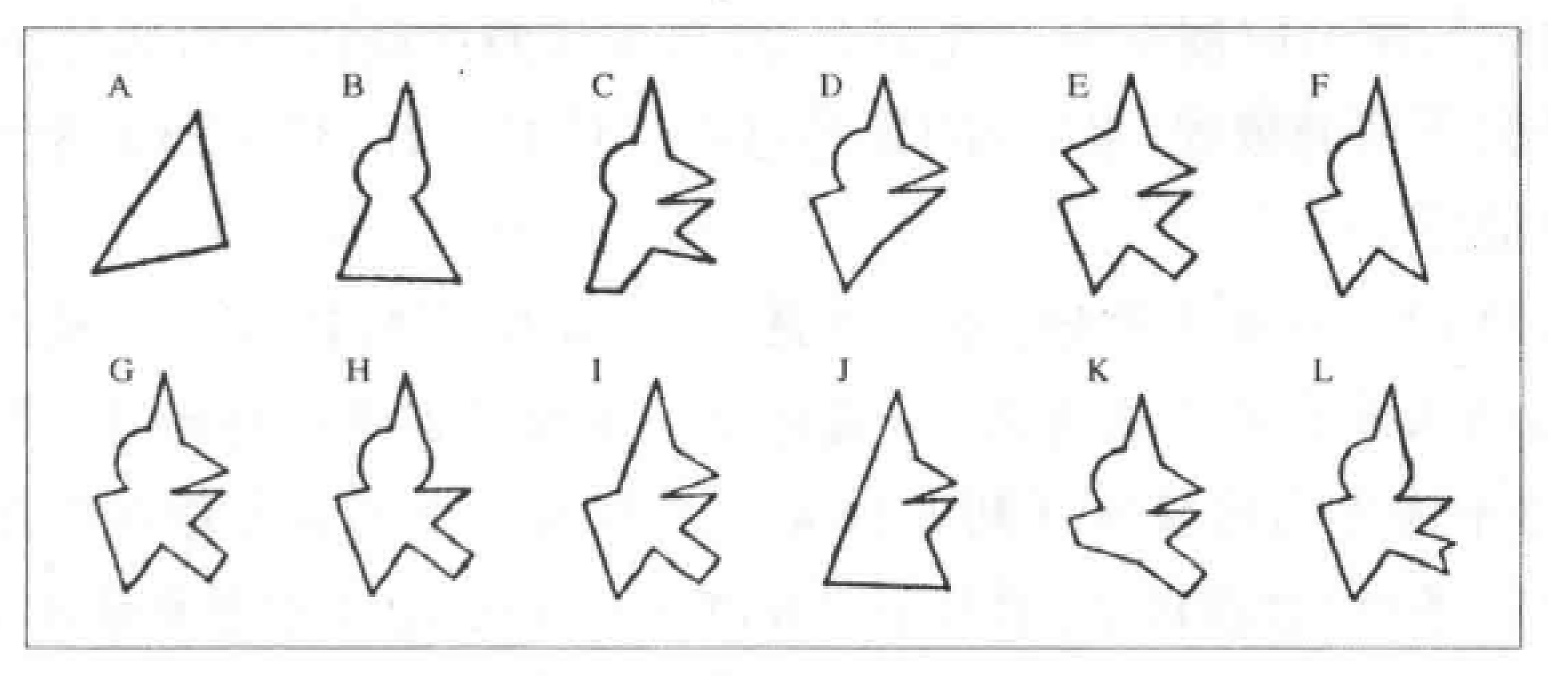


图2

果)。这里所呈现的问题解决主要是关于寻找证据——这些必然性方面中的首要方面。在所有的年龄水平上进行此项研究很重要。另外,问题让个体对所用的必然性的强度进行分析,从一个较低的程度开始(必要条件,但或多或少的非充分条件)进行到较高水平(必要条件,同时也是充分条件)。

水平1A和1B

水平1A的两个基本特征是缺乏任何种类的证据及不同指标间的协调,不同指标还未整合到一个整体中,因此,当被试思考其他线索时就会忘记原先的线索。

Fab(5;10)挑出覆盖物2(发现一条斜线,这是12个图形都有的):*它是A,J*。“其他的呢?”*它可能是I*。“你想做些什么?”*挑出6*(在2下面)*看看图形的其他部分*(扩展至图形左上方的一小部分)。*是I*。“为什么?”*因为这里是门闩。哦,不是D*。“就那一个吗?”*D,因为它和G有相同的东西*(指着那条曲线)*并且和那两个也相同*(L和H)。“你知道是哪一个吗?”*不知道*。“你能做什么来确定?”*打开图形*(隐藏图形)*的下一个来确定*。“打开另一个盒子怎么样?”他挑出5。*那是一样的。或者可能是B,H,L,D,K,F*。“现在挑哪一个?”*9*(和5相符合),*是G,H,L,F,都是*。“但到底哪一个是?”*C,H,L,K,D*。“再挑一些,你继续停留在这边吗(2,6,5和9之后)?”*3。它可能是G,H,L,D。是G,因为线条方向是相同的*,等等。他甚至指出I没有曲线。

Nat(6;6)同样在开始时就挑出2并说道,*是A,因为它*(和假想的、隐藏的图形)*有同样的端点*。“2已经能告诉你它是A吗?”*那么它是G,因为这也有端点*。然后她打开7:*它是C因为这有一个点而这里也有*(在7里可以看到一个角)。Nat完全确信它是C,但立即又说*它也可能是D*。然后她打开了6和11:*是的,它是C;那么,它是H,是D*(指出那条曲线);*它是二者之一*。之后又说是G,*但是我们应该把它们都拿出来,这样的话,就能看出它是正确的还是错误的*。

Nad(6;4)是一个矛盾的例子,她在一个端点上选择了H,忘记了先前她已经用矩形7排除了它。在把所有的覆盖物都拿出之后她才找到了G。

当前被试的探索限制在方格线的上部,从未探测中线以下的部分,这条中线从9到12;与之不同,下面的被试(水平1B)还通过拿开从13—16,17—20的覆盖物来获得原图下面部分的信息。

Cla(6;10)也从2开始,并认为是A,然后打开3,认为是J,他发现7也证明是J。然后他又拿出两个或者三个:*我想看一下它是否是正确的*(J的两个点),他打开11和12并认为他的猜测得到了证实。*然后我将挑出6来看一下这里是否是圆的*(曲线)。*是的,它在这里,它是D。我将进一步尝试因为它或许是B*。哦,不,*这里不是鸟嘴*。在那之后:*我最好打开这里*(13到16!)。他拿出16:*错了,因为这里实*

际上是一条直线(隐藏图形的右下方):它是I!"确定?"确定,但是这里也一样(G),它是正确的(拿出14—15)。一样(对于G和I)。他拿出13。是G,因为这里(9)是圆的,而这里(I)不是圆的。"你已经打开了7。这不够吗?"我不再记得了。"你可以通过拿开较少的矩形来找到它吗?"不能。

Ver(6;9) 总共拿出了2,3,4,6,5,11,14,10,13,15和20。拿出2后,她说:那是C的一块。"只是C的吗?"也是I,E和F,但是其他没有。只是在后来她才发现所有的图形都有一个端点。拿出5后,她认为是B,或者G,B,H,K,L,但不是I,因为它没有圆弧。拿出11后:它是D,因为这里有一个端点(接近底部)。也是G。但是拿出13后(这对大约6个或7个图形来说都是相同的,D和G也包括在内)她得出结论:应该是G,因为这里有更多的空白,在拿出15之后(决定性地):是的,是G,因为这是一块(右下方)。因此,我们打开20来看它是否在继续。但询问她时,她承认,一些矩形是没有用的——如1,4,9,13,17,18,19(这对9和18来说是不正确的)。她肯定地认为,其他的都是必要的。

Ste(7;4) 尽管他在这一年龄,但仍然是通过尝试错误进行的,期间他记得某些信息。起初,他提出几个可能的图形:对于3,是J或者H;对于7,是I,C或者K;对于6,是K,或者J,或许D;对于5,是L,D,G或者K等。但是从18开始:我知道它是谁了,它是G。"确定?"确定。不,为了确定,我应该打开13……如果我打开9,就会更好(确定)。"或许D?"或许,因此我最好打开这里的一个盒子(右下)来看看哪一个是正确的。在一些较多的犹豫之后(12可能带来L):不,它是G,我确定。他用盒子20证明。最后的选择,G,通过5,6,18,9,12和20就可以挑选出来(在打开的10个盒子中)。

因此,水平1A缺乏任何种类的整合和充分的必然性。整合的缺乏从两个方面表现出来。第一,对矩形1—12的探索受到限制,表明被试并没有预见到隐藏的图形占据了所有格子(事实上,只有1,4和10是空的)。当Fab拿出6"来看图形的其他部分"时,它只是紧跟在盒子2之后。第二,探索要么是随机进行的,要么是逐步进行的,这样不同的指标决不会整合到一个系统内。每一条线索只提供本身的一部分信息,这些信息是几个图形所共有的。特别显著的是,可能性只被部分使用:水平1A的被试没有一个说出和Ver(1A)相同的话,在顶部"都有一个端点"。Nat首先指出A是因为这个点,接着,当拿出3时认为这证实了A;但是她也同意可能是G,"因为这里有一个端点"。她没有看到所有图形都有这个端点。这种指标整合的缺失甚至会导致矛盾,如Nad,忘记了她已经用盒子7排除了H,又选择了H。另一个例子是Fab,他通过打开6发现了曲线,但后来选择了I,整个图形没有一条曲线。

从必然性的观点来看——整合的推论方面——我们可以得出,水平1A的反应只是获得了作为非充分条件的前必然性。对于能够充分证明正确选择G的线索来说,对左边曲线的信息(有两个较下的角)和右边的及右下的准矩形所提供的信息进行协调是必

要的。单个指标都能在其他图形中找到。只有它们的联合能使G的选择成为必然,且是证明的充分条件。当单个线索使得水平1A的被试"十分确定"(如Nat所说的)地说它一定是某某图形时,这就清楚地显示了该水平上的个体不理解的东西是什么。这并不妨碍他们随后很快改变主意。因此"确定"只意味着"确定它可能是正确的",完全确定只有在那种条件下才能获得,即由同一个儿童Nat提出的:"我们应该把它们都拿开"来看"它是不是正确"。

水平1B的反应在上述两个方面开始出现整合。有目的地对图形的主要部分进行探索:Cla想看看他是否能找到J的两个端点和左边的曲线;Ver探索了较下部分的格子,在15之后拿出20来控制它的形状;在Ste(结束时)身上也可以观察到相同的行为。对于线索,他们现在可以通过直接寻找相邻的部分来进行部分整合,而不再是逐步的风格。这样,从某种观点来说,在这个水平上获得了必然性。首先,被试开始懂得充分条件同时需要几个线索,单一的线索只能带来几种可能性:因此,Ver把她认为无用的线索(当在9和18上犯了错误时)和那些能够"确定"的线索进行了对照。第二,"确定"具有特殊意义。Ste在看到18后说他确定是G,但是立即就提出改正:"不,如果要确定,我应该打开工3……和……9";通过打开20他证实了最终的"我确定"。但是这些获得仍然只是部分的而不是明确的论题。

水 平 2

在具体运算之初,可以观察到几种过程。

Myr(7;1)用排除的策略保留了线索所揭示的可能:3排除I和E;6排除J;7排除L,B和H;15排除D,C和K;排除的图形归为一类。只保留E、I和G(I已经被排除,暂时又回来了,但由于缺一条曲线又被排除)。5证实了G;*那是正确的。我仍要打开9*(打开)。*现在我确定了*,但是她继续打开盒子。

Tal(8;10)　实验者把盒2移走:*那里有东西,因为所有的图形都有一个端点。*"你准备打开哪一个?"*16号*。"它将会告诉你些什么?"*它是圆的还是直的,这里是否有一个鸟嘴*。"如果打开16号,你就能说出哪一个是吗?"*我不这样认为*(她打开了16)。*那可能是K,J,H,或者G,I,E,但不会是另一个:只有这些在这里有矩形*(在*右下方*)。*我将打开7*。"为什么?"*看看它是否是圆的或者到右边是否有一个圈*。她打开7。*它可能是D,E,J,K,J或G*。"C怎么样?"*也是,但不是B,也不是L,A,因为这里没有圆形。我将打开13来看看它的走向是<还是直的,还是像那个*(不规则四边形)。她打开13。*它是G,H或者F,E,D,L。你可以排除B,A,J,K和C因为线是/走向*。然后她挑出6号来看它是端点还是圆的(拿开6)。*它不是K,它可能是G或者C。它是G,因为它像那个而不像那个(斜线)*。然后她把所有图形和隐藏图形

所显出的部分相对比：是G。“确定？”是的，是G。

Pie(8;9)*同样说出他要得到的信息：3号将显示它是否是弯的或者还有一点圆。*

Tie(8;11)*对以下可能的方法进行分类：从上到下一个一个打开；或者先做中间然后是两边。事实上，他从5到16到对比两条外边并决定支持G，他用14(之前他打开了2,3和7)，和对打开矩形所揭示的信息与图形G进行逐项比较证明了G。“你确定？”绝对确定，(但是)我最好再打开一个：你决不会知道，这里或许还有其他东西。*

Pha(9;3)*在检查了6,7,15和17后找到了G，并认为不可能再是其他图形。尽管在这一年龄，她仍然宣称要确定就应该打开所有的盒子。*

注意到的第一个进步是行动的预期特征。因此Tal详细解释了她打开每一个覆盖物能知道些什么。这涉及12个挑选图形和所选择的(模型的)变量特征之间的比较：线弯向左边或弯向右边，“鸟嘴”“矩形”的出现和数量，或者下面部分的两边都没有，等等。如此有目的、有指向的探索预示了一种方法，这是该水平上的第二个进步。因此，Tal搜索有用的线索，Tie审视邻接：“从上到下一个接一个”或者“先中间后两边”。第三个进步是形成类别，而不仅仅是可能性(这在水平1B上就已发现)，但是只是对排除项目：“你能排除的，”Tal说，“是B，A，J，K和C。”或者对于Myr来说，是J，L，B，H，等等。不过即使该水平的被试通过提供原因成功地证明了必然性，但该水平上的获得并不是任务所要求的最高等级的获得，那是给定证据的必要和充分特性。这些反应和下一水平的反应的区别是：每个被试在确定声明“G是正确的”之后，继续打开新盒子或者认为打开所有盒子更能确定。因此Myr在说，“现在，我确定”之后，继续打开盒子。Tal，尽管她有系统的行动方案，但在最后，她把隐藏图形所暴露的部分和12个图形选项进行了对比。Tie也宣称他确定G选项，但是他还加了一句：“我最好再打开一个：你决不会知道，这里或许还有其他东西。”现在，除非在隐藏图形中有窍门，否则，很显然，从任务的特性来说，即它必定和呈现的12个图形当中的一个相对应，因此它成为检测这些图形的充分条件，来找出做出一个选择所了解的所有有用特征。甚至在9岁，Pha用该水平的方法找到G，得出结论说需要“打开所有的盒子”才能真正确定。

水平3和结论

最后一个水平(包括水平2B和水平3，对两个水平进行观察没有发现差异)是最终掌握必要充分条件的水平，尽管在决定充分条件时可能会出现许多错误。首先，有这样一些事实。

Phi(8;8)*挑出2,3和7并提议是J或K。它仍需要另一个：9号(拿出来)。不是*

J,是*G*。“确信?”或者*K*或*D*。他排除了F,C,B,A,J,L和I:它可能是*K*,*D*或者*G*。他挑出14:是*G*。“足够了?”他拿开12。我绝对确信它是*G*。“不再需要其他什么了吗?”它可能需要14(打开14)。现在,我绝对、绝对地确定。“一个男孩告诉我应该把它们都拿开。”不,以上那些足够了。

Fra(9;7)在拿出2,3和6后:它可能是*B*,*C*,*D*,*G*,*H*,*L*,*K*(忘了*F*)。“有什么是不可能的吗?”有,*A*,*E*,*I*,*J*。我将挑出7来看看它是直接朝向下的还是圆的。事实上他拿开了15。它是*G*。不,我还有点怀疑。*K*也像,它不是*B*,*H*,*L*,它可能是*K*,*G*,*C*,*D*。拿出了7和13,这样看来,它只可能是*G*或*K*;然后他移开9,这样就证实是G:它不可能是其他的。“你不需要检查所有的盒子就能确定吗?”是的,比如,6能告诉我它是圆的还是直的。

Sab(9;11)在最后:“把它们都打开?”不,不需要把它们都移开,因为只要看一部分就可以知道了。“你怎么做?”首先,随机(6),然后移开8之后可以知道它是直的、圆的或者一个鸟嘴;移开18可以知道它有没有尖角,19可以看到它是否是直线。

Lip(9;10)在移开9,18,15,8和12之后:“需要把所有的都拿开吗?”不需要,那样做是错误的,只从那些就可以知道了。“你怎样做的?”我看两边。

Flo(10;10)挑出6,13,14,8和19,每次都解释她找到了什么。当她拿出不提供信息的一块时,她说:那一个(3)没有告诉我任何新信息,因为它们都有尖角。对于移开所有的盒子,不值得那样做。“只要一些就可以了吗?”是的,那足够了。“你怎样做的?”更接近边缘,因为中间没有多的信息。“你能用其他方式做吗?”我可以从这里开始(18—19)。

Eri(11;9)在拿开3,9,5,11和15之后:“不是它们吗?”它不是必要的:只有在那些主要的盒子的基础上,才能够说它是那个或那个,之后,也就能确定它是*G*。

Aut(12;9)只在拿开6,18,12和16之后:可以确定了。“怎样确定?”我看那些和其他图形都不相同的部分。通过打开18,就可以知道它像谁了,等等。

我们看到,在判断必然性G的充分条件时这些反应的一致性。这和水平2上的必然性的近似特征形成对比,在水平2上,就如Tie所做的那样,被试很容易断言,“你决不会知道”,最好是看到全部。所问的第一个问题是这种必然性是如何得到的;第二个问题是为什么被试发现它是充分条件。

对于第一种观点,必然性由所采用的方法确定。在水平2上已经部分用到后者,它经常是不明确的,甚至在水平3也是这样,但是,被试Fra清楚地展示了这一点。首先注意一条或两条线索,然后建立两个互补的类别:可能的,或者和确定一致的线索是一类;不可能的,即没有涉及的特征是一类。这样,在挑出2,3和6,以及知道在顶上有一个长的尖顶和6中的一条曲线的开端之后,Fra得出B,C,D,G,H,L和K是可能的(他只是忘了F)。然后,不可能图形的类别包括A,E,I和J之后,由矩形15提供的线索(右下方的

矩形）排除了B，H和L，把可能性线索类别减少到K，G，C和D。然后，在拿开矩形7和13之后，只剩下G和K，接着矩形9证实了G。因此，必然性是一个由上到下的过程的结果，每一步，减少可能性的数量，相应增加了不可能选项的数量：在这种重复结束时，系统地运用二分法，图形G成为必然件——唯一的一种可能。

这种方法的充分特征和它逐步揭示的必要条件，与由下到上或回溯的过程所得到的结果大不相同。一旦由一条线索所提供的信息被记录，它就会和先前接受的信息结合，从而确定所有重要的方面都已经探索到了：如Eri所说的，“以主要的（线索）为基础”对于它是那个或者那个的判断是充分条件。现在，这个回溯的、由下到上的程序只是整合，是必然性的条件和结果。它存在于有多种相似性和差异性的统一整体中，这些相似和差异是通过12个刺激图形的对比所揭示的，以及来源于决定还要探测那个大的、隐藏的图形的哪一部分。总之，整合是一种功能机制，其结构表达式就是必然性。

一般而言，我们注意到了从一个水平到另一个水平上获得的规律性。在水平1A，整合处于底部，因此只有表格的较上部分被探索到，连续陈述的特征是遗忘甚至矛盾。这样，被试所获得的确定性源于前必然性（部分正确，但是不彻底的推论）和虚假必然性（短暂的相信，认为一个特殊的选择是唯一有效的选择，然而，实际上，它只是其他可能选择之一）。在水平1B，呈现了整合和部分必然性，对较下部分的表格和较上部分的表格进行部分探索。在水平2，在移除盒子的顺序上，不同目标的描述上，及预见提供有用信息的线索方面有了实质性的进步。因此，被试开始建立可能性图形的类别和排除图形的类别。但是遗留的缺陷是没有认识到穷尽性，这会妨碍被试思考作为充分条件的证据，甚至当这些证据是充分条件时也可能。只有在水平3，整合的提高带来了对确立必要条件的确信，当这些必要条件整合在一起时就成了充分条件。

二、可能性问题中的充分必要条件

初一看，这里所研究的问题比上面的问题简单，因为它并不涉及多个变量。我们给被试两个信封，A和B，一个里面有10个蓝色的芯片，另一个有5个蓝的和5个白的。接下来的任务是通过取出一定数目的芯片来鉴定信封。如果被试说应该拿出10个，我们就问是否取出8个或者9个也同样能知道。如果她说取出6个就已经能确定了，我们就问，如果取出7个或8个，这种确定性是否会变大等。现在，这个问题与重新构建隐藏图形的问题不同，它可以被10—12岁的大部分被试解决（水平3的一般年龄水平）。在这个水平上，有2/3或12个中有8个被试能取得成功。思考“为什么一个显而易见的必然性的充分条件的获得如此之晚”是很有意义的。

水平1和2

下面是水平1的一个例子：

Fra(6;5)　“这是哪一个信封?”*是有蓝色芯片的信封*。“确信?”*不知道*。“该怎么做?”*看*。“拿出你想拿出的芯片，需要多少个就可以确定了?”*10个*。“确信是10个?’*是的*。“如果你拿出9个呢?”*那不够*。“另一个孩子告诉我说6个就够了。那不对。“为什么?”……

在这个初始水平，对有10个蓝色芯片而不是5个蓝和5个白的确定，只有当拿出10个芯片时才能断言。甚至9个就是不够的，因为没有精确符合(经验性的虚假必然性)。

在水平2，我们发现了必然化演绎的始端：任何数量的蓝色芯片都提供了确定性的开始；但是显现的数目越多，确定的程度就越大。之后，在水平2A和2B之间，被试受到以下限制，信息变成不充分的了。

Pan(7;5)　“需要拿出几个?”*2个*。“能确定它们都是蓝色的吗?”*不太确定*。“那么?”*如果是3个确定性就大一些*。“要完全确定呢?”*4个*。“绝对确定?”不，“那么，多少个?”*10个，甚至9个或8个*。

Sca(8;6)　“需要多少个?”*10个*。“少一些可以确定吗?”……“要确定，需要的最少可能是多少?”*3个*。“完全确定?”*不，5个*。“另一个孩子告诉我只要6个，5个就不行。”*5个也就足够了*。“另一个信封里有什么?”*5个蓝的和5个白的*。“或许你拿出了5个蓝的，而5个白的留在里面?”*不，那不可能*(事实上，那种可能性很低，但这显然不是Sca的理由)。“有6个会不会更安全?”*不会!*(积极地)“4个会不会不够?”*会*。“为什么? ……那么5个和8个，可以同等确定?”*是的*。

Ran(9;2)拿出4个：“这足够确定了吗?”*不，它应该拿出8个*。“拿出8个或10个，哪个会更好些?”*10个，因为它比较多*。“尽可能少但仍然能确定?”5个。“那够吗?”*够了*。“为什么?”*因为它是10的一半*。“一个男孩告诉我，5个不够，应该是6个，他说得对吗?”*不对*(拿出5个芯片)。“它是哪一个信封?”*有蓝色芯片的那个信封*。“另一个呢?”*5个蓝的，5个白的*。“或许你是从另一个信封中拿出了5个蓝的?”*不可能。它们都是蓝色的*。

在这些反应中所显示的不同错误，来源于对外延的排他性推理困难，以及对A中的必然性(=10个蓝色芯片)和B中的可能性(5个蓝色+5个白色芯片)或与B矛盾的可能性进行协调的困难，还有协调A的充分条件与不充分条件或多余条件之间的困难。被试需要理解的是，1到5个蓝色芯片是A的必要条件，但对B来说也是可能的，因此不是证明A的充分条件；6到10个蓝色芯片必然是A，并与B相矛盾；但是6个蓝色芯片就足够了，7到10个就是多余的。现在，妨碍这些微妙差别的一般障碍是整体或部分的外延

与它们的内涵之间的不充分分离。有时，在某种水平上，被试认为从一个50的集合中取出的10个元素比从一个20的集合中取出的10个元素在数量上要多，好像外延是一种内涵的特性。类似地，取出3到5个就可以向被试表明所有10个都是蓝的，这对5来说是尤其正确的："因为它是10的一半。"（Ran，甚至已经9岁了！）但是，因为在这个例子中被试忘记了B的组合，当她再考虑它时，就理解了她假设的、非必要性特征的公式（1到5）=10，她退回到复本的争论并得出结论：拿出蓝色芯片的数目越多，全部都是蓝色的确定性更大。这就避免了决定性的困难，即对必要充分条件和可能条件的协调。

水平3

只有10—12岁的被试才能把这些多重关系和必要条件协调好。下面是两个例子，第一个处于确定性（充分性）的中间水平：

Pat（10；1） "如果要确定，必须拿出多少个？"*可能是6个，如果拿出5个，就可能错了，因为可能拿出5个蓝色的芯片（B的），而这里还有一些白色的芯片。*"拿出10个更好，还是拿出6个更好？"*10个，因为可以看到所有的芯片，这样就可以确定了。*"6和8哪个更好？"*总是多的好，因为可以更确定。*"6和7呢？"7（*同样的理由*）。"5和6呢？"*6，因为可能拿出来5个蓝的芯片（B中），而把5个白的留在了信封里。*

Rav（10；4） *它需要6个。如果你拿出5个蓝色的芯片，你就不知道这里是只有蓝色芯片还是它是混合的。*"6个和7个，哪个更好？"*都一样。*"5个不够吗？"*不够，如果你拿出的只有蓝色的话。*

看看Pat对信封B的直接推理——5个蓝色芯片与5个白色芯片或其他5个蓝色芯片是相容的——很难理解为什么他没有看到拿出8个或10个是多余的。理由是，相对于简单保持可能性而言，充分的必然性要求必然性和可能性之间的更紧密的综合。

对于整个问题和隐藏图形（部分Ⅰ）之间的关系来说，后者明显比较容易，因为它只涉及了内涵的组织特性，而前一个任务需要内涵和外延的分离与协调。和早期研究指出的一样，这些能力更复杂。它们要求辨别更多的形态，特别是，最低限度的充分条件（6）和非必要的充分条件（7—10）以及不提供信息和提供过多信息的冗余性。

第九章 相互依存信息的证据

与 J. Vauclair 和 E. Marbach 合作

在前一章中,被试所发现的各种不同的必然性条件只是由一者简单地附加到另一者身上,二者并不存在相互的影响:例如,在某一点上是一条曲线并不意味着在另一点上也有一个角。在本研究中,采用的方法类似于“聪明者游戏”,游戏成功的必然性条件是必须获得某种信息,该信息在各个阶段之间会发生变化,且前(些)阶段对后(些)阶段将产生直接的影响。实验采用3张动物图形(马,H;老鼠,R;小鸡,C)或4张动物图形(加上猪,P)。将这些图片隐藏在屏幕的后面,并以固定不变的顺序排列。给儿童一组与图形对应的物体,儿童的任务是排列这些物体,使其顺序与实验者的图形顺序一致。儿童得到的关于排列顺序的唯一信息是正确排列的个数,至于具体哪个位置正确儿童不得而知。把一些小黄球放在儿童排列好的物体序列的旁边(Ⅰ),黄球的个数表示儿童排列的正确位置数(即黄球数从0到3或4),但并不告诉儿童哪个位置是正确的。然后被试将在第一行(Ⅰ)的下面又摆上第二行(Ⅱ),黄球个数表示儿童排列的物体顺序与隐藏图形顺序相同的个数。以此类推,摆上第Ⅲ、第Ⅳ行,等等。

将各行所提供的部分信息加以整合,被试便能够最终建立起与隐藏图形顺序完全一致的顺序。这些信息彼此之间相互影响,相互依存的程度越来越高:如果没有一个位置正确(黄球的个数为0)被试就知道她不得不对整个顺序进行重新排列。如果在4个位置中有2个位置是正确的,那么,被试就可以推论,如果自己把整个顺序都打乱,那又将产生2个新的错误。总之,每一次新的信息必定和前面推论出的信息有关(并不是简单的附加,如第八章的那样)。尤其值得一提的是,排除与直接的演绎同样起着积极的作用(关于后者我们可以考虑以下预测的情况:如果在3个位置中有2个是正确的,或者在4个位置中有3个是正确的,那么这剩下的最后一个位置肯定也是正确的;我们应对这种推论给予特别的注意)。还需要说明的是,如果被试第一次排序碰巧全部正确,那么,为了创造一个新的问题,我们自然得改变顺序编码。

水 平 1A

这一最初水平的特点是,儿童缺乏对任何一种相互依存信息程序的洞察力,甚至对前面所获得的信息也无法加以推论。

Ren(4;6)在3种动物(CRH)的任务中,他一开始排出的顺序为RCH(第Ⅰ行)。"为什么C在这里(位置2)呢?"*因为它很重*。"我为什么把一个小黄球放在这里?"*因为只有一个位置是正确的*。"哪个位置正确?"*R*。"你肯定吗?"*肯定*。"为什么?"*因为我认为就是这样的*。"不可能是C或者H吗?"*不,不可能*。Ren在第Ⅱ行排出的顺序为HRC:"为什么R排在中间?"*因为它更大*……第Ⅲ行的顺序为HCR:"为什么没有球了?"*因为全部排错了*。第Ⅳ行,CHR,有一个黄球:因*为有一个位置是对的*。"哪一个"*位置3上的R*。"为什么?"*因为它与第Ⅲ行中的位置一样*(其实第Ⅲ行的顺序是完全错误的!)。在这之前,我们也给Ren 4种动物的任务(顺序编码为HCPR)。他排出了以下11种序列:PCRH(一个位置正确)、PRHC、CPRH、PCRH、PCRH、PHRC、PRCH、PRCH、RPHC、RHPC和PCRH。可以看出,Ren根本不会考虑使用排除策略:在第Ⅰ行中,只有第一个位置是正确的,但在第Ⅳ和Ⅴ行后,在第Ⅺ行中又再次出现,而且未作任何顺序的变动。同样地,在第Ⅶ行中,所有的顺序都是错误的,但在第Ⅷ行中又重复出现。在排列第Ⅺ行时,Ren郑重其事地说道:*我想要一个球,因为我想排列成第Ⅰ行的顺序那样*。一个球是他的最佳表现。

Pat(4;11)在编码顺序为HRC时排出的顺序是RHC(一个黄球),然后连续4次排出的顺序都是RCH,尽管第一次就表明没有一个位置是正确的,然后:*我想起要把H放在第三个位置上,就得到CRH,但是,我想再排一次RCH*,并嚷嚷着要给他这次的排列三个黄球。

Dia(5;3)对顺序HRC排出的是HCR,因此得到一个球。她认为,C的位置是正确的。因此在第Ⅱ行,她排出的又是HCR,并再次称C的位置正确。然后她(第Ⅲ次)排成HRC,这次碰巧排对了。"你认为可以得到几个球?"*2*个(她并没有认识到,如果两个位置是正确的,那么第三个位置也一定正确)。此外,由于Dia并未根据第Ⅲ行的排列结果得出这样的结论,即,如果第Ⅲ行中有2个位置是正确的,那么,把顺序全部打乱进行重新排列,这将在第Ⅳ行产生2个错误的位置,因此,她继续(第Ⅳ行)排出RHC的顺序。

Sam(5;4)对HCR排出的是RCH(第Ⅰ行),随后又立即(第Ⅱ行)改为RHC,并说道:*老鼠比其他动物都要轻*,似乎期望着某种序列。依据同样的方式,按动物的重量,她又连续排出了6行6种顺序。每次都得到一个球,除了第Ⅱ行,CRH——她在第Ⅳ行中又将该顺序重复了一次。

Eve(6;11)对HCR排出了7行,在实验者的帮助下,最后一次的排列是正确的:(Ⅰ)RCH,(Ⅱ)CHR,(Ⅲ)HRC,(Ⅳ)RHC,(Ⅴ)HRC,(Ⅵ)CRH和(Ⅶ)HCR。但在第Ⅱ行中,她还是说R一定要在位置3上,因为它更小。但在第Ⅲ行,她把R放在位置2上,*因为它已经有了两个球*。然而她给出了一个有效的说法,该说法适应于多种情况:*我刚才没有把它放在同一个位置上*。然而这并未阻止她在第Ⅴ行中排列时对第Ⅲ行的R的顺序进行原样复制。在第Ⅳ行中,R被放在第一个位置上,*因为*

在第Ⅲ行中(有一个球),它已经在第一个位置上了。同样地,对于把C放在位置3上,因为在前面的第Ⅲ行和第Ⅳ行中它就在那个位置上,她并未意识到,在第Ⅳ行中,所有的顺序都是错误的(第Ⅲ行所得到的一个球总是可以被Eve看到!)。第Ⅶ行是碰巧的结果,但也可以这样来解释,即,第Ⅰ—Ⅲ行和第Ⅴ行被取走了,只有第Ⅳ、Ⅵ和Ⅶ行可以看得见——也就是说,前两行完全错误,后一行完全正确。据此,Eve恰恰可以得出这样的结论,即,R只能在第三个位置上(因为在第Ⅳ和Ⅵ行中它分别在第一和第二个位置上),但由于第Ⅳ是完全错误的,因此,她立即又略微改变了第一次的演绎推论(它导致下一个水平):不。因此,根据自己两个原则中的一个,她所做的仅仅是为了与第Ⅳ和Ⅵ行有所不同。另一个原则恰好相反——使自己(武断地)认为正确的位置保持不变。

与第八章的结果一样,水平1A表示的是被试在相互依存信息上的困难。在该水平上,观察到了两类系统的错误,这两类系统的错误甚至在更高的年龄水平中也有表现。第Ⅰ类错误在于,仍然保留了一个完全错误的行中(未得到一个球)的位置3或4,这种完全错误的行的位置在随后的排列中应被抛弃。第Ⅱ类错误在于,没有意识到,在一行中有一个或两个位置正确(即使不知道具体哪个位置是正确的)的情况下,如果把所有的位置都改变,相反,也将产生一或两个错误。第Ⅰ类错误自然在水平1A中较为常见。例如,Ren总是从完全错误的行中复制位置,或者不加任何改变地复制,如,第Ⅷ行就是对第Ⅶ行的拷贝。Pat把RCH(完全错误的行)复制了4次。我们在Dia身上观察到了第Ⅱ类错误,她认为第Ⅲ行中有两个球就意味着有两个位置是正确的,于是在第Ⅳ行中对其顺序加以变化,而并未理解这将产生两个错误(也没有意识到,在第Ⅲ行中,如果有两个位置是正确的,那么,第三个位置也必定正确)。这两类错误并不仅仅只发生于水平1A上,我们在随后的水平上又再次发现了它们。除此之外,认为位置是按重量(Ren和Sam)或大小(Ren和Eve)排列的信念是水平1A所特有的。更有趣的是,某些未经证明为正确的位置会被赋予某种主观的肯定性。Ren"确信"R排在第一个位置上,其唯一的理由是"因为我是这样想的"。Pat坚持多次排成RCH的顺序,虽然这种顺序是完全错误的。Dia郑重其事地宣称,C就在中间位置上。从以上种种现象来看,我们可以发现,儿童确实没能认识到多种可能性,这可以解释为什么此阶段的儿童缺乏心理建构并充满种种矛盾。

但是,我们发现被试说出了两种初级的策略,是Eve说出来的。虽然这两种初级策略似乎是相互矛盾的,但作为一种妥协是有效的。这两种策略在以后的发展水平中将变得越来越重要,因为那时它们可以建立在合理推论的基础之上。但在Eve所表述出的初级的策略形式中,这些表述所对应的某些反应已在我们前面呈现的那些被试身上有所体现,虽然这些表述还远远谈不上是某种形式的方法。这种初级策略的第一个不完整的表述体现在"我刚才没有把它放在同一个位置",这等于是说,在完全错误或只有一个位置正确的情况下,儿童应对物体的顺序做某种变动。这在许多情况下是有效的,

而且，事实上也是必要的。第二种表述是，（我把x放在n处），是“因为它以前（在前一行中）就在那里”，虽然这种策略在水平1A上经常被错误地运用，但在随后的发展水平上，它将提供一些有用的可能性的线索。处于更高水平上的被试可能会说，在一个球的条件下，如果x在多次的排列中总是处在相同的位置，那么其正确的可能性就很大。但该水平的被试尚不能进行如此精妙的推论。如果被试主观地认为某个位置是正确的，他（她）们只会简单地拷贝该位置，就像Eve那样。

水平1B

第二个发展阶段所取得的重要的进步是，主观的确定性（subjective certainty）被意识到的或表述出的可能性（perhaps）——换句话说，这种可能性（perhaps）是对其他可能性（possibilities）的开放——所取代。

Fre（6;2）对RCH排出的顺序是CRH：“可能会得到几个球？”*可能有3个位置是正确的，也可能有2个或只有1个位置是正确的*。“也可能没有1个是正确的，是吗？*是的*。“1个位置正确。”*可能是C……也可能是H*。他排出了第Ⅱ行：HCR。“能解释给我听听吗？”*我把它们的位置对换了一下，我移动了它们*。“可能会有几个珠？”*2个，C和R的位置正确。R的位置可能不在右边*（在第1行中），*H可能在右边*。“哪个位置可以给一个球？”*可能是C，也可能是H*。“R呢？”*也有可能*。他又排出了第Ⅲ行：RHC。“为什么把C排在第三个位置上？”*因为如果我把它排在第一个位置上，那么跟它第I行中的位置是一样的，如果我把它排在第二个位置上，这又跟第II行中的位置是一样的*。把H排在中间的理由也相似。“可能会得到几个球？”3个、2个或者1个。“1个球。在下一行中你打算把H，排在哪个位置上？”我还是不知道。他又排出了：（Ⅳ）HCR，（Ⅵ）HCR和（Ⅶ）RCH。“你打算把H排在哪个位置上？”“在那里（第Ⅵ行），你前面的行中排出了同样的顺序吗？*是的，在那里（II）。我可以集中于同一个物体，这样它可能在每个位置上都出现过*（指了指所有的行）；*当然也可以排出与第Ⅳ行相反的顺序*。关于第VII行，他说：*由于在第II行中，可能是H，也可能是C的位置是正确的*（他把R和H的位置对换了一下）。在Fre 5岁10个月大时，就参加了4个物体的实验：HCPR。他排出的顺序为：（Ⅰ）PRHC，（Ⅱ）HCRP，（Ⅲ）CPHR，（Ⅳ）RHCP，（Ⅴ）RHCP，（Ⅵ）CPRH和（Ⅶ）HCPR。由于第Ⅴ行未得到一个球，因此他下结论说：*因此，这意味着，在第II行中P的位置不正确*。我们可以看出，他是通过将第Ⅱ行中HC的位置保持不变，而把R和P的位置对换而得到第Ⅶ行的。

Nil（6;6）对CHR一开始排出的顺序是（Ⅰ）HRC（没一个位置是正确的）。他将它改为（Ⅱ）RHC和（Ⅲ）CHR（完全正确）：“为什么你不把C留在第三个位置上？”因

为在这里(Ⅰ)C在位置3上是错误的,所以我就那样放了。"现在你认为完全正确吗?"我不明白它是否正确:我就摆成那样子。然后它又排出了第Ⅳ行:RCH,那也只是对第Ⅰ行的修改。我们将顺序代码改为:RCH。他排出的顺序为:(Ⅰ)HCR(一个正确),(Ⅱ)CRH(H正确),并说道:那里(Ⅰ)已经有了一个H,那么在第Ⅱ行我大概不该对它的位置加以改变。他继续排列出(Ⅲ)CHR:"没一个位置是正确的。"R应该在中间。(Ⅳ)RHC:"第三行结果怎样?"没一个位置是正确的:在这里(Ⅳ),H也在中间。那不对,因此C应该在中间,H应在第三个位置上。(Ⅴ)RCH(正确):"现在你认为正确吗?"是的。"还存不存在其他的可能性呢?"我不知道。极有可能存在其他的可能性。但我就是不知道。他尝试着排出了第Ⅵ行:HRC。"它更像哪一行,第Ⅴ还是第Ⅵ行?"第Ⅵ行更有可能是正确的。"为什么?"我确实不知道。"但第Ⅴ行有可能是正确的吗?"有可能。但Nil说不出理由。

Bea(6;6)对HRC,在第Ⅰ行排出HCR后,她碰巧排出了(Ⅱ)CHR——没有一个位置是正确的。然后(在第Ⅲ行排出RHC的顺序后)又重新排了一行(Ⅳ,RCH),也没有一个位置正确:根据第Ⅱ到Ⅳ行,她应该自信地推论出正确的序列。她一开始似乎正朝那个方向前进,排出了(Ⅴ)HRC,(看了看第Ⅰ和第Ⅱ行后)说:似乎把R放在这里(2)也不合适;而对于C呢,我已经把它放在这个位置上两次了,在第Ⅴ行中,C的位置似乎是正确的。然后,我们要求她说明在第Ⅱ和第Ⅳ行中,零个球是什么意思。那意味着所有的位置都是错误的。但当问道:"如果叫你重新审视第Ⅱ和第Ⅳ行,你能告诉我哪只动物的位置一定是错误的吗?"她仍回答说:可能是R吧。"为什么?"不知道。然后她又排出了一行:(Ⅵ)RHC:希望可以得到3个球。"不,1个球。"可能C的位置是正确的。因此,将H和R的位置互换便得到了HRC,得到了正确的答案。但Bea不能说出理由。

Vin(7;3)与Bea一样碰巧,对HCR:在第I行之后(RCH=1只球),他又排出了两行错误的序列:(II)RHC和(Ⅲ)CRH。但他仅仅复制了RCH(Ⅳ=Ⅰ)后,就在第Ⅴ行中找到正确的解决答案。他唯一的理由是:我变动了动物的位置。"是在哪一行的基础上做的变动呢?"根据第Ⅲ行。"仅仅根据第Ⅲ行吗?"是的,仅仅根据第Ⅲ行。"你没有忘记第Ⅱ行没有球吗?"没忘记。"那你怎么排出第Ⅴ行(HCR)呢?"我让它与第Ⅳ行不同。"你可不可以举个例子,当你排列R的时候,你看了哪一行?"我看了第Ⅳ行,因为如果我看第Ⅰ行中R的位置,结果肯定与第Ⅰ行一样。Vin认识到,根据第Ⅱ行的结果,在第Ⅰ行中把R放在第1个位置上被证明是错误的。"在第Ⅴ行中,C的位置也是错误的吗?"不知道,如果在第Ⅱ行中R的位置是错误的,那么在第Ⅴ行中,R和H的位置就不能互换。如果在第Ⅰ行中H的位置正确,那么R必须回到第一个位置上去,因此并没有用。"是这样的吗?"我们最后把它排列成那个样子(Ⅴ),但不太肯定。

Ani(7;6)对HCR,排出了(Ⅰ)CHR(1个球),然后(Ⅱ)RHC:我认为H的位置正

确。因此我把C和R的位置对换了一下。“零个球。”*都错了*。然后,Ani排出了(Ⅲ)CRH(又是零个球),根据第Ⅲ排出了(Ⅳ)HCR(正确)。*这里(Ⅲ)的位置全部是错误的,因此我不得不全部打乱其顺序*。“还有没有别的排列方式是正确的?”*这个*[(Ⅴ)HRC]*是正确的*。“你更喜欢哪一行(Ⅳ还是Ⅴ)?”*我更喜欢这行*(Ⅳ)。“为什么?”*不知道*。“有可能知道吗?”*不可能*。

Sop(7;6)对4种物体的任务RCHP,一开始排出的顺序为(Ⅰ)RHPC,然后是(Ⅱ)RHCP,然后继续变动C,H和P的顺序,结果发现(Ⅲ)RCHP是正确的。但我们没给她4个球,只给了3个,她并未明白3个位置正确就意味着第四个位置也是正确的。然后Sop又把第三行改为(Ⅳ)PRCH,她宣称其结果与第Ⅲ行是一样的,是正确的,虽然第Ⅳ和第Ⅲ没有一个位置上的字母是相同的。

以上诸多例子为我们对推理的认识提供了大量的信息。被试所表现出的重要的进步是他们对各种可能性所具有的开放性。正确选择的位置和个数总是被假设为对作为可能性的开放性来怀疑。这些反应背后的一个普遍的原则被Nil很好地表述出来了:“我不明白怎样才能说它是正确的。”但是仍然不被被试所理解的是(在某些特殊的案例中,它也只是部分地被儿童所理解):通过了解排列错在哪里,并通过利用和组合被抛弃的完全错误的位置,可以发现正确的排列。该水平的被试尤其不能明白两个完全错误的序列可以让一个人推断出必然性的正确答案。例如,Nil产生了两个完全错误的行(Ⅰ和Ⅲ),通过移动在Ⅲ中位置错误的H,他在第Ⅴ行中找到正确的答案;但他却仍然认为另一行,即第Ⅵ行,也可能是正确的,其实该行已经与第1行相矛盾了。该被试甚至认为,第Ⅵ行“似乎更正确”。Bea说,第Ⅱ和第Ⅳ行完全错误是因为“所有的位置都错了”,但她只发现R的位置被放错了,她甚至还加上了一个词“可能”。Vin在产生了两行错误的序列Ⅱ和Ⅲ后,把自己局限于考虑第Ⅲ行,为的只是改变“动物的位置”。Ani,在产生了完全错误的行——第Ⅱ和第Ⅲ行——后,发现第Ⅳ行是正确的,因为“这行(Ⅲ)是错误的,因此我不得不把所有的顺序都打乱”,但她仍然认为第Ⅴ行也可能是正确的,并断言,不能肯定是第Ⅳ行还是第Ⅴ行更正确。Sop认为,第Ⅳ行“与第Ⅲ行一样正确”,其实两行没有一个位置的要素是相同的。

总之,这些被试还不能以一种系统的方式将被排除的案例协调起来。他们只会局部、孤立地利用它们。除此之外,被试所采用的程序是在水平1A便开始得到发展的程序:正如Fre所说,在失败时“反其道而行之”;或者通过(充分或不充分的)频率来判断其位置是否正确。Bea之所以那样放置C是因为她已经把它的位置移动了两次了,还有R,因为它还从来没有把它放在过这个位置上(第二个位置)。以致Fre运用第二种方法产生了无谓的重复,他原样复制了以前的行,并说道:“我总是集中于放置同一动物,这样,该动物将在每一个位置上都出现。”好像分析频率本身(包括错误选择的频率)可以得到正确的排列。

水 平 2

我们发现,随着儿童具体运算的发展,7—8岁和10—11岁的儿童在推理的必然性上取得了巨大的进步。被试或多或少地使用排除策略,但协调并没有得到完全的发展。

Syl(7;2)对HCR排列出的顺序是(Ⅰ)RHC。她期望C和H的位置正确,能得到两个球。因而她并没有意识到,在这种情况下,第三个位置也必定是正确的。我们告诉她这种排列得不到1个球,于是,她对3个(而不是2个)位置的顺序全部进行重新排列,得到(Ⅱ)CRH,并且说对所有的顺序都做了改变。"你可以排出别的顺序吗?"可以。当Syl排列出(Ⅲ)HCR时,我们当时对该行忽略不顾,不予理睬。"第Ⅱ行可以得到几个球?"*2个或者3个*。"零个球……因此?"*因此我排出了第Ⅲ行*。"第Ⅲ行可以得到几个球?"*3个*。"你肯定吗?"*肯定*。"为什么?"*因为第Ⅰ和第Ⅱ行都没有得到球*。"有没有可能通过不同的排列顺序得到3个球?"不可能。我们建议她再排一行,Ⅳ=CHR,过了一会儿她放弃了,但她接着说,C在第Ⅳ行中的位置是错误的……因为它在第Ⅱ行中的位置不正确。

Rol(8;5)对HCR排列出RCH的顺序,得到1个球,然后又排出了(Ⅱ)CRH:*因为在第Ⅰ行中有一个位置(H)是正确的*。"零个球。"*我不得不重排一遍*。(Ⅲ)=RHC。"零个球。"(IV)=CHR:*因为H在前面一行(Ⅲ)中的位置是正确的*。"第III行可以得到几个球?"……她将第Ⅳ行加以变化便排列出第V行(RCH)。"为什么H在第三个位置上?"*H不得不排在第一个位置上,因为它从来没有被排列在那里*。她排出了HCR的顺序(正确),*因为在第Ⅲ行中C的位置是错误的,在第Ⅱ行中R的位置是错误的*。因此,她终于,也是立即利用了第Ⅱ和第Ⅲ行所提供的信息进行排除。

Tri(8;5)对RCH排列出(I) CRH(1个球),(Ⅱ)HRC(零个球)和(V)RCH(正确)等顺序。在Tri排列出第Ⅲ行后我们问他,"看看每行有几个黄球对你有没有帮助(他把它解释为'观察前面的行')?"*有帮助,在第Ⅱ行中,所有的顺序都不正确,因此我可以对其顺序加以改变*。"如果有一个球又怎么样呢?"呃……*但我们并不知道哪一个位置是正确的,因此毫无帮助*。在排出第Ⅳ行后,他表示,*我已经知道了,把C放在第三个位置上是错误的*(在第Ⅱ行中就是这样排列的),*而H呢,我知道,它在第二个位置上是错误的,因为在第Ⅳ行未获得一个球*,因此第V行是正确的。

Sire(8;10)对RCH排列出的是(Ⅰ)CRH,但无法断定哪个位置正确。但在第Ⅱ行CHR和第Ⅲ行HRC全部错了之后,她得出结论:(V)*RCH是正确的,因为我认为,在这里*(Ⅱ和Ⅲ)*C和R的位置是错误的*。"你期望得到几个球?"*3个*。"肯定吗?"*肯定*。我们重新进行了编码:HCR,她排列出(I)RCH(1个球),然后是(Ⅱ)CHR,但她

立即说，不，那不对，我没有利用与第Ⅰ行中相同的一个。这意味着她没有犯第Ⅱ类错误(见前面的定义)：*如果有一个球(即有一个位置的顺序是正确的)，那么，把所有三个位置的顺序都改变，将至少犯一个错误*。

Dio(9;4)对RHC排列出(Ⅰ)HCR(零个球)的顺序，随后，根据(Ⅰ)的结果，并基于这样一条原则——即每个位置的顺序都得改变，他排列出RHC(正确)。但他认识到，排列的顺序是不能通过与HCR[1]的比较而得到证明的。然而，他接受，R可能在第三个位置，这与错误行——第Ⅰ行——是相互矛盾的(第Ⅰ类错误)。在新的编码RCH条件下，他连续排出的两行都是完全错误的。据此，他通过完全明晰的推论而得出正确的排列顺序，这在我们的实验中到目前为止还是第一次碰到：*我把R放在第一个位置上，因为在那行(第Ⅰ行中)，R在第三个位置上是错误的，而在第Ⅱ行中及在第二个位置上也是错误的*。"那其他的呢？"*我把C放在第二个位置上，因为在第Ⅰ行中，它在第一个位置上是错误的，而在第Ⅱ行中在第三个位置上也是错误的……对H而言也是如此*。

Jul(9;6)对CRH，他或多或少能系统地变化物体的顺序：HRC→HCR→CHR，在HR的位置保持恒定时，把C从第三个位置换到第二个位置后又换到第一个位置；然后又排列成RCH和RHC的顺序，但是由于5行中有2行是完全错误的，因此她像前面的被试一样据此推论出正确的排列顺序。

Ala(9;7)与Jul的表现相似：*我把1种动物放在这个位置上，把另2种动物交叉放置*：CRP→PRC→CPR，等等。

我们发现，在4种动物的条件，被试的反应处于更低的水平，这似乎并不奇怪：

Eti(8;6)：对PCHR，排列出(Ⅰ)RHCP(零个球)的顺序。然后他把所有的位置都改变了，将(Ⅰ)加以变化排列出(Ⅱ)PCRH(2个球)，而在(Ⅲ)HRPC(零个球)的排列中，未保留(Ⅱ)中的任何一个位置，因此犯了第Ⅱ类错误——除了组对(pair)PC的顺序不变外，这可能只是碰巧而已。然后(Ⅳ)CPRH(2个球)，接下来(Ⅴ)PHRC(1个球)，这里把H放在第二个位置是通过对第Ⅰ行的结果进行排除而得到的，C在第四个位置是通过对第Ⅲ行的结果进行排除得到的(第Ⅰ类错误的两个例子)；在第Ⅵ行中，他排列出CPHR(2个球)。随后是(Ⅶ)PCRH(2个球)，它是对(Ⅵ)的顺序作毫无保留的改变的结果(第Ⅱ类错误)；第Ⅷ行是RHPC，这里C在第四个位置，是通过对第Ⅲ行的结果进行排除而得到的；最后，第Ⅸ行是通过某种排除策略而得到的正确序列。

Cat(9;1)：对HPCR，排列出(Ⅰ)CPHR(零个球)的顺序，紧接其后的是(Ⅱ)RPCH(2个球)。第Ⅲ行是CPRH，它把P固定在第二个位置上，H固定在第四个位置上(没犯第Ⅰ类错误)，但C仍在第一个位置上，根据第Ⅰ行它本应该被排除。

---

① 原中文版本为CRH，根据上文推测应是HCR，因为之前只排出了这个。——编者注

San(10;3)产生了9行,在第Ⅱ类错误的3种可能的错误中避免了其中的2种错误;但这种错误仍然保留在3个不同的行中,根据3个空行(未得到一个球的行)排除了3个位置。然而,她根据这些空行序列进行排除,并根据所看到的获得2个球的行之间的一致之处,终于在第X行获得了正确的答案。

通过推理,并根据排除性策略(特别见于Dio的表现)和探索性策略(Jul和Ala),儿童的正确的预期在该水平上(3种动物条件下)取得了巨大的进步。但是,对位置的选择与排除之间并未达到完全的协调,在4种动物条件下更是如此。然而,在3种动物的任务条件下,如果有两个或更多个空行,被试将同时考虑这些序列及其关系,而不仅仅只考虑紧邻其前的一个系列,水平1B就是这种情况。然而,第Ⅰ类错误(忘记使用排除策略)比第Ⅱ类错误(在有1个或2个球的条件改变所有的位置)更难改变,特别是在4种动物的任务中更是如此。另一方面,在以上被试中,还没有一个被试能够理解,在4个位置中如果有3个位置是正确的,那么第四个位置也必定是正确的。

水 平 3

随着假设-演绎运算的出现,在水平2中业已出现的推理的机制,在水平3上达到了概括化的水平。

Mar(10;4)对HRC,给出了(*Ⅰ*)HCR的排列(1个球),然后(Ⅱ)CHR:"零个球。"*天呐!*"很烦人吗?"*不,在第Ⅰ行中,如果不是H就是C的位置是正确的*(根据第Ⅱ行,R在第三个位置上的可能性被排除了)。*也许我得确定*(假设)*在第Ⅰ行中H的位置是正确的,因此,我得把R和C的位置交换一下:那就是*(Ⅲ)*HRC*(正确)。"你可以得到几个球?"*1个或3个。不可能是2个,因为如果有2个位置正确,那么第三个位置也必定是正确的……但为了确定C在第Ⅰ行的位置是否正确还有另外一种可能性*(Ⅳ)*RCH*(与第Ⅰ行相符合,但与第Ⅱ行相矛盾)。

And(11;0)对PCR,给出了(Ⅰ)RPC。"零个球。"我只好把所有的位置都改变:(Ⅱ)PCR(正确)。我们只给他2个球,他立即表示反对:*这于我而言似乎有点不太可能,如果有2种动物的位置正确,那么,第三种动物也无法移动*。于是我们给了他3个球。新的编码:PRC。他排列出CPR的顺序。"无球。这使你烦恼吗?"*不,我不介意*。(Ⅲ)RCP:"无球。"他排出了PRC的顺序。*我认为这次是正确的*(确实是正确的)。

Isa(10;3)对4种动物的任务(HCPR),首先排出的是(Ⅰ)HPRC(1个球),然后是(Ⅱ)CPHR,*她说,由于不知道哪只动物的位置正确,因此只能让第Ⅰ行中的一个要素保持不动*。在排列第Ⅲ行时,她宣称:*为了知道哪个要素的位置是正确的,我将像第Ⅱ行中那样,把一些要素固定在原位置上*。她把R留在第四个位置上(与第

Ⅱ行一样),把H放在第一个位置上(与第Ⅰ行一样)。因此是HCPR。*我只是有点猜测,还没把握*。我们给了她3个球,一开始她接受了。接下来:*那不可能,要么是2个,要么是4个*。于是我们给了她4个球。我们告诉她,在新编码中可能有一个要素是重复的。根据对2个虚无行系列的排除和3个只得到1个球的行系列,她排列出了(V)CHRP的顺序(正确)。

我们看到,不仅排除变得系统了,而且被试立即就知道怎样利用空行(Mar和And)。第Ⅰ类错误终于消失了,而Ano避免了第Ⅱ类错误,甚至在有元素重复的更难的系列中也可以避免第Ⅱ类错误。在协同可能性的使用中也可观察到某种进步,这种进步在处于水平1B的被试,在其第一次探索中使用"可能"一词时便有所表现。但在水平Ⅲ上,当(例如)Mar发现了一个无法证明的正确答案时,似乎还存在这样一种可能性,即,"该行与前面一行并不矛盾"。

演绎加工的普遍性的一个有趣的指标是,被试拒绝接受这样一种可能性,即,在3个位置中如果有2个位置是正确的,或在4个位置中有3个是正确的,那么,剩下的唯一的一个位置是错误的。因为在这种情况下,最后一个"必然是正确的"(Mar,等)。当处于水平1B的Vin被告知(在3个位置中)有2个位置是正确的时,他说第三个要素就"只能放在那个位置上了",因为前面2个位置所提供的信息排除了第三个位置的选择余地;但仅仅因为这些,他并不认为第三个位置是正确的。而且,从被试所说的第三个要素"不能移动",我们可以得出结论,第三个位置必定是正确的。在3个位置中有2个位置正确而第三个位置是错误的,这"对我来说似乎有点不可能",这是一种礼貌的方式,是在说实验者本人并不严肃。

结　论

本研究论述了一种本质上是否定的必然性的形式,该必然性是,"在几种可能性中,如果n-1[①]种可能性被排除,那么,第n种可能性就是必然性。"由于在隐藏的顺序编码中各要素的顺序是任意排列的,因此,找不到肯定的标准来重建该序列。唯一可获得的信息是,在虚无系列的情况下,所有的位置都应被排除,或者,只知道有一到两个选择是正确的,至于具体哪个选择正确则不得而知。但是,如果一个空行的所有位置被完全排除,并且如果在一个部分正确的系列中不是每个位置都被改变——如果我们所称的第Ⅰ和第Ⅱ类错误被避免的话,那么,对这种否定或部分肯定的信息可以进行严密地推论。

前面的观察所得到的一个令人惊奇的结果是,只有在水平Ⅲ上,在儿童11—12岁时

① 原文为$n*1$。似有误,现改为$n-1$。——中译者注

才达到完全的推理。有两个原因可以解释这种现象,对第一个原因我们已非常熟悉:否定或否定因素比肯定因素更难改变。第二个原因特定于本研究:一般来说,一个否定的术语与一个肯定的、可观察的术语总是相对的——玻璃杯部分地是空的,因为它不是满的;并不是所有的花都在春天开放,因为雏菊就不是在春天开放;等等。但在当前这种情境中,为了获得一个真实的、肯定的系列,空行不应被抛弃,而应该被保留到最后,这样,通过推理就可以获得肯定的信息。

与第Ⅱ类错误不同的是,第Ⅰ类错误持续很长时间也不消失,这可以从两方面来解释。首先,一种可能性是,要把排除一直保持到任务结束(较长的时间间隔),这是比较困难的:因此,Ano对第Ⅵ行加以改正,因为它未保留第Ⅰ行中的任何一个位置,而在第Ⅰ行中有一个位置是正确的。但主要的解释是,更具可能性的是,由于被试对部分正确的行加以排除的保持存在更大的困难,即使其内容是未知的。

本研究第二个有趣的方面是,它提供了一个把可能性和必然性联系起来的最贴切的例子。由于接收到的信息要么只与可能性有关,要么只与不可能性有关,但演绎推理恰好可以把二者联系起来,因为,通过演绎推理可以逐步减少可能性的领域,直到使必然性成为唯一的可能性。这可以使我们对必然性的本质有所了解。

第十章 必然性极限的案例

在发现决定排列个数的n的阶乘(n!)的规律很早之前,幼儿就注意到,随着系列中元素个数的增加,按照一定的顺序来排列的系列数也将随之增加。根据必然性的观点,让5到十三四岁的儿童进行2个然后是3个物体的排列,然后,让他(她)们解释,为什么在3个物体的条件下,最大的不同排列数为6,这对我们而言似乎富有启发性。了解儿童如何解释极限的必然性,是很有趣的。这种极限的必然性与不可能性或者(可以这样说)似乎与某种否定的必然性有关。这种否定的必然性与应用于逻辑数学、加法和乘法守恒中的必然性相反。

我们使用的方法极其简单。我们让被试先画2个,然后是3个不同颜色的叉(×××),让他(她)们变化其顺序(如蓝色的B、绿色的G和红色的R),把他(她)们所能想到的所有不同的排列列成一竖列。如果被试很快就排好了,我们会建议他(她)们试试不同的系列,看看其是否会增加一个系列。如果他(她)在随后的排列中能取得成功,特别是,如果他(她)们排列出了全部6个系列,我们会问他(她)相同的问题(建议其试试不同的系列,看看是否会增加系列的个数——译者注)。如果他(她)们认为在3个元素的条件下排列数不超过6列,那么,剩下的问题是让他(她)们做解释,为什么不可能超过6个系列。

水平1A和1B

水平1A的被试满足于一两种排列,或者,他(她)们对已经排列出的系列简单地进行重复。而没有看出来。后者只是前者的原样复制。

Ced(5;7)先后排列出RGB和BGR。"还有吗?"RGB。"你前面没排出同样的系列吗?"*没有*。"那一行不是吗?"*哦,是的*。"你可以再排出一行来吗?""可能吗?"*如果有更多的颜色就可以*。我们又从一个不同的集合重新开始:他只能排出BGR和GRB。

Ern(5;5)在B和R 2个元素的情况下,2次都排出BR和RB的排列。"为什么BR和RB是不一样的?"*不知道*。在3种颜色条件下,他先后2次排出的都是BGR和GBR,再次排出的是BGR、BRG,后又排列出GRB。他再也未能找到其他的排列,也不能解释排列之间差异的特点。

Mar(5;10)只是找到了3种不同的排列,第四行的排列与第一行一样。"最后一

行是新的吗?"*是的,它与那行*(第一行,其排列顺序是一样的)*不同*。"为什么?"她指着元素的形状说,是"×"而非"+"。

这些反应的显著之处在于,被试很少能意识到顺序关系,因此出现以下问题:Ced没能看出,第四行是第一行的重复。同样,Ern和Mar未注意到其他的排列是相同的。Ern不能解释BR和RB之间的差异,Mar只是看到了"×"的形状的相异之处,而未看到其顺序的不同之处。结果是被试只发现了较少的可能性。

在水平1B上,被试刚刚开始能考虑到位置关系。

Car(5;6)排出了4种不同的排列,但第五个排列与前面之一重复。她最后排出的是BGR和BRG,说:*哦,我多傻啊,B是一样的,而GR和RG是不同的*。

Ant(6;8)只排出了3种不同的排列,并认为已经排列出了所有可能的排列,*因为我们已经把绿的放在这里,蓝的放在那里,红的放在那里。而且,我们已经把蓝的排在第一,红的排在那里*……(她把各位置列举了一遍)。在接下来的实验中,她再次排出了3种排列,但她并未注意到,这些排列与她在第一次实验中的排列是不同的。

Dia(6;4)首先通过变化第一个元素B,然后变化R和G,她找到了4种不同的排列。然后,她把R放在第一个位置上,排列B和G。"你是怎么发现的?"*因为颜色是混杂在一起的;R在这,然后在这:B和G的情况也一样,只是它们的位置变化而已*。当我们重新开始实验时,她只找到3种不同的排列:"还有其他的排列吗?"*我已全部找到了它们*。"我相信,如果你从G开始,你可能发现不同的排列。"*哦,是的*(她在排列B和R之后找到了全部6种排列)。*我之所以把B排列在第一个位量,是因为它从来没有排在第一个位置上*,等等。

Rik(6;9)也只发现了4种排列,后在实验者同样的建议下,她也完成了6种排列。但要她解释为什么不再排列的时候,她只是说:*因为已经全部排列完了*。

Nic(7;3)一开始的言谈就给人以希望:*我不能把同一物体放在同一位置上*,但后来他认为GRB的排列是错误的,因为在他排出的第一个序列BRG中,R的位置也是在序列的中间位置上。一旦他领会到,也可以只对其中一个或两个位置进行变化时,他说,在这种情况下,*很容易……可以摆出许多……成千上万!我们可以变化这种颜色,那种颜色,然后是另一种颜色*,等等。*排列数真是太多太多了*。事实上,他最初只成功地排出了4种序列,后排出5种序列。重新开始实验时又只排出了3种序列。*我认为,只有6种序列*。"解释给我听听,为什么只有6种序列?"*我可以排出7种排列*。

正如Dia和Nic所言,被试的任务只是将要素"变化位置"。但他(她)们并未意识到,通过有序的排列,线性顺序是一个可以以系统的方式加以改变的变量。换言之,在进行排列时,他(她)并未使用任何策略,采用的只是简单的试误方法。然而,在某些建议的帮助下,他(她)可以完成所有6种序列的排列。但是,很显然,被试根本未意识到,

为什么6是最大的排列数。Ric满足于这样的想法，即，她所排列的系列是所有可能的排列，因为它们“全部被排列出来了”。而Nic的说法也一样，但他提出“要排出7种排列”，因为他认为全部的排列数是一个无穷数。

水平2和水平3

我们可以发现，从7–8岁开始，有些被试通过比较简单的经验探索，并利用某些初步但仍然只是局部的而未达到一般化的策略，便可以成功地找到6种可能性。

Ser(7;6)在做过几次经验的尝试后，对所有3个要素中的任何1个先进行排列，然后通过排列剩下的两个要素完成所有的排列：首先，B放在第一个位置上，然后G放在第一个位置上，最后是R放在第一个位置上。他只是说所有的排列都排列出来了，但不能解释其原因。

Jer(7;11)系统地对第一个和最后一个位置进行排列：我已经排出了那一列的相反的排列，然后，改变其他所有要素的位置。“除了G外还有其他的要素吗?”不知道。

Isa(8;3)在经过几次探索后，在RGB之后又排列出了GRB。然后通过将3个元素中的1个元素排在第一个位置上，然后再排列剩余的2个要素，据此又排列出了3个排列。但是，虽说她通过这种方式已经完成了所有排列，但她提供的唯一理由是我再也找不到其他的排列了。更重要的是，在换成其他3种颜色的情况下，她无法预测6种排列也是最大的排列数：我不知道，得试了才知道。

Top(9;7)也完成了6种排列：我排列出了所有可能的排列。我首先只排列1个要素，然后变化其余2个要素。然后，我试图对最后一个要素也作同样的处理，但我看到，我已排列出了那种排列。“可以从中间开始吗?”可以。“会超过6种排列吗?”会。“试试看。”不，不会超过6种排列。“为什么?”因为在变化其他要素的位置之前，其实它早已被变化过了。

Cri(9;9)一开始便找到了5种排列，并认为6或7种排列是不可能的。后来他得到6种排列：我只是把它们的位置做点变化。在第一行中，B在中间，也即在第二个位置上；但我已经把R放在第一个位置上了，等等。他详尽地描述了自己的排列过程。“很好，还有其他的排列吗?”没有了，我似乎再也不能找到其他的排列了。(尝试)我看看我能不能再找到一种排列(不能)。“你认为我能吗?”不知道。

Pat(9;3)很快便完成了6种排列。“你认为自己找到了所有的排列吗?”是的。“为什么?”这里有3种颜色，我们只能变化这3种颜色的位置。“有多少种排列?”6种。“为什么？……你依据某种特定的顺序吗?”不，我看着前面已有的排列，确定前面是否已有某种排列，然后再作排列。“结果怎样呢?”只有6种可能的排列，因此我

试图找到6种排列。"为什么是6种而不是4种或10种排列？……"

Jan(10;6)经过一次尝试便成功地完成了6种排列。我把它们全部排列出来了。"还有其他的排列吗?"*没有了,颜色就这么多:在3种颜色的情况下,我找到了全部排列*。"而我呢,有可能找到7种排列吗?"*也许吧*。

有趣的是,这些被试或多或少都找到了穷尽的办法,并能够用语言把它描述出来,但他(她)们不能进一步证明为什么6种排列是最大值。Isa虽然说她再也无法找到别的排列了,但她甚至无法预测,如果换成其他3种颜色,最多也只能找到同样多的6种排列。换句话说,6种排列的极限仍未被看作是一种必然性。对这些被试而言,他(她)只不过是说出了他(她)从动作中所能获得的结果,因为他(她)们还不能肯定,成人不可能获得更多的排列数。

然而,在水平3上,6种排列的极限成为可能的、反演的操作的种类和数目的必然结果。

Ana(10;11)立即就建构出了所有的排列。"还有其他的排列吗?"*没有了*。"为什么?"因为我把同种颜色放在同一个位置上2次,2次我都把最后一种颜色放在第一个位置上。这无异于说,两类反演——极端要素间和连续性要素间的反演——穷尽了所有的可能性。

Ced(11,6)在迅速而成功地完成了所有的排列后同样这样说道,他确信不可能超过6种排列,因为在第一列中,*我把3种颜色以某种方式进行排列,在第二列中又以另一种方式排列,在第三列中又以别的方式排列*。"但你是否认为我可以排出7种排列?"*我并不真的认为如此*。

San(12;0)我排好了。"你认为我可以排出7种不同的排列吗?"*不可能*。"为什么?"*因为我调换了所有的颜色:我首先*(从心理上)*调换了G,然后是R,然后是B,我已经调换了其他2种颜色*。

Pac(12;9)*绝对确定只有6种不同的排列,因为所有6种排列都被排列出来了*(=放在不同位置上),*所有的R和所有的B都被排列过了*。事实上,在第一列中,G,R和B都分别被排列了2次,然后在后面再对其余的2种颜色加以排列。

Art(13;1)采用的方法相同,解释也相似。

在这里,6种排列的极限被看作是一种必然性。这种必然性是内源性的,因为它是从其可能的反演中获致的。水平2上的排列是无计划执行的结果,而在水平3上,这些排列都依循一定的先后顺序。这就意味着,排列中的运算由序列的序列即二次方序列所组成。这便解释了他们的困难,但也解释了联结的必然性。

某些被试甚至理解4颜色的法则:例如,San说,如果3种颜色中有6种可能性,那么当加上第四种颜色时,将会有6×4=24;当问道"如果我告诉你多于24呢?"她回答说"那不是真的,我发现了它们的全部"。同样,另一个13岁的被试Hut说(当从3种要素到4种时),"有一种以上的颜色能与所有其他颜色变化位置",因而4×6=24。然而有些被试

当要求处理4要素时退回到水平2。

然而,我们的兴趣不在于法则$n!$的建构,而在于当被试从对动作的纯粹描述(水平2)到理解他们成功的理由过渡时必然性的形成。当被试不再满足于找到他们能加以区分的所有不同序列,而是发现这些序列通过其本身属于一种序列性质的一种法则而彼此相联系时,这种理解便开始了。Hut说:"人们不得不遵循一种次序。"这一法则既施加了充分数的必然性(在三种不同颜色的叉中的6),又施加了对这一数的更高限制的必然性(如果被违反,会导致先前序列的纯粹重复)。这两方面标志了本章所分析的必然组合的特殊类型的特征,并构成其主要价值所在。

结　论

目前研究的主要结果可以概括为下列三个要点:(1)必然性附属于由主体所实现的各种组合,它不是客体所固有的可观察的事实;(2)它不是一种孤立的和确定的状态,而是一种过程(必然化)的结果;(3)它直接与产生分化的可能性之构成有关,而必然性与整合有关——因而二者的形成就处于平衡状态。

1

在考虑必然性是具有外源的还是内源的起源时,人们可能想到斜坡引起卵石滚动的必然性(见第三章)作为亚里士多德相信其存在的那种真实必然性(real necessity)——发生于事物中的必然性——的一个好例子。[①]如果我们坚守可观察的事实,我们就只是看到,放在斜坡上的卵石将"总是"往下滚而"决不会"往上滚。但这仅仅是外延的普遍性。所以只有当存在一种能提供解释的演绎模式时,一种法则才成为必然的。那么乞求于"重体的下落"会是充分的吗？但这仍然只是一种被转换成普遍法则的可观察物。自从牛顿的引力出现以来,必然性是以提出了一种解释的模式为基础的:"普遍的吸引。"但这仍然只是伪装的描述。正是随着爱因斯坦、Misner以及Wheeler的几何动力学才提出了更基本的解释,因为他们与主体的几何运算(包括可能的未来精心组织)相联系。确实,人们可以说,任何普遍的事实——诸如斜坡上的卵石往下滚——在直觉上似乎是必然的,因为主体知道存在一个解释,即使他不知道这个解释是什么。然而,这种论证对虚假的必然性以及有效的证明却留下了悬而未决的问题。

在第一和第二章,归属于现实的必然性是某种媒介物的结果(第一章中的守恒原理,第二章中的主观几何)。这些是主体的逻辑数学结构的一部分,但是它们也能直接被应用于客体(特有运动的几何学,物质动作的几何学——二者都附属于主体和客体)。

总之,必然性不是源出于客观的事实。客观事实按其性质来说是纯粹真实的并属于可变的普遍性,因而或多或少受制于必然的法则。当它们被整合于由主体所构造的演绎模式之内时才成为必然的。这样,p 的必然性不是仅仅作为非 p 的不可能性为特

① 甚至孟德斯鸠在说到法律规范时说:"法律是源自于事物本性的必然关系。"这是在规范的东西与事实的东西之间的一种类似的混淆。

征，因为新的可能性总是会出现，而是必须以莱布尼茨的方式被描述为非p的矛盾，这就与一种特殊的、有限的模式有关。

2

那么，必然性的这种内源起源是什么？人们可以从著名的莱布尼茨的“理性无所不在”(Nil est sine ratione)开始，但它仅仅具有必然性的三个维度(以下我们将做出区分)的第二个维度的特征。无疑，将不得不假定更普遍的规范原则，诸如矛盾律——排除p与非p的同时存在，但不告诉我们n是蕴涵着p还是非p；或者是充足理由律——不具体说明这种理由是什么(因而亚里士多德用它来排除惯性，伽利略则用它来证明惯性)。在必然化过程基础上的这样一种原则——具有公理有效性的一种原则——将是："必然性的存在是必要的"——用不着具体说明它们是什么。但为什么必须存在必然性？这是因为没有必然性，思维——如果它要保留所有先验的断言——就会不断地与自身相矛盾；或者就会迷失在“赫拉克利特之流”中——如果思维忘记或忽视它们。既然思维总是处于发展中的，它——如果它要避免这两个问题——除了在当前的状态之内将过去加以整合之外，别无他途。这样的整合一旦完成，就是必然性的来源。

但这只是把这个问题往回推了一步：这种整合的必要依次来自哪里？两个客体或事件可能是彼此相似的，这种相似性关系一旦确立起来就是整合的一种条件。另一方面，它们可能是不相似的。然而不像相似件——它往往是绝对的(正如在同一性中一样)，不相似性绝不是完全的：不管两个真实的或概念的实体是多么不同，它们作为经验的或认知的客体仍然有某种类似。在相似性导致同化、不相似性导致顺化的范围内，后一种关系是隶属于前者的，正如顺化隶属于同化一样。于是在它们相互作用的所有可能的水平上不得不存在格式的相互同化这一事实，施加了对整合——必然化从中得以进行——的一种永久需要。

更简单地说，同化格式不能孤立地起作用。它们不断地发现新输入的需要必定导致协调——我们按它们的相互同化来赋予其特征。是这些组合而不是初始的个别构成，担保了该整合过程。

这样，我们把在没有导致矛盾的情况下就不能被否定的那种组合C定义为必然的过程。显然(这证实了同化的作用)：只有主体自己的动作(或运算)才可能证实非C的矛盾性质。现实性只是能表明：非C事实上决不会出现——这对于证明它的不可能性是不充分的(后者能通过改变各种条件被反驳)。尤其是，在当下状态内对过去的完全整合——它是逻辑数学必然性的一种条件——在性质上只是推论性的，这与诸如习惯的改变那样的其他主体活动相反(一种新习惯仅仅保留了先前习惯的或多或少有限的部分)。

3

由于与整合密切同源，因而必然性存在于由自己的原因造成的自动组织化。它不是真实世界中的一种可观察的事实。它是一种包含必然化过程的动力学而不是限制于各个状态的系统化组合的产物。这种动力学开始于能相互组合的，并为相互组合而设计的概念的形成。它从如下情境出发：概念的组织化是异质的，仅仅包括按相似和差异进行的部分比较，还没有获得经互反同化而得到的协调。这在关于长度的第四和第五章中有事实根据。主体起初使用不相容的标准：判断一根斜线在一个时刻比同一长度的水平线“更长”，“因为它上升”。不久后又因同样的理由更短。就垂直和水平线而言我们看到相似的矛盾——一根或另一根被判断为“更直”；或者，以牺牲起始点为代价而集中于两条平行线的端点，等等。最后，主体开始采纳同质的标准：这两点之间的间隔——这使得结合性组合成为可能。

由于主体开始使用运算过程，诸如反省抽象、各种形式的完全概括，以及最后(基于所有的推论逻辑)我们称作意义蕴涵(significant implications)——从中 $p \supset q$ 在 q 的意义被包括在 p 的意义中的范围内是必要的——某种基本的运算。不像 Lewis 的模态逻辑(其必然性靠附加的算子衍生出来，这在解决外延逻辑所特有的悖论蕴涵问题方面是不充分的)，Anderson 和 Belnap 的定推逻辑(logic of entailment)把必然性当作运算本身所固有的，如果——正如我们的意义蕴涵的那种情况——在关系 $p \supset q$ 中，q 能凭自然推理从 p 中演绎出来。

一旦获得了这些运算，必然化过程就扩展到逻辑数学结构的建构——从中封闭由新的开放所替代，并进一步扩展到解释性的物理模型——在此，外源的或外部的变异继续被内源的或内部的变异所取代。这些变异是可演绎的，它们的内部组合成为必然的。结构化的和模型化的过程导致产生新的必然性的证明之必要。这些新获得的能力允许新内涵的不断产生。

4

区分两种不同形式的必然性是可能的。一种附属于机能阶段，另一种附属于结构的力量。从机能的观点看，存在着三个主要阶段。这些阶段不是对应于一般的、发展性的阶段，而是对应于一种问题解决的时期，或者一种特殊模型的建构(第一到三章)、一种结构的建构(正如第四章的长度)或者预备结构的建构(第五和六章的结合性以及第八章的分布性)时期。

第一阶段是决定性的预备(preparatory determinations)阶段,或者搜索必要条件然后搜索必要且充分条件的阶段:必然性的这个方面就证据的建构(第八、九章)而言特别得到了研究。但是人们可以在任何类型的问题解决过程中,特别在斜坡(第三章)或旋转(第二章)的建构过程中发现它。

第二阶段可以用术语精心组织或分析(elaboration or analysis)指明出来;这就是搜索关于一种组合的必然性的解释*A*,被解释*B*跟随着*A*,被解释*C*跟随着*B*,等等,以至无穷。这毫无疑问是探寻必然性,以及把必然性与纯粹的外延概括最好地区分开来的那种特征的主要驱动力。事实上明显的是,一种组合的必然性的基础(例如,在系列$A<B<C<\cdots<X$中,存在着关系<的传递性,存在着像<*X*一样多的项目>*A*)并不是:它"总是"正确的(这仍然是在没有证明它是如此必然的情况下的普遍性水平上),反而是,它是以提供这种解释的意义蕴涵为基础的:发展的事实清楚地表明了从外延的普遍性向演绎的证明过渡的变化。这种变化只是大约7岁才出现。

走向必然性的第三阶段可以称为扩大(amplification)。它是从先前必然化的组合那里衍生出必然的结果。这第三种发展——后期能比先前大量的出现——可以在主体从初始整体守恒的分布性(任务CT和ST)到其他的分布性——这里整体一起被划分(任务BT和LT),即使后者仅仅是前者的一个结果——过程中所经验到的困难(在第七章中被研究)中得到发现。在科学史领域,这种现象是相对常见的。例如格鲁伯表明,达尔文花了很长时间才认识到由他先前的观点所必然隐含的某些结果。

就不同形式的必然性中所固有的可变力量这一假设而言,这是这样一个复杂的问题:解决这个问题需要——比任何其他问题的解决更多地——在作为一种状态的必然性与导致必然性的动力过程之间做出区分。在数学中,习惯于说到各种结构或多或少是作为强的或弱的:一个群比一个独异群(monoid)更强,一个域比一个群更强。但这仅仅意味着,更强的结构包含更大量的必然关系——即是说它们是"更丰富的",或者它意味着,这些关系的必然性本身在更精致的(更深的理由)和更扩展的(更多的结果、更紧密的相互联系)的双重意义上是更强的?如果我们把同一性($n=n$)的分析的必然性与$n \rightarrow n+1$(每一整数被另一整数跟随着)的综合的必然性相比较,就会清楚地看到,一旦它们被获得,两种必然性就用同样的强迫性证据施加于自身。然而从过程(必然化)的观点来看,后者在理由和结果上都是更丰富的,这正好是如此清楚的。如果人们接受必然性和整合之间的紧密联系,那么"更丰富"的意义就不仅是数目上的,而且意味着更大的整合力量,因而是运算综合的力量。所以这构成了在必然化过程的演化中要加以考虑的一个因素。

另一方面,似乎不存在将必然性的程序类型与结构类型区分开来的根据。一个程序(procedure,包括被看作在一个特定地点和特定时间出现的一种特定活动的一种运算)被指向于成功,而不是理解。一个程序能成功地提供充分的但非必要的条件:例如,为了在斜坡的建构中校正一个序列3,2,2(正如在第四章所看到的),用4,3,2取代它就

不是必然的;为了获得3,2,1而改变它的最低水平就是充分的。但是如果必然性在一种程序行为中起作用(它通常是这种情况),它就是理解了成功和失败的各种理由,而不是在结果本身的水平上。这种理由致使我们考虑结构与程序不能分离开来,除非在纯粹经验的、尝试错误的程序的情况下。

5

至于必然性与可能性之间的关系,显然,任何形式的必然性源出于可能的组合——在可能性之间以及在可能性与实现了的现实性之间确立关系。互反地说,协同必然性产生新的可能性。既然可能性和必然性都是主体活动的产物而不是凭经验所给予的可观察物,这自然在二者之间存在着相互依赖。

且不管感知运动水平,仅仅考虑表象性的概念化,我们可以区分必然性发展的三个阶段。第一——对应于前运算水平——是前必然性(prenecessities)阶段,它是局部的和不完全的。在我们先前的每一研究中以及我们将要回到的虚假必然性中已观察到这些。第二阶段——与具体运算一起——是有限制的协同必然性阶段:这里的前缀"co-"意味着,它们联合地被构成,彼此之间可以形成组合。在它们仅仅被应用于或归属于具体内容的意义上,它们是受限制的。最后,在假设演绎水平上,人们可以说到在无论何种形式的演绎中都能被使用的不受限制的协同必然性。

这三个阶段对应于就可能性而言我们已确立的阶段。对于第一个阶段来说,对应于靠类似性的连续(analogical successions)而产生那种可能性。这些在数目上很少也缺乏多样性,因为主体本身满足于延迟一些他们在现实中刚刚执行或注意到的变异或现实化。在第二阶段构成了具体的和受限制的协同可能性。在第三阶段出现了无限定的内涵和不受限制的外延的协同可能性;在这一水平上主体自发地说道"无限"。

这样,在可能性与必然性的发展之间存在着密切的平行性,而且与运算结构的发展有着确定的关系。但是后者不是给这种发展提供方向的东西。在可能性表明分化、必然性表明整合的范围内,将在二者的联结中寻求运算的起源;另一方面,如果我们希望把一种原始的而不是衍生的形成能力归属于可能性和必然性,那么要看出动作的内化怎么样充分地提供具有运算系统特征的适当结构化的、可逆的结构,或者要看出可能性和必然性怎么样甚至在动作变得内化之前就被构成(即是说,在当它们以公认的贫乏的形式——在可以强求的发展中仍然是丰富的——出现的时候),这是困难的。

于是让我们考察它们的形成——假定逐阶段的对应在它们一开始就介入了。从这种观点看,假定仅仅由"现实性"构成初始状态,把初始状态本身设想为与主体没有联系的一种纯粹状态,只是略往后必然性和可能性的联合建构才附加于这种初始状态,这样的假定总体上是错误的。由于现实从一开始就被同化于主体的格式,初始状态就以在

现实、必然性和可能性之间普遍缺乏分化为特征。一方面,已知在数量和初级同化格式的结构的贫乏的状态,现实被设想为它"必定是"这样的方式——导致普遍化的虚假必然性。[1]另一方面,唯一的可能性是主体实际感知到的很少的变异。于是,三种模态间分化的一系列步骤中伴随着初始的未分化状态;但在我们第一阶段中,初始融合的许多残余仍然处于虚假必然性的形式,并且可能性局限于实际上实现了的东西。

那么,当可能性和必然性从它们起初与现实性的混合中开始分化时,可能性与必然性的共同起源是什么? 回答是简单的。它将不在客观地外在于主体的现实性本身得到发现,因为现实性只是本相(what it is),能被记载的可观察事实本身并不是或者包含在可能性中,或者包含在必然性中。相反,后者自然起源于不断增加的同化格式及其它们的互反性,这些格式被协调,从而导致推理能力的发展。格式的协调导致产生前必然性和局部必然性的组合(前必然性和局部必然性取代了初期的、概括化的虚假必然性)。然而,任何既定的组合也表明其他可能的组合。最后,外部的、外源的现实性开始介入必然性和可能性的这些新关系之内,成为更客观的——导致为什么、怎么样的问题以及更一般地说是理解的问题。

6

现在回到在运算的形成中必然性和可能性的作用上来。我们并不关心解释一种孤立的运算的构成,诸如类的联结或交叉,而是关心说明任何类型的运算——这些运算聚集着那些包含三个组织化水平(整体、部分或子系统的水平)的系统——的本质特征,以及由特定运算及其产物所创造的各个因素。这种组织化似乎是与完全适当理解了的机制——诸如反省抽象和完全的概括——相联系的,这种机制能解释从相对贫乏的结构向更丰富的结构过渡。如果人们将这些发展与生命有机体的发展相比较,就可以(仍然是在相当一般的水平上)在这些机制和在"器官"的形成中起作用的所谓组织者(organizers)之间做出类比——这对应于作为一个整体的认知能随意支配的那种"结构"。

但是为了从另一端点考虑事情——例如在将灵长目或人科的胚胎发生与低等动物幼虫的胚胎发生相比较过程中,一个更一般的问题就出现了。这是标志某些当代生物学家称为"进步"之特征的一般方向问题。当我们问自己似乎控制这些连续时结构发展的一般机能过程——在科学史水平以及在其阶段序列中心理发生水平上——是什么的时候,在发生认识论中也出现了这个问题。

---

① 甚至在物理学史的前科学理论中可以发现这种知觉。在我们关于心理发生与科学史之间的关系的书中,Garcia表明,亚里士多德的物理学构成一种可承认的构造化的和连贯的系统,其唯一缺陷是,不是从转换的前提开始,他把他的所有演绎基于可观察物上(他当作是内在必然的),换言之,基于虚假的必然性上。见皮亚杰和加西亚:《心理发生与科学史》。

仅仅说到从较少的结构到更发展了的结构过渡的机能方面——一个机能可以被最多样类型的结构机制或器官(如同化)得以发展运用或练习,我们看到,它们显然存在于越来越多样化的分化和整合中。而且,认知结构的三种主要平衡过程之一是在分化与整合之间的相互作用。我们已经叫作可能性与必然关系的相互依赖。换言之,可能性是开放之源,必然性是封闭之源。封闭由新的开放不断的取代同样是我们所谈论的整合化过程的本质特征。总之,必然过程和可能性的形成指向结构形成的整个过程,但却是在更高的水平上。

7

现在我们只需要就这些机制而言给现实性定位——即是说,把先验于知识而存在的客体本身,与客体所生成的东西——一旦它被包含于由主体所建构的必然性和可能性的框架之内(然而在没有其内在的特征被修正的情况下,仍然是独立于主体)——相比较。初一看,现实性在其两端似乎被主体的这些建构完全吸收或“消耗”:在开始,它被归结为不过是在其他可能的情况中一种特殊的情况,在最后,它发现自身附属于必然的联结。但在任一情况下,它通过更好地被理解,以及从低层次的可观察物到更高层次的被解释了的现实性的提高,而变得更丰富。这里仍然需要澄清两个模棱两可的观念。

第一个是在这种把现实性从属于主体的认知工具中会看到某种形式的唯心论。但这是完全错误的:事实上,作为一个有机体和物质动作来源的主体也是一个客体(甚至当她的动作内化为运算的时候),因而是现实的一部分。这就解释了数学与物理学惊人的一致。

第二个模棱两可,可能是我们在客体本身(object as it is)和作为由主体所解释了的客体之间做出的区分所造成的结果。这会把它与康德在“自在之物”(本体)与“作为显现之物”(现象)之间的区分等同起来。但这同样是错误的。因为主体在其认知活动中以不断适当的方式逐渐认识和重构客体。然而,每一次进步也都带来了新的问题,以致客体变得越来越复杂。在这个意义上,当主体接近它时它退却了。这意味着,主体与客体之间的绝对差别减低为连续接近的一种机能。但总是仍然有一种相对的距离——客体处于一种“极限”状态,这完全不同于不可知的和永远不变的本体。

从这些情境中所学会的东西是相当明显的:在可能性的发展中,与人们能决定必然性的绝对终点一样,不存在一种绝对的开端。任何必然性仍然是有条件的,将需要被超越。因而也不存在任何内在必然的定然判断。

策划者后记

皮亚杰其人其说的历史和学术地位国内外学界早有共识，笔者此处无须赘言。但笔者想说的是，皮亚杰不愧是一位老而弥坚、与时俱进的一代大师。直至垂暮，他都在从相邻学科汲取滋养，不断修正和完善他的理论，其创新之显，改变之大，以至于人们足有理由称其晚年理论为"皮亚杰的新理论"，以区别于之前所谓"皮亚杰的经典理论"。概括而言，新理论主要体现在两个方面：其一是以抽象代数中的态射-范畴论取代早年的群、格等代数系统作为思维运算的形式化工具；其二是以注重意义蕴涵的内涵逻辑取代传统的外延取向的外延逻辑，从而改造了运算逻辑，使之更符合心理逻辑的实际状况。当然，新理论的产生并未使皮亚杰的理论变成数学和逻辑学。正如英海尔德所言，"皮亚杰从未试图，当然也从未宣称自己是一名逻辑学家。他只是选择和采用某种数学和逻辑的模型，为的是能够分析儿童所做出的对知识和范畴的建构。"[①]知识的个体发生、发展的心理学研究仍是其发生认识论的主题，这是他终其一生未曾放弃的主要目标。

遗憾的是，皮亚杰的新理论并未受到人们的足够重视，国外如此，国内犹然。如从网上检索可知：有关态射-范畴观的文献竟只见寥寥数篇。近年见著报刊者更付阙如。笔者以为，这种状况并不正常。我们也不能把这一现象仅归咎于是皮亚杰新理论"曲高和寡"之故。或许，它与当前学界只勤于所谓实证研究的数据积累而疏于理论的概括和提升有一定关联。这种局面应该打破。皮亚杰所主张并身体力行的发生认识论的跨学科合作研究特色应予继承。

基于上述指导思想，笔者主持了此套译丛的引进和翻译工作，目的是引起国内心理学界更多同行对皮亚杰新理论的兴趣和重视。本译丛五本书均为皮亚杰晚年著作。《走向一种意义的逻辑》和《态射与范畴：比较与转换》更是皮亚杰及其合作者直接阐述其新理论的经典之作。前者采用新的内涵逻辑取代外延真值表逻辑作为刻画儿童认知发展的工具；后者以更具动态性和建构性的数学工具作为描述认知的过程、程序和机制的数学模型。另三本则与新理论之间存在或多或少的关联：《心理发生与科学史》探索儿童思维的心理发生和科学概念的历史演变之间的连续性和同构性，揭示新理论和新模型的普适性；《可能性与必然性》和《关于"矛盾"的研究》则是皮亚杰以新理论为视角，继续

① 见 B. Inhelder 为 H. Beilin & P. Pufall 主编 *Piaget's Theory: Prospects and Possibilities*（1992, LEA. Inc）一书所写的前言。

发生认识论关于可能性和必然性以及否定、矛盾等逻辑范畴的个体发生研究。当然,同属于皮亚杰晚年新理论之范围的著作还有《关于"对应"的研究》(1980)、《概括化研究》(1978)、《反省抽象研究》(1977)和《认知结构的平衡化:智慧发展中的中心问题》(1975)等。这些著作我们拟在本译丛的第二辑中向读者继续推出。

现在,当本译丛的五本书呈现在读者面前的时候,我想表达对日内瓦大学皮亚杰文献档案馆馆长雅克·弗内歇(Jacques Vonèche)教授及Jean Piaget Archives Foundation的由衷感谢。这五本书的入选是笔者1999—2000年在文献档案馆访学期间与弗内歇教授商定的。弗内歇教授是该基金会的主任,他慷慨地答应由基金会作为主要出资方,购得它们的中文版权(华东师范大学出版社同样也在资金上给予了支持)。尽管基金会确有鼓励和支持皮亚杰著作在世界范围内以多语种出版的宗旨,但由于基金会近年的财政情况并不理想,因此,我们获得这笔资助应该说并非易事。弗内歇教授还亲自出面与原出版社交涉。在中译本成书之际,作为现今日内瓦学派的代表人物和皮亚杰的当年同事,弗内歇教授还为之撰写了精辟的总序,并积极约请有关的皮亚杰研究专家为它们分别撰写中文版序言。所有这些,自然为本译丛增色不少,同时也更有利于读者对皮亚杰新理论的理解和把握。

关于本书的译者,笔者想略作介绍。笔者本人实际只译出其中一本(《走向一种意义的逻辑》),此书中涉及相干与衍推逻辑的部分还承蒙华东师范大学哲学系终身教授、逻辑学家冯棉同志审阅,笔者从中获益良多。《心理发生与科学史》由复旦大学心理学系姜志辉副教授直接从法文译出。姜先生曾为商务印书馆译过多部学术名著,是一位心理学专业知识与法文水平俱佳的知名学者。其余三本书的主译者均为笔者的已毕业或在学的博士(生),笔者虽忝为审校,实际上主要是他们的辛劳成果。熊哲宏教授曾以其博士论文《皮亚杰理论与康德先天范畴体系研究》(2002)及《皮亚杰哲学导论》(1995)等专著和有关皮亚杰发生认识论一系列论文,名噪中国理论心理学界。复旦大学心理学系副系主任吴国宏副教授研习皮亚杰理论多年,在弗内歇教授来华讲学期间作为现场翻译,其专业知识与外语水平均深得弗内歇教授的好评,至今教授在与笔者的来往信函中还屡有提及。刘明波、张兵与孙志凤三位同志着力合作翻译《态射与范畴:比较与转换》一书,应该说他(她)们完成了一件十分艰巨的任务。孙志凤同志受过数学专业的本科训练,因此可以期待在此书涉及数学的内容上,译文当无大的错误。另外,在本译丛译文的后期整理、打印等繁杂事务中,蔡丹同志做了大量工作。当然,本译丛最终能够出版,华东师范大学出版社社长朱杰人教授给予了鼎力支持,心理编辑室的彭呈军同志和版权部的龚海燕同志更是付出了极大的辛劳。没有他们的决心和帮助,别说这套译丛的最终出版,或许连其最初的动议都是不可能产生的。

最后,我想再次引述英海尔德的话与国内有志于皮亚杰研究的同仁们共勉:

“我们用不着赞美皮亚杰已完成的工作，对他的最好的纪念礼品是推进他的研究。”①

对皮亚杰的新理论更应作如是观。

李其维

2005年7月7日 华东师范大学

① 见B. Inhelder为H. Beilin & P. Pufall主编Piaget's Theory: Prospects and Possibilities(1992. LEA. Inc)一书所写的前言。

附　　录

论皮亚杰的必然性

〔英〕莱斯利·史密斯　著
查抒佚　译

论皮亚杰的必然性

On Piaget on Necessity

作　者　Leslie Smith

原载于*Philosophical Perspectives on Developmental Psychology*, Oxford: Basil Blackwell, 1987, edited by J. Russell, pp. 191–219.

查抒佚　译自英文

论皮亚杰的必然性

1　前言①

针对皮亚杰对知识发展所作的解释，一个来自哲学的反对意见认为皮亚杰的解释将必然性与经验问题混为一谈。该反对意见得到了来自于哲学(Hamlyn，1971，1978)、心理(Brown & Desforges，1979)和教育(Egan，1983)评论的多方面支持，主要表现在下述的关键问题上：

到底是什么让他能将相应心理结构的元素间的*经验关系*描述为*必然性关系*？(Feldman & Toulmin，1976，p.418；斜体字为本文作者②所为)

在皮亚杰看来，认知结构的正式特征在于其构成原则，此类结构还没有任何一个是通过参考儿童的表现来获得实证检验的。那些区分出哪些是必然性问题(逻辑的、规范的和正式的，故而不是经验性的)和哪些是经验性问题(事实的、心理的，故而不是必然性的)的哲学家因为这种区分被疏漏而质疑皮亚杰的解释。确实，此类反对意见的诉求之一就源于这样一个事实，即很容易在皮亚杰的著作中找到一些似乎表明遗漏了此区分的段落：

对智慧的心理学解释在于通过展示后一发展阶段是如何必然地打破当下的平衡，从而回溯智慧的发展过程。(Piaget，1947，p. 55/1950，pp. 48–49)*一种结构可能赋予自身以必然性，并通过本质上内生的方式来作为渐进平衡的结果*。(Piaget，I967a，p. 438/1971，pp. 316–317)

在这些段落中，皮亚杰并没有声称一个结构的正式特征是必然与其他那些结构有关，而是认为结构变化的过程本身就是一个必然过程。

有趣的是，该反对意见在皮亚杰自己的不一致说法中能以一种更强烈的形式得以重申。这种不一致说法可以用几种方式来加以说明。因此，皮亚杰(1966，pp.132–143)拒绝认为其说法愿意接受唯心理论的指责——其说法并不打算在经验证据的基础上去验证某个规范性原则，同时他也拒绝认为其说法容易受到逻辑主义指责的攻击——他的

---

① 通过使用法语和英语的引文来表示对标准翻译的修订，例如(Piaget，1947，p.55/1950，pp.48–49)。使用星号*来表示标准翻译与我自己(指 Leslie Smith)的翻译之间的区别，例如(Piaget，1975，p.50/1978，p.43*)。——作者注

② "本文作者"指莱斯利·史密斯，下同。——译者注

说法并不打算为某个心理关系提供逻辑原理。这种拒绝——正如接受其说法正确那样——表明皮亚杰知道经验问题和必然性问题之间的区别。此外,皮亚杰针对成人对于分析与综合命题间区别的认识的开展的实证研究(Apostel et al.,1957a; Quine, 1960)表明他对这种区别有一定的了解。同样地,基于观察的判断与演绎的必然性之间存在的关键差异也是皮亚杰(1975, p.50/1978, p. 43*)得出的。重述一下,此处的重点不是皮亚杰提出了这种区别的用法,而是他实际上提出了所有的区别。此外,这种区别并不只出现于他最新的著作中。他的早期论文(Piaget, 1922)已经明确阐述了观察与演绎推理之间的区别,他的经典研究同样阐述了这一区别:在守恒方面是什么将第2阶段从第3阶段的表现中区分出来的,包含性任务或传递性任务是对经验策略或演绎策略的分别使用(Piaget, 1941/1952)。所有这些情况的核心就在于区别——或它的相似物——它正是主要反对意见的预设。由此可以得出结论,针对皮亚杰所作解释的批评意见并不在于它忽略了那些为其他人所接受的区别,而在于未能坚持主张那些在类似解释中已被接受的区别。

我在此讨论中的对策不是否定在反对意见中预设的区别,而是否定它在皮亚杰关于结构变化的解释中得到了应用。这场讨论有两个一开始就容易注意到的特征。首先,将尝试区分出皮亚杰在其解释中使用必然性这一概念的三种不同方式。这三种用法将被分别称为必要条件(necessary conditionship)、演绎的必然性(deductive necessity)和建构的必然性(constructive necessity),本文中间部分对它们分别作了详细的讨论。我将试着说明,皮亚杰的解释提供了经验上的必要条件,使人们能够理解演绎的必然性是结构变化的必然过程中的一个结果。其次,在每个部分中将用到多种资料,包括皮亚杰自己的著作以及对其观点的哲学和心理评价。这些资料的并置是经过深思熟虑的,目的在于阐明一个核心主张,即一个以必然为前提假设的解释,可能会产生与经验主义相符的结果。事实上,接受这种做法,为拒绝关于皮亚杰对结构变化所作解释的主要反对意见提供了一些额外的支持。

2.　必要条件(necessary conditionship)

本节的论点是皮亚杰对知识增长的解释提供了:(1)必要而非充分的条件和(2)经验而非逻辑的条件,但(3)并非所有哲学家和心理学家都接受这一点。

2.1 必要–充分(necessary–sufficient)

主张X_1是Y的一个充分条件就是主张只要X_1存在则Y也存在。这种关系可能以两种形式中的任何一种出现。要么是X_1独立于其他要素,比如X_2的对Y而言是充分条件,X_2对Y而言也是独立的充分条件,即假如X_1存在而X_2不存在或假如X_2存在但X_1不存在,则Y存在。或者是,X_1对Y而言是充分的,但只有在与其他所有共同导致Y的要素相结合时,即X_1的单独存在并不会导致Y的存在,虽然当X_1与其他所有Y存在所需的共同要素结合出现时Y也伴随出现。在这两种情况下,在X_1存在而Y不存在的实例中让有关

X_1是Y的充分条件的断言变为无效。请注意,关于X_1对Y而言充分的断言并不会因为X_1不存在但Y存在的情况而失效,因为Y的存在可能是因为Y的其他充分要素存在。说X_1是y的充分条件就是说当X_1存在时Y也存在,而不是说当Y存在时X_1也存在。

声称Z_1是Y的必要条件就是声称Z_1的不存在是与Y的不存在相结合的:Z_1不存在时,Y也不存在。这样的断言因为Z_1不存在但Y存在的情况而失效,在这种情况下Z_1远非Y的必要条件。注意,Z_1是Y的必要条件的论点并不会因为Z_1存在而Y不存在的情况而失效:声称当Z_1不存在时Y也不存在并不等于声称当Y不存在时Z_1也不存在。最后,无论Z_1是不是Y的唯一必要条件,或无论Z_1是不是与Z_2结合作为Y的必要条件,Z_1或Z_2的缺失都会导致Y的不存在。

皮亚杰的解释显示了知识增长的必要条件,而不是充分条件。在他获得伊拉斯谟奖时的致辞中就明确表明了其主张。将同化定义为经验数据整合到一个认知结构中,皮亚杰指出:

同化是一个必要条件,而不是充分条件,但它对所有——甚至是实验的——知识而言都是必要的。每一次从经验中的学习都是以同化框架为前提的,而且这无论是对最精确的科学物理还是对幼儿而言皆是如此。(Piaget, 1972a, p.30;本文作者的译文)

事实上这一主张得到了皮亚杰早期著作的支持:

所有知识……都预设了一个外显或内隐的守恒原理系统。我们简单地断言,守恒构成了所有理性活动的必要条件,而不用考虑去确定该条件是否充分。(Piaget & Szeminska, 1941, p.16/1952, p. 3*)

因为守恒在此被认为是所有知识的必要条件,并且皮亚杰的任务就是确定一种认知结构,其使用带来了守恒,于是出现了这种结构的使用是所有知识的必然而不充分条件的结果。此外,皮亚杰的同事们也证实了这一观点:“皮亚杰经常因为把结构视作一切客观知识的充分来源而受到指责,而结构只是客观知识的一个必要方面”(Inhelder, 1982, p. 414)。总之,从一份一般性的立场声明中我们获得了明确的证据表明,皮亚杰的论述确实为知识的增长提供了必要条件。

2.2　经验-逻辑(Empirical-Logical)

声称一种条件关系是经验的,就是说这种关系在逻辑上,而非事实上可以是别的关系。相反地,声称一种条件关系是逻辑的就是声称这个关系在事实和逻辑上都不会是其他关系。否定一种经验的条件关系,就会产生一种在事实上错误的主张。否定一个逻辑的条件关系会导致矛盾。

皮亚杰的阐述表明,知识增长的必要条件在特征上是经验的而非逻辑的。该主张的表现之一就出现在皮亚杰关于发生认识论的讨论中。发生认识论与哲学认识论共享了对智慧本身(ipse intellectus)的研究:这种对莱布尼茨(1949, p.111)著作的暗示在皮亚杰(1953, pp. 2-3)的讨论中是显而易见的。然而这种引用也伴随着批评意见。“至于

柏拉图式的、理性主义的或先验论的认识论,每一个都认为自己发现了一些高于或先于经验的关于外部知识的基本方法……这些学说都疏于证明该方法对主体的实际可用性。现在,无论你喜不喜欢,这都是一个事实问题"(Piaget,1970, p.121;1970, p.5*)。皮亚杰将此作为其发生认识论的一个优点,他的做法是经验性的,即直接验证知识的具体方法——柏拉图式的形式、笛卡尔的天赋论和康德的范畴——实际上是认识主体可用的。皮亚杰对哲学认识论的异议并不是它们每一个都是矛盾的,而是它们每一个在经验上都是假的:它们各自代表了一种逻辑可能性,却不是以知识发生的实际方式代表。总之,皮亚杰假设他自己的说法既不矛盾且得到了实证检验。正是出于这个原因,知识的工具在他的说法中得以确定,即认知结构是知识增长的经验性必要条件。

同样的结论得到了皮亚杰对两个核心的基本原理所做讨论的支持。一个基本原理是任何同化结构都有被使用的趋势。第二个基本原理是任何同化的使用都需要结构上的调整。皮亚杰(1975,p. 13/1978, p. 7*)随后称这两个基本原理都有实证基础,因为它们每一个都是由真实研究中得到的。坚持如果整个经验中使用同样的结构则不会发生结构改变这一主张在逻辑上是有可能的。皮亚杰否定了这一观点,无论是在他目前的主张中,还是在他对功能和结构的区别使用上(参见Piaget,1931, p. 151)。作为一名构造主义者,皮亚杰承认一切经验都是有结构的,而且这一说法与在整个经验中使用不同结构并不矛盾。对经验而言不变的是某些结构的功能,即使任何一个具体的结构都是功能的一个可变特征。在经验中某些结构的用法并不要求使用经验中的某些特定结构,更不用说那些在整个经验中数值相同的结构了。总之,个体在不同的发展阶段使用哪一个同化结构,这是一个实证问题。

2.3　评论

显而易见地,此处对皮亚杰的立场的解释并不总是被接受的。具体而言,发展心理学家倾向于将皮亚杰的解释为知识增长提供了充分条件这一观点归于皮亚杰所为,而哲学家们则倾向于强调皮亚杰所述条件的必然性。先来看看心理学家们所采取的立场。当然,一些评论家(Gallagher & Reid, 1981, p. 40)认为是皮亚杰提出其观点中的条件是必要条件,尽管这种认识并不为所有人所接受。一些评论家(Flavell, 1963)根本没有明确条件性关系的类型;其他人则陈述是皮亚杰认为遗传、环境和社会条件都是必要条件,而无须具体说明皮亚杰自己所述条件的性质是什么(Furth, 1981 p. 207);还有一些人则在没有任何理由的情况下认为皮亚杰的解释所提出的条件既是必要的也是充分的(Vuyk, 1981, p. 36)。一个针对皮亚杰心理学的哲学评论对此作了反驳,该评论认为皮亚杰所述条件是不充分的,即使它们(仅仅)是必要条件(Hamlyn, 1978, p. 55)。所有这些评论的共同之处在于遗漏了皮亚杰观点中的详细说明,在上面的2.1和2.2节处对这些遗漏作了部分纠正。

但通常情况下,遵循由弗拉维尔(1963)开创的先例,心理学家根本不讨论皮亚杰所述关系的性质。他们的研究暗示是皮亚杰的解释提出充分条件这一观点。当然,这种

归因判断很少明确表达出来，但却是他们的实践预设。这一结论有三重基础。首先，在规定任务上的成功被当作是对儿童能力归因的关键（Winer，1980，p. 309）。因此，儿童的逻辑能力是基于在守恒、包含或传递性任务上的成功表现归结而来的。（鉴于最近的综述，参见 Gelman & Baillargeon，1983.）其次，它坚持认为皮亚杰的观点显示了对儿童能力的一个“严峻和消极的”解释（Donaldson 等，1983；另参见 Bryant，1984），而这样的解释是他未能研究其他对成绩有不同影响的变量的作用所带来的结果（Brainerd，1978）。第三，在包含（Winer，1980）、守恒（McGarrigle & Donaldson，1974；Samuel & Bryant，1984）或传递性（Bryant & Trabasso，1971）任务中无论这些变量是知觉的、语言的、语境的，还是认知的。基于对这些变量的实际控制，对儿童的能力做出一个积极乐观的解释是可行的。现在对这种研究策略的认可聚焦于皮亚杰式的任务上，其中关键的问题是：在这样那样的任务上成功或失败的人口常模是什么？如果对某些变量的实验操作导致了成功的表现，而与此形成对照的是在皮亚杰式的条件下儿童未能成功完成任务，那么从中得出的结论就是可以驳回皮亚杰的解释。它可以被宣布无效是因为它与现有的证据相背离。然而，只有当皮亚杰的解释提出充分条件时该结论才会随之而来，而当皮亚杰的解释打算提出必要条件时则不会得到该结论。如果在皮亚杰的解释中所阐述的条件是必要条件，那么不能以这种方式对它们置之不顾。

我们的回答是：实质问题不在于皮亚杰所阐述的条件是否*被视作*必要条件，而在于这些条件是否是必要条件。前面的论点通过假设后者情况属实来规避这一实质问题。然而，我们的这个回答是有可议之处的，因为争议中的研究策略大体上是灵活的，足以研究皮亚杰所述条件的发生，但实际上这种情况并未发生。注意被集中到皮亚杰式的任务和前因变量的控制差异会影响它们的表现上。因为要让回复持续下去，注意力应该集中在皮亚杰所阐述的条件和皮亚杰式任务上。事实上，对后者的忽视是显而易见的。对此做法的合理解释是，它建立在皮亚杰的观点之上，即皮亚杰的解释为在其任务上的表现提供了充分条件。这样的归因与上文 2.1 节所概括的归因是不相容的。

与 2.2 节概括的属性不相容的观点是认为因为皮亚杰的解释详细说明了关系在逻辑上是必然的，所以皮亚杰的条件不需要实证的检验。这一结论的基础是双重的。首先，它认为皮亚杰的解释明确指出关系是逻辑上必然的，因为举例来说，阶段的过渡是一个从特殊到普遍的进程（Atkinson，1983；Hamlyn，1971）或是因为阶段特征之间是由逻辑包含关系通过自身的定义连接起来的（Feldman & Toulmin，1976）。其次，它得出的结论是一个逻辑上的必然关系不需要实证检验，这大概是因为关系要保持*简单*。当然这样的哲学家（Atkinson，1983，p. 163；Feldman & Toulmin，1976，p. 466；Hamlyn，1978，p. 46）小心地注意到逻辑和时间上的优先顺序不需要一致。同样清楚的是坚持这一主张所面临的失败。这一失败实际上表示，如果一个关系是必然的，那么让它去接受实证的检验就是在“浪费时间”（Brown & Desforges，1979，p. 90），例如：“许多皮亚杰所谓的‘阶段’之间的关系是逻辑关系……（因此）许多皮亚杰所谓的经验发现其实都

是伪装分析性真理”(Atkinson, 1983, pp.94–95)。现在,这样的论点遭到了反驳(Smith, 1987)。例如,假设三个被标识为A,B和C的发展阶段,并假设阶段A被定义为命题演算,阶段B是谓词演算,以及阶段C是模态逻辑(modal logic)[①]的(弱)系统。按照Hughes和Cresswell(1972)的观点,按照这一定义,那么阶段A就是阶段B的一个逻辑必要条件,并且阶段B是阶段C的一个逻辑必要条件。明显的事实是,这样的逻辑优先顺序与几个不同的时间优先顺序是一致的。例如:

快速退化(Fast regression)——个体在出生时即具有了阶段C的能力,因此同时具有阶段B和阶段A的能力,但在儿童期发生了退化所以只剩下阶段A的能力。

慢速退化(Slow regression)——个体在出生时就具有了阶段C的能力,但儿童期退化后还剩下阶段B和阶段A的能力,到了青春期进一步退化到只有阶段A的能力。

稳定状态(Steady state)——个体在出生时就具有阶段C的能力,因此同时具有阶段B和阶段C的能力,这些能力贯穿生命始终。

快速发展(Fast progression)——个体生而具有阶段A的能力并在儿童期间获得了阶段C的能力,也由此获得了阶段B的能力。

慢速发展(Slow progression)——个体生而具有阶段A的能力,儿童期间发展并达到阶段B的能力水平,青春期进一步发展所以获得了阶段C的能力。

上述五个时间顺序的系统涉及在A、B和C的定义特征之间假设的逻辑优先顺序。然而,以实验为根据的让一个系统——比如说最后那个慢速发展系统——成为次序关系的真实系统并不是在“浪费时间”,也不是一个对伪装的分析性真理的发现。

总之,本节尝试确定必然性概念的一个意义在皮亚杰的解释中得到了运用。该解释在这里被理解为一个说明知识增长的经验性必要条件。也有人认为这样的理解无论是对弄清皮亚杰的解释的意思,还是对阐释在心理学和哲学针对皮亚杰的解释做出的不准确的替代性解释评论中所呈现出的趋势而言都有一定的解释价值。

3　演绎的必然性

必然性概念的第二个用法在皮亚杰的解释中也得以应用,它源于真值(truth-value)与形态(modality)之间的区别。一个信念是否为真而非假的问题,与信念以何种方式持有的问题是不同的。信念的正确性并不要求信念是必然的。我们所讨论的区别并不来自于对某个信念的接受是否意味着个体要接受该信念的所有预设和结果(Stroud, 1979)这一问题,相反,区别关注的是一个所持信念的内容必然为真的个体,是否接受该信念的必然性。讨论分三个部分,包括:(1)回顾皮亚杰关于儿童对演绎必然性的理解的解释,(2)一篇贬低形态问题以支持真值问题的心理研究评论文章,以及(3)评价与知

① 模态逻辑,又称为内涵逻辑,逻辑的一个分支,研究必然、可能及其相关概念的逻辑性质。用于处理用模态,如“可能”“或许”“可以”“一定”和“必然”等限定的句子的逻辑。——译者注

识概念的哲学分析有关的发生谬误(genetic fallacy)。

3.1 理解演绎的必然性

皮亚杰对儿童关于演绎必然性的理解的兴趣在他的第一篇心理学论文中就可见一斑了。现在的问题不只在于儿童是否对任务做出了正确的反应,而在于儿童的反应是否基于推理。"此处所说的推理是正式的,即从一个或多个命题中得出内心毫无疑问的坚信且不需要诉诸观察的结论。无可争辩之处即推理存在之处"(Piaget, 1922, p.222;作者的译文)。皮亚杰此处的立场反映了经验主义与规范主义之间的区别——这一点可以从他在本章导言中的描述中看出。他的论点是一个建立在观察基础上的信念,不是一个推论性的、必然的信念。然而皮亚杰在其构造主义的(参见 Smith, 1986)著作中对这一观点进行了修正。在这本著作中,皮亚杰坚定地认为存在一个认知结构,对它的使用支撑着在任何一个发展阶段所获得的全部知识,包括观察性知识。

从简单记录外部数据的意义上说,"有条理的"经验——在主体没有做出贡献的情况下——实际上并不存在……实际经验永远与逻辑-数学的框架不可分割。(Piaget, 1969, p.127;由本文作者译自法文)

让我们回顾一下,即使从一开始就记录,并且已经记录了最年幼的主体,物理事实也只能通过逻辑-数学框架的方式来记录,尽管是基本的。(Piaget, 1977b, p, 321;由本文作者译自法文)

具有逻辑-数学特征的结构从婴儿期就开始被用于获取知识。因此,在皮亚杰看来推理和观察之间的差别是从参考个体在不同发展阶段所用认知结构的具体特征中得出的。即使是在观察性知识的获得中也存在一个推理的方面,因此推理与观察之间的区别实质上取决于在讨论中的推理的具体类型。

有许多地方阐明了推理的具体类型:皮亚杰的解释关注于适合理解包含或传递性的演绎推理(Piaget, 1950b, p. 146),在演绎的意义上,推理是必然的,而非或然的(Piaget, 1967, p. 14)。鉴于皮亚杰的前构造主义著作指向的问题是儿童什么时候能做出这样的推论,他的构造主义著作指向的问题则是儿童是否能够做出这样的推论。在后者中,皮亚杰反对成人缩影的假设,该假设认为成人眼中的逻辑必然性与儿童眼中的逻辑必然性是类似的(Inhelder & Piaget, 1964, p. 282)。在对该假设的反对中,皮亚杰不愿使用先验法,事实上正是因为这个原因,他的解释所提供的条件是经验的,而非逻辑的。因此,皮亚杰需要一些经验标准,通过使用可能调整过的儿童的逻辑能力归因。

此处可能会招致两个反对意见。第一个反对意见是理论上的,主要在于提醒基于儿童在某些任务上的失败表现而推断其能力缺乏的归因是无效的。儿童的成功表现则令儿童具有相应能力的归因有效:缺省的推理是有效的(ab esse ad posse valet consequentia)。众所周知的,前一种做法并不能有效地说明反对理由不充足。然而,我们对该反对意见有一个充分的答复(Smith, 1987)。经验主义的方法是直接建立在经验证据的基础上,在此基础上做出能力的归因。对于给定的任务,检查儿童在该任务上的

表现成功与否,这是合理的。如果儿童的表现是不成功的,那么得出的结论就是基于该任务,没有证据做出儿童具有某些相应能力的归因。当然,儿童在其他某些任务上或同一任务的不同时机中可能有不同的表现,这是一个经验问题。然而,儿童的不成功表现确实证明了这样的结论,即没有证据是立足于对某些能力的归因的。

第二个问题是方法论上的,一个能力归因可能以两种方式犯错(Flavell, 1977)。一个是能力中的"假阳性"归因,能力实际上并不存在,被认为是儿童所为;另一个是能力中的"假阴性"归因,能力实际上是存在的,被认为不是儿童所做出的。某些心理学评论家认为皮亚杰的解释是会导致异议的,因为在他的解释中出现了后一种类型的归因(Brainerd, 1973; Wheldall & Poborca, 1980)。从本质上说,这些评论家建议恰当的任务设计使单纯建立在儿童的判断基础上的信心显得合理——这将是逻辑能力的归因建立的基础——这与建立在儿童的判断和解释基础上的信心形成对照。皮亚杰对后者的偏好导致了方法论上的反对。

对该反对意见的一个回应就是指出,皮亚杰偏爱采用一种成功表现的标准,该标准要求儿童证明一个判断是正确的,是审慎做出的,从而避免做出"假阴性"的归因。也就是说,他会接受避免做出这种归因的普遍需要,但否认使用他的经验标准实际上导致了"假阴性"归因。

首先要注意的是必然性意识的开始,"它一定是"等等。但是如果对口头陈述和意识状态有先入之见,那么使用这样的标准是危险的,即使它们的开始带来了一个有趣的问题。更强有力的事实是,这种必然性被用于行为中,而且它似乎对应于先前不完整结构的"封闭"。(Piaget, 1967b, p. 271;由本文作者译自法文)

同样的逻辑原理,例如传递性,可以用于设计两种不同的任务,其任务要求是不同的:Burt的问题和皮亚杰的系列化任务将被用作说明(Piaget, 1947x/1950, p. 146)。一个"假阴性"的能力归因去理解传递性将会带来要求高级语言能力的前一项任务比皮亚杰所采用的不要求使用这种能力的后一项任务更有被优先使用权的问题。此外,皮亚杰不使用内省标准,包括个体的必然性体验的决定(Piaget, 1967/1971, p. 316)也出于同样的原因而被否定了。不可能验证这种体验的存在,这导致"假阴性"能力归因的产生。也就是说,通过决定不使用某个语言或内省的经验标准,皮亚杰可以坚信他确实避免了"假阴性"归因的产生。

第二个回应是主张首选标准确实要求个体表现出对行为必然性的理解。当儿童做出的反应被调整到系统中——一个与逻辑结构同形的系统——意味着必然性已被用于该个体的行为中。从这个角度来说,个体的反应是一个开放系统中的基本成分。个体已经获得了新的可能性(*Ouverture*),然而一个开放的系统并不排斥封闭(*fermeture*):通过使用一个推理的框架,可能性得以整合(Piaget, 1967, p. 220/1971, p. 155)。观察者只有通过同时研究儿童的判断和对判断的解释才能在经验基础上建立起儿童所使用的思维系统,这是一个开放但已经封闭(open-but-closed)的思维系统。因此,既然皮亚杰

认为可逆性是演绎思维的一个基本特征，那么可逆的思维就是开放的，并以这种方式结束。能从上级类中减去其从属类之一的个体利用一个开放的系统就可以逆向地、推理地产生其他附属类。一种新的关系，即链接补偿类(linking complementary classes)得以理解。

系统被封闭是因为这种关系通过类的阳性特征而成为必然。下面是一个例子。在一个由10朵花(类B)构成的排列中有7朵雏菊(类A)和3朵玫瑰(类A')，两个从属类的加法产生了上级类($A+A'=B$)。理解从上级类中减去其中一个从属类会让剩下的从属类成为必需的儿童已经具备了通过(部分)互补的方法来理解必然性。在这个排列中，一朵不是玫瑰的花就是雏菊($A = B - A'$)，而一朵玫瑰就是一朵不是雏菊的花($A' = B - A$)。做出如果类A的有限补集与一个上级类有关，则类A是从该上级类中减去的这一推论是有效的(Smith，1982a)。(类似的观点可以与皮亚杰采用的可逆性类型一起应用于关系的思维——见皮亚杰，1966，p. 177)。总之，皮亚杰同时研究了儿童的判断与解释，以确定当儿童面对一项任务时给出的可能性反应是否在一个思维的演绎系统中得到了调整。

没有论据证明皮亚杰正确地将具体情况从正式的操作思维中区分出来，也没有任何类型的思维以他建议的方式作为特点，对这种认知结构的形式描述也都不是他的解释中的那个概括(Piaget，1966)。相反，有观点认为如果儿童期推理思维的一个基本特征是通过推理框架的约束来获得新的可能性与闭合，那么他们的归因就需要个体的一系列反应来接受第三方的审查。毫无疑问，“假阴性”的能力归因确实是通过这种方法产生的，但这并不是说，这样的归因是其采用这种方法的一个逻辑结果。

3.2 关于儿童推理的心理学研究

不是所有对推理能力感兴趣的心理学家都认为皮亚杰的解释是一个重要的替代性观点。通常情况下，认知心理学家们对能力的发展不感兴趣，因为他们致力于对这种发展的终点进行心理学研究。如果记忆系统被认为适合于心理分析——参照它的成分系统、图示基础或语义网络(Bransford，1979；Norman，1978；Tulving，1985)——则成人被试所使用的系统尚待解决(Murray，1984)。这样的承诺当然可能遭到皮亚杰的反对，他在2.2节中指出，无法检查某些选定的认知工具是否真的是由被试支配的。

然而发展心理学家已经开始重视皮亚杰的解释了——例如，对他的解释进行心理测试。但显而易见的是，即使发展心理学家有意于研究儿童所作判断的正确性，也无意于研究儿童对必然性的理解。为了支持这一论点，让我们来看看对三类操作任务的心理学研究：守恒、分类和系列化(对此研究的全面综述请参见Gelman & Baillargeon，1983)。

Murry(1981)对一个守恒任务的本质做了很好的描述。大体是，儿童(1)被呈现了两个观察起来相同的客体；(2)两个客体中的一个，而不是另一个，被实验人员做了转换；(3)如此一来，儿童需要再次面对两个客体，一个是原来的，另一个是转换过的，考虑

接受还是拒绝它们的等价性。大家都同意守恒任务需要这三个步骤。更进一步的步骤(4)是皮亚杰的解释中所要求的,因为必须检查儿童所作回答的基础——以及(5)对儿童演绎能力的检查。然而,正如Murry(1981, p. 164)所指出的,“很少是对必然性判断的直接评估”。事实上,在他们的全面回顾中,Gelman 和 Baillargeon (1983)完全未讨论这个方面,因为她们关注的是年幼与较大儿童相比较的思维特征,而不是儿童对必然性的理解。一些评论家(Shultz et al.,1979)观察到有某些守恒任务——实际上是由Lunzer(1968)最先研究的——没有用到逻辑的解决方式,因为它们还需要基于经验的信念。皮亚杰并没有否认这一观察结果,因为他的观点认为(见2. 1)守恒是理性活动的一个必要而不充分的条件。总之,皮亚杰式任务的范例已经——在实践中——被考察过了,而没有提及它的一个典型特征,即它的逻辑必然性。然而有趣的是,外部变量会影响着个体在守恒任务上的表现(McGarrigle & Donaldson,1974; Miller,1982; Samuel & Bryant,1984),儿童的(正确)理解模态这一关键问题却未被论及。

一个类似的发现适用于儿童的类别思维研究。对包含的研究通常涉及不同变量的作用以及它们对儿童理解的不同影响。Winer(1980)的全面回顾在这两个方面都是有价值的,因为它是全面的,也因为它显示了在儿童理解此类关系的必然性方面研究兴趣的缺乏。确实,前面的分节预示了为什么皮亚杰的包含任务是与众不同的,这仅仅是因为其聚焦于关系的必然性上。一些心理学家的明确目标是绘制出发展的路线,包括对像家庭这样的集合术语(Markman,1979),或是像金钱这样的大众名词(Markman,1985)的理解。但很明显的是这样的研究是直接建立在分类思维较为原始的类型上的,而且儿童理解的必然性不是它的核心问题。再次,结论很清楚:关于儿童理解的正确性问题优先于儿童对必然性的理解的问题,在此意义上,后者明显不在心理学研究中。

皮亚杰在系列化方面的研究主要涉及儿童进行传递性推理的能力。经典的心理学研究(Bryant & Trabasso,1971)集中于儿童具有这一理解的年龄,以及记忆作为推理所依据的前提(premises)时对推理起到的促进作用。这项研究最近遭到批评,因为那些记住前提的儿童可能仍然无法得出推论(Russell,1981),并且因为确保儿童记住前提所需的训练让接受过类似训练的猴子的表现优于儿童(Chalmers & McGonigle, 1984)。两项研究表明,推理需要更精确的回忆前提,而且经过充分训练的个体通过使用非逻辑的策略就可以成功完成任务。简而言之,现在的问题是个体所作推理的正确性,而没有涉及儿童的(正确)理解模态。相应的结论是,对皮亚杰所作解释的评价应该包括对其关键部分,即儿童对必然性的理解的评价,这样的结论并不是现在才有的(参见Breslow, 1981. n. 3251)。然而,它却是发展心理学家在实践中避开的一个结论,无论他们宣称的意图是什么。

从本篇回顾中得出的一个不恰当的结论是发展心理学的研究已经了无生趣,毫无意义了。相反地,在表现对皮亚杰未作讨论的问题的系统关注方面,发展心理学的研究已经起到了重要的作用。然而,它们的忽视是相当刻意的(Smith, 1987)。至于要得出

的恰当结论则是皮亚杰的解释针对的是一个有限范围的问题，其中之一就是儿童对必然性的理解。本节的结论是，心理学家在实践中倾向于忽视这个问题，因为他们更偏爱其他的问题——例如，儿童的理解的正确性就是被优先考虑的问题。

3.3　发生谬误（*genetic fallacy*）

如果一个结论的真伪取决于对该结论在事实上如何被接受所做解释的真伪，这就犯了发生谬误：将某人引向某个观点的原因与确定该观点是否正确无关。（Carney & Scheer, 1964, p. 32）发生谬误的一个特殊情况就是声称"如果此是由彼演变而来的，则此必须始终是彼，或至少此必须在实际上或本质上始终是彼"（Flew, 1975, p. 102）。与皮亚杰的解释相反，如果认为哲学认识论中的一个问题可以参照皮亚杰的发生认识论来回答，那么哲学家可能会说这就犯了发生谬误。同样的道理：皮亚杰的发生认识论中没有任何关于个体如何真正理解演绎必然性的阐述，这对哲学认识论理解演绎必然性是什么而言，没有任何启示。

这一结论会遭到皮亚杰的抵制，他认为他的发生认识论促成了以前一直是哲学家独家关注的问题的解决。在由美国心理学会授予他杰出科学家奖的颁奖词中清楚地表明了这一地位（参见 Piaget, 19726, p.15）。在发生认识论的定义中也表明了这一观点："发生法实际上是对知识（connaissances）的形成的研究，凭借知识的实际或心理的结构，对有关该结构机制在一定水平上的所有知识做出解释。"（Piaget, 1950b, p. 19；作者的译文与斜体字）发生认识论是一种方法，就其本身而言，没有预先对哪一个观点——在或不在哲学认识论中——是可接受地做出判断。举例来说，这个方法没有预先判断皮亚杰的发生论是否比柏拉图的发生论更好。这是因为在涉及某个问题是否属于哲学问题时没有采取*先验*的立场，如果认为是一个哲学问题，则它只经得起先验取向的检验，如果认为这不是哲学问题，那么它经得起实证取向的检验（Piaget, 1950b, pp.14, 52）。对于当前的争论至关重要的是，这种方法被认为适合于任何发展水平的知识——包括在哲学认识论中被改写的知识。

在此介绍一个对皮亚杰观点的应用。"什么是知识"这一问题已经引来了一个传统的答案（Chisholm, 1977），即，如果命题 *p* 为真，则知识存在于在一个被归类于知道命题 *p* 的主体中；主体相信命题 *p*；并且有理由相信命题 *p*。对此定义的一个反对意见（Gettier, 1963）认为即使可以接受这个回答是知识的必要条件，但它不能说明充分条件，因为也许可以满足列出的三个条件，但讨论中的个体通常不会被归类为知道命题 *p* 的人。一些哲学家将"盖梯尔问题"看作是对传统分析的反驳，因此提供了一个关于认识的因果理论（Goldman, 1978）。一些哲学家同意"盖梯尔问题"是对传统分析的一个异议，但他们认为传统的分析可以得到完善。例如，在最近一次的改进中，有人认为怀疑主义是知识新生定义的一个绝对结果："我们在日常生活中形成的大多数知识是完全错误的。"（Kirkham, 1984, p.512）这两种反应的共同点是它们都假设"我们"有客观的方法区分出什么情况下真信念是或不是知识。但现在出现的问题是："我们"是谁？无

论对此问题给出怎样的回答，显而易见的是都涉及人类的决策，因为某些个体实际上在对所有人的认知状态进行分类时都会使用一个规范原则。发生法引起了对可能性的重视，任何这种规范原则都可以作为一个心理事实来研究，即研究其自身在那些最终使用了它的人的心理中的发展。认可发生法并不排除这种可能性，即知识的传统分析是正确的——但它也不排除对于什么是或不是知识的分类具有可能性，知识本身就是一个发展的事物，"与知识结构机制的一定水平有关"。

请注意，发生法要求在规范原则与经验事实之间有一个区分。这导致将任何一个规范都当作心理事实来研究的情况。发生认识论是对规范事实的研究，例如某个规范在认知系统中的作用。这种研究的重点在于探讨认知系统中规范的形成，即展现系统的认知状态是如何随着时间发展的，以及如何产生时间性规范(Piaget, 1966, pp. 143–145)。

有人会说：这一回答是用未经证实的假定来辩论，如果一个哲学主张在发展的事实基础上遭到反对，那么发生法的使用问题很可能导致发生谬误。为了评价这一回答，让我们回忆下苏格拉底在《美诺篇》(Plato，1956)中留下的问题，一个奴隶被要求说出一个正方形的边长，而该正方形的面积是另一个边长为2英尺的正方形的两倍。苏格拉底在对话中鼓励奴隶相信边长将等于原正方形的对角线的长度。苏格拉底的证法中有趣的不是奴隶是否真的理解了这一问题，而是理解所需的逻辑能力问题。试验不但需要假设思维(Plato, 1956, p. 87A)，而且需要理解一个事物等于相同事物就等同于说它们彼此相等，即传递性(p. 84D)。因此，接受该证法的个体就是一个能进行假设思维并理解传递性的人。由此，两方面都做不到的个体就不会采取接受苏格拉底的证法的立场，同样也没有能力证明正方形的边长等于原正方形的对角线长这一判断。现在，如果知识的传统分析，或任何类似的哲学分析被保留下来，那么任何一个这样的个体将无从理解这一证法。接受这种分析会导致将认识改变解释为某个状态的转换，例如信念被解释为它物，比如知识。从这个角度来看，在具有要求的逻辑能力但未能使用它的奴隶与不具备相同形式的逻辑能力的儿童之间并没有认识上的差异。然而此处有一个关于认识论重要性的重要观点，因为在这种情况下儿童不仅缺乏知识，而且在无限大范围的类似情况下，这些原则都被实例化了。原则上，奴隶在这种情况下可以获得知识，但儿童却不能。这是一种差异，在认识论上是重要的，之所以重要，是因为它对解释什么是知识有重要的影响。

重要的是理想化的理性与最小理性之间的区别(Cherniak, 1981)。对知识的传统分析假定一个知道了的主体原则上是可以接受所有逻辑假设和任何命题的推论的。一般而言，任何先验的解释都会服从于与此相同的预设，除非对个体的理性程度做了一些限制。在哲学认识论中为理性划定界限是有可能性的，事实上，Cherniak (1981, pp. 178–179) 区分了规范性论题(个人必须做出所有的推论但只宣称推论来自于公认的信念)与描述性论题(个人必须从公认的信念中得出一些推论)，但后者是没有特定内容

的，如果它是在先验的基础上提出的话。一旦人们一致认为规范性论题过于强大——任何已知的主体都不可能拥有理想化的理性——那么对描述性论题的依赖就需要准确地说明个体的逻辑能力究竟是什么。皮亚杰的发生法非常适合增加描述性论题的特定性，因为它为“认知共性”提供了一个基于经验的解释，“认知共性”被有知识的个体基于过去的发展所使用。

4　建构的必然性

讨论现在可以直接转向第一节提出的问题：结构变化的过程在何种意义上（如果有的话）是一个必然的过程？简短的回答是，这个过程既可以是经验的也可以是必然的，但要看到为什么如此需要参考皮亚杰对结构建构的解释和他关于平衡的观点。讨论分为两个部分：（1）从四个方面回顾平衡过程可以既是经验的也是必然的；（2）对皮亚杰平衡解释的批判。

4.1　平衡：经验的与必然的

皮亚杰第一次使用平衡这一概念是在他的自传体小说《求索》（*Recherche*. Piaget，1918）中，而经他做出的概念解释（Apostel et al.，1957b）还没有被译为英文。英文的解释被认为是初步暂定的（Flavell，1963，p. 244），甚至被认为有如此多的“多余的条条框框”（Bruner，1959，p. 365）。他做了修订，试图明确有力地表达这一盘踞在他生命最后十年的概念，这一解释（Piaget，1975/1978）被认为是“他的论点的最终版本”（Inhelder et al.，1977，p. 10），尽管皮亚杰（1983；Piaget 与 Garcia，1983）之后的工作提出要重新考虑那个修订后的解释。可以肯定地说这个英文翻译的解释（Piaget，1978）是彻底不完善的（Furth，1981，p. 254；Smith，1981）。一些评论家（Furth，1981；Vuyk，1981）对皮亚杰提出的平衡模型做了详细的评述。

先将该解释的细节放到一边，至少有四个理由可以说明平衡的解释为什么与我们的主要问题有关，这四个理由是：一个时间进程需要使用非时间规范；发生法需要规范性原则的经验主义实例化；哲学论点与实证检验；以及消除模态误差（modal error）的平衡。现在它们每一个都需要得到关注。

暂时——永久

第 3 节论证的是皮亚杰的解释关注个体对演绎必然性的理解。该解释主张把认知结构的使用当作是个体理解必然性的一个条件，认知结构可以有一个正式的（逻辑的）描述。

如果这一论证被接受，显然的发展结果就是一种不接受再修订的理解形式。细想下第 2 节中回顾的任何一个任务。任务表现的标准，在守恒任务上就是对同一性的理解，在包含任务上就是对包含的理解，而在系列化任务上则是对传递性的理解，皮亚杰简单地假设这些逻辑原则是正确的，简单假设可以接受在形式背景（formal contexts）中使用这种规范性的原则。他研究的是儿童在任务上的表现是否在某种程度上表示

了对应于这种原则的逻辑的理解。这在逻辑上是可能的，任何个体都应该有认知能力以理解任务中隐含的逻辑——确实，皮亚杰对哲学认识论的反对(见第2.2节)建立在假设所有此类说法的实证不充分性基础之上，而不是建立在这些说法的哲学充分性上的。因此，当皮亚杰(1980，n. 150)说在他的解释中有康德哲学的元素时，他考虑的其实是他的主张中有的是结构性而非功能性的先验。个体根本不会像康德所建议的那样在发展之初就将先验用作掌握知识的条件，而是在发展末期才会这样做(Piaget，1971，pp. 313–17)。然而，一旦得到这样的理解就不会开放地接受进一步的改变。在皮亚杰的任务中重新做出错误表现的儿童肯定会被期待经历更进一步的发展，包括结构上的改变。假设某些逻辑原则，比如包含和传递性得到了逻辑学家的认可，在那些任务中表现正确的儿童的理解(即儿童的确理解了演绎的必然性)就是一个必然性的理解。假设这种逻辑原则是可接受的，那么这种理解就*不能是自身之外的它物*。

简而言之，皮亚杰任务中的表现标准实质性使用了逻辑的规范性原则。这种原则部分地规定了任务。结果是，任何达到标准的表现都是限制进一步改变的。因此，从正式意义上说规范性原则是必然的，做出标准表现的儿童对演绎的必然性有所理解，并且该理解本身就是必然的：它必须是如它所是的理解。个体达到标准的理解中有一个未详细说明的方式，它可以通过某些规范性原则发生改变，即通过标准的变化。但如果某个标准是通过一个规范性原则来规定的——即任何具备必然模态状态(modal status)的原则——那么，即使该原则是通过被其他规范性原则所包含(subsumption)而改变的，它也遵循这样的原则：任何符合标准的理解都必须是对它自身的理解。

这不是否认一个用于指定标准的规范性原则本身可能被改变，例如通过并入一些内容更丰富的系统。这种包含的明显例子，比如命题并入模态逻辑(Hughes & Cresswell，1972)显示了包含的保真性。皮亚杰(1971，p. 184；1986)无疑想到了这样的例子，当他认识到一个正式系统可能会将另一个系统作为一个特殊情况吸收进来的时候。因此“由暂时的解释到永久的必然性之路”(Piaget & Garcia，1983，p. 27；由本文作者译自法文)既是经验的过程，因为暂时性，也是必然的过程，因为永久性。

规范性原则的实例化

在规范原则与其实例化之间有一个众所周知的差别。假言推理(*modus ponens*)这一推理原则是一种逻辑原则，它恰好在向幼儿提出的问题(Piaget，1967b，p. 277)中得以举例说明：“如果约翰在学校，则玛丽也在学校，约翰在学校，你能说说玛丽的情况吗？”一个主要的论点就是个人使用的认知结构是某些规范系统的实例化。一个主要的心理学问题是如何描绘这种结构的特征，因为在认知结构如何被描述方面还存在着一些意见分歧(Case，1985；Halford，1982)。在Seltman与Seltman（1985，p，50)之前，在某些

逻辑系统中一个认知结构有可能拥有一个形式化表达的观点已被人们广泛接受，即使还不清楚是哪一个系统实际上提供了充分的表达。

利用第2节的论据，很明显至少可以理解的是——对事实上这是否也是这样的问题不做预先判断——假设一系列的规范系统可能被认为每一个如此简单的系统都被包含在一个复杂的系统中。例如，如果这三个规范系统分别是命题系统、谓词系统和模态系统，那么在更复杂的系统中就存在着对这些简单系统的严格包含。这样的逻辑先在性[①]必须在这些系统的任何实例化中得到重视——例如，谓语系统的一个实例化肯定是命题系统的一个实例化，虽然它不是模态系统的一个实例化。但接下来（见第3节）并不是任何特定的时间顺序都受到讨论中的逻辑先在性的影响。的确，皮亚杰的论点认为如果进行了一个实证检验，认知结构（其形式表达享有逻辑关系）就会连续地进入它们的心理现实化中。

总之，与个体是否理解演绎的必然性完全无关，可以理解的是假设某个认知结构的使用巩固了所有知识的获得："所有的知识，无论如何总是必然地包含了一个同化的基本因素，它为感知或构想的事物赋予意义"（Piaget, 1967, p. 21/1971, p. 5）。也可以理解的是假设这样一个观点，它认为所有结构化的经验并不需要与我们讨论中一样的结构，因为不同的结构可以被用于不同的发展阶段。皮亚杰（1931）对功能和结构作了区分以说明这一点。由此，认知的增长，如果发生了，就必须以一定的方式增长，即与系统的形式描述恰好按照时间顺序进入知识增长是一致的，无论是在儿童当中还是在科学史上皆是如此（Piaget & Garcia, 1983, p. 18）。

哲学论点与实证检验

有一个观念是，让一个必然为真的观点接触经验证据以建立二者关系的观点是可以理解的。一个被认为必然为真的哲学论点面对适用的经验证据时会期望所有的证据都适合该论点。因此，如果有与这样的论点矛盾的经验证据，论点就可能被经验理由所拒绝：这个被断言必然为真的论点其实并非如此。因此，将那些被认为是必然命题与那些经验命题并列起来是有方法论依据的，因为对后者的依附提供了一种方法来评估前者的模态属性（Smith, 1984a, b）。

这个基本原理简单地说就是，一个必然命题被定义（Hughes & Cresswell, 1972）为一个不可能否定的命题。经验命题则是这样一种命题，它指出某些命题是可能的，包括否定命题。因此，"命题p是必然的（其否定命题是没有可能的），同时其否定命题也是可能的"这样的合取是矛盾的。可以消除矛盾的一个显而易见的办法就是拒绝其中一个合取项。结果，一个已躲过严格证伪的经验命题可能会继续优先于一个声称是必然的

---

① 逻辑先在性（logical priority）是相对于"时间先在性"而言的。它所陈述的并不是事物之间在时间序列中的先后顺序，而是事物之间在"逻辑"上的"优先地位"。"时间先在性"是对经验事实（包括科学事实）的陈述，即表述经验对象之间在时间序列中的先后顺序。"逻辑先在性"较"时间先在性"难于理解，它需要辩证的思维方式（参见孙正聿，《从"逻辑先在性"看哲学唯心主义》，《哲学动态》，1998.11）。——译者注

哲学命题。这种说法中的两个例子(参见Smith, 1987)实际上是由皮亚杰举出的，第一个例子是婴儿对逻辑的“理解”先于婴儿对语言的使用，第二个例子是儿童关于运算知识的获得先于对形式运算结构的使用。皮亚杰声称有足够的经验证据证明他关于婴幼儿能力的观点，其证据与有关的哲学论点是矛盾的。

如果这一论点被接受，它可能会被展开作为对平衡的解释。平衡被定义为“连续的建构以维持新系统的恒定”(Piaget, 1978, p. v*)。这一观点一方面可以被解释为正如其所主张的那样，使用一种类型的结构必然地引起其他类型的结构的应用。例如，使用分组结构导致另一分组结构的使用——而且必然如此。在这种解释下，这种观点就不只是认为一个结构的形式特征包括了其他结构的形式特征(参见Feldman & Toulmin, 1975, p. 409)。该观点也没有声称有归纳的证据可以证明演替过程中存在恒定的顺序。相反，该观点是对在结构的使用中产生的结构性增长的必要声明。在故意含糊其辞的情况下，讨论中的必然性是建构的必然性，这使得它与其他类型的必然性(逻辑的、经验的)之间的关系是开放的。现在，即使建构的必然性的性质尚未指明，仍然可以展开模态论证。如果该主张确实是一个必然的(在建构的意义上)主张，那么经验检验应该会得出与该主张完全相容的命题。因此，如果有经验证据与这一观点相矛盾，那么后者首选的附加说明可能会是反驳前者的证据。事实上，皮亚杰对平衡的解释是一个既包括了必然基础也包括了经验基础，原则上不是一个关于该解释的理由。这种并置提供了一种安排的方式，它实际上是该解释的必然基础和经验基础。

总之，有心理学(Apostel et al., 1957a; McCloskey, 1983; Russell, 1982, 1983)和认识论(Kuhn, 1977; Piaget & Garcia, 1983)上的证据证明这样一个观点，即被一组个体看作必然的、可能的或不可能的命题可能会被其他人赋予分别不同的模态特征。皮亚杰的平衡解释就不是这样的，所以难以理解，这只是因为它的基础被确定为必然的和经验的。

作为消除模态误差的平衡

在皮亚杰的建构解释中，可能性、不可能性和必然性的模态概念被用于他对模型的阐述中，这是对产生平衡的变化的解释。当然，在皮亚杰的构造主义著作中明确地使用了这些概念，例如，在“形式思维从一开始就导致了可能情况与必然情况的综合”的说法中(Inhelder & Piaget, 1955, p. 220/158, p. 251)。这样的概念对于解释儿童如何理解演绎必然性而言极为重要。然而，在皮亚杰近期的著作(1981, 1983, 1986)中，这些概念被用于解释结构变化的过程本身。

皮亚杰的论证分为三步。首先，发展被定义为一个从最初的不分化到分化随后整合的过程(Piaget, 1983, p. 7)。如此解释后，发展就不再是一个从不存在到存在的过程(参见Smith, 1985)。第二步，合并模态概念的实例。儿童将观察到的实例与必然性实例合并起来(Piaget, 1981)，正如亚里士多德(Piaget & Garcia, 1983, p. 73; Piaget, 1986)将实际情况与规范性情况合并起来。可以假设模态误差(参见Smith, 1984c)有两种形式。当个体做出必然的(可能的、不可能的)判断但实际并非如此时就发生了假阳

性的模态误差。当个体做出不是必然的(可能的,不可能的)判断而实际并非如此时就发生了假阴性的模态错误。皮亚杰(1981,1983)为此提供了几个示例。第三步,发展由此成为模态误差减少和消除的一系列过程。

如果这一论证被接受,就会有一种观点认为发展必须成为它所是的那个过程。要明确经验的类别就一定要提到模态的概念,模态概念的使用让经验成为经验本身的样子。这种说法并没有对在这些类别的明确过程中是否需要用到其他类型的概念进行预判。因此,如果个体的经验类别部分地通过个体对模态概念的使用得以确定,并且如果这一使用本身就是误用,因为模态误差就是其特点之一,以及,如果最终个体经历了发展,那么该发展就必须采用一种方式,而不能采用其他方式。发展必须是模态误差的减少和消除。发展的不应该是必然发生的,但知识的发展过程一旦发生,它就是必然的。

因为皮亚杰的解释是结构性的,所以它是没有特定内容的。没有声称任何具体的命题都与发展有关。事实上,皮亚杰(例见 Piaget, 1986)承认某些规范性原则在使用过程中是可以调整的:矛盾律排斥矛盾,但却无法描述实际上自相矛盾的命题。接受矛盾律,并不能指导我们认识矛盾的实例。同样地,模态概念部分地定义了经验类别,即经验类别在不能为其实例给予指导的情况下是可以调整的。因此这通常是一个关于哪个是个体在所有情况下都会犯的具体模态误差的实证问题。

就这样,在结构变化的基础上发生了知识的增长。在那个必须是模态误差消除的发展中,这一过程是必然的(在建构的意义上)。这一过程也是完全根据经验的,因为会犯哪种具体的模态误差通常是一个经验上的问题。

4.2　平衡:批判

对平衡的解释依赖于有差别的论点,包括我们在第2和第3节中概括的那些。在讨论的最后部分,我们将对三类批评皮亚杰所作解释的意见做简要的回顾。

一种批评意见认为皮亚杰的解释贬低了知识形成中固有的社会因素(Atkinson, 1983; Hamlyn, 1978, 1982)。因此有人质疑一个聚焦于个体的客体认知的平衡模型作为一个解释社会认知的模型是否恰当(Labouvie-Vief & Lawrence, 1985)。对此批评意见的一个回应就是提醒大家,皮亚杰的解释明确地包含了一个社会因素,这个社会因素被看作是知识增长中一个必要条件,并且它接受平衡性分析(Kitchener, 1981; Mays, 1979; Piaget, 1967c; Smith, 1982b)。也就是说,如果这种批评意见指出在知识的形成中存在社会因素,那么无疑地这不是对皮亚杰所作解释的一个批评。与此相反,如果批评意见指出社会因素对于知识的形成而言既是必要的也是充分的,那么这是对皮亚杰所作解释的批评。前一个版本不是批评意见是因为一个将平衡的变化当作必要条件的解释并不排除还有一些其他的与必然性平等的因素。后一个版本是一个批评意见,这是因为一个将社会因素说成既必要也充分的解释与一个将同样的因素只看作必要条件的解释是不相容的。对后一版本的批评意见的充分辩护不仅需要研究在知识获得中社会因素的存在问题,还需要研究平衡因素非必要性的存在问题。这一要求是否得以满足仍然是一个悬而未决的问题。

第二个对皮亚杰平衡解释的批评意见认为它在竞争观点面前相形见绌。这种批评意见的一个著名例子来自于人工智能领域的研究,因为具有可测性、特殊性和应用性的优点(Boden, 1979, 1982; Johnson-Laird, 1983)而被重视并得到了一些认可。从本质上说,批评指出皮亚杰对推理理解的解释可能不会赞同对儿童理解的计算机式解释。这种批评意见依赖于一个假设,即结构本身是不接受变化的。然而这种假设并不明显,在皮亚杰的解释中被驳回了。此外,认为结构不会随着时间变化的观点(Fodor, 1980)是在回避争议问题的实质。此观点需要承认一个学习的概念,而这个概念在皮亚杰的解释中是被否定了的(Smith, 1987)。这并不是说皮亚杰的解释就是正确的。它说的是这个假设所关心的是否正确仍然是一个尚待解决的问题。此处有相当多的概念问题(Boden, 1982),而且这种认可的结果将会是过早地"结束"一个解释。

最后一个批评意见认为平衡解释是不完整的。它的不完整不只是在微不足道的意义上遭到的相对忽视,即使是在日内瓦的研究中,它的不完整还在于在根本意义上平衡因素构成了知识增长最必要的条件。这种不完整性最明显的迹象就是皮亚杰频繁使用 *tôt ou tard*(迟早)这种表达方式。这种表达在皮亚杰的经典著作中随处可见(参见 Inhelder & Piaget, 955, p. 250/1958, p. 283; Piaget & Szeminska, 1941, p. 212/1952, p. 166)。在平衡的"最终"解释中同样含有大量例子:格式的使用迟早会引起混乱(Piaget, 1978, p. 82),和因此个体迟早会产生一个模态误差(p. 26),迟早导致反省抽象(p. 193)以及达到平衡的上限(*equilibration majorante*)——迟早地(p. 40)。平衡解释应该在知识已经形成但条件尚不完整的情况下去确定这些条件。知识是较早(如果是这样,那么是在什么条件下?)还是较晚(如果是的话,在什么条件下?)增长?总之,皮亚杰解释的独家用法让我们无法确定知识是较早增长或较晚增长或根本不增长(Smith, 1981)。

5　结论

第一个结论是皮亚杰的解释愿意接受不同解读。事实上,如果未来对皮亚杰所做解释的评价确实认真考虑到这一事实,那么本讨论的主要目的也就达到了。此处所用的策略已经在对皮亚杰解释的重新解读中概括了某些基本原则,即在必然性概念被用于三种不同方式的基本原则。

第二个结论是首选的解读提供了原文的支持。本讨论的中心思想一直是尝试表现为在皮亚杰的著作基础上进行解读。有意思的是,这种姿态可能会引起本讨论是"防御性"的这种反应。然而,显而易见的是此处并没有说首选的解读是唯一的解读。事实上,首选的解读是从皮亚杰的著作中引申出来的,而不是在某个研究中心被精心地构想出来的。重新解读是一种评价形式,并且一个"防御性"讨论——如果是这样的话——在前言中谈到的那种批判性评价的情况下是有一定作用的。最重要的是我们已经呈现了一个论点并且详细阐述了其理由。很清楚的是,任何接受这个论点的人都需要的下一步是表明如何独立地支持这个论点。

第三个结论是提醒一下,接受本文观点的一个好处是它为评价哲学和心理学对皮亚杰所作解释的批评意见提供了解释性价值。一个解释能够引起跨学科的推敲,这是一个明显的优点。如果"皮亚杰理论的核心思想已经得到了明确而系统的阐述"(Sigel, 1983, p. 138),那么这对哲学和心理学的贡献是显著的。事实上,皮亚杰所作解释的主要吸引力可能就是它允许跨学科审视的能力,并对独立学科起到重要的作用。

文献总汇

Apostel, L., Mays, W., Morf, A. and Piaget, J. I957a: *Les Liaisons Analytiques et Synthétiques*. Paris: Presses Universitaires de France.

Apostel, L., Mandelbrot, B. and Piaget, J. 1957b: *Logique et Equilibre*. Paris: Presses Universitaires de France.

Atkinson, C. 1983: *Making Sense of Piaget*. London: Routledge and Kegan Paul.

Boden, M. 1979: Piaget. Brighton, Sussex: Harvester Press.

—— 1982: "Is equilibration important? — A view from artificial intelligence." *British Journal of Psychology*, 73, 165–73

Brainerd, C. J. 1973: "Judgments and explanations as criteria for the presence of cognitive structures." *Psychological Bulletin*, 79, 172–9

—— 1978: "The stage question in cognitive–developmental theory." *The Behavioural and Brain Sciences*, 2, 173–213.

Bransford, J. 1979: *Human Cognition. London*: Wadsworth.

Breslow, L. 1981: "Re–evaluation of the literature on the development of transitive inferences." *Psychological Bulletin*, 89, 325–51.

Brown, G. and Desforges, C. 1979: *Piaget's Theory: A Psychological Critique*. London: Routledge and Kegan Paul.

Bruner, J. 1959: Inhelder and Piaget's. *The Growth of Logical Thinking. British Journal of Psychology*, 50, 363–70.

Bryant, P. E. 1984: "Piaget, teachers and psychologists." *Oxford Review of Education*, 10, 251–9.

Bryant, P. E. and Trabasso, T. 1971: "Transitive inferences and memory in young Children. "*Nature*, 231, 456–8.

Carney, J. D. and Scheer, R. K. 1964: *Fundamentals of Logic*. New York: Macmillan.

Case, R. 1985: *Intellectual Development*. London: Academic Press.

Chalmers, and McGonigle, B. 1984: "Are children any more logical than monkeys in five–term series problem?" *Journal of experimental child Psychology*, 37, 355–77.

Cherniak, C. 1981: "Minimal rationality." *Mind*, 90, 161–83.

Chisholm, R. M. 1977: *Theory of Knowledge*, 2nd edn. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall.

Donaldson, M, Grieve, R. and Pratt, C. (eds) 1983: *Early childhood Development and Education*. Oxford: Basil Blackwell.

Egan, K. 1983: *Education and Psychology: Plato, Piaget and Scientific Psychology*. New York: Teacher's College Press.

Feldman, C. F. and Toulmin, S. 1976: "Logic and the theory of mind." In W. J. Arnold (ed.), *Nebraska Symposium on Motivation*, vol. 23. Lincoln, Nebr.: University of Nebraska Press.

Flavell, J. H. 1963: *The Developmental Psychology of Jean Piaget*. London: Van Nostrand.

—— 1977: *Cognitive Development*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice–Hall.

Flew, A. 1975: *Thinking about Thinking*. London: Fontana.

Fodor, J. A. 1980: "On the impossibility of acquiring 'more powerful' structures." In M. Piattelli–Palmarini (ed.), *Language and Learning*. London: Routledge and Kegan Paul.

Furth, H. G. 1981: *Piaget and Knowledge*, 2nd edn. Chicago, Ill.: Chicago University Press

Gallagher, J. M. and Reid, D. K. 1981: *The Learning Theory of Piaget and Inhelder*. Monterey, Calif: Brooks/Cole. (385)

Gelman, R. and Baillargeon, R. (1983): "A review of some Piagetian concepts." J. H. Flavell and E. Markman (eds), *Cognitive Development*, vol. 3 of P. Mussen (ed.), *Carmichael's Manual of Child Psychology*. New York: Wiley.

Gettier, E. L. 1963: "Is justified true belief knowledge?" *Analysis*, 23, 121–123.

Goldman, A. I. 1978: "Epistemics: the regulative theory of cognition." *The Journal of Philosophy*, 75, 509–522.

Halford, G. S. 1982: *The Development of Thought*. London: Erlbaum.

Hamlyn, D. W. 1971: "Epistemology and conceptual development." In T. Mischel (ed.), *Cognitive Development and Epistemology*. New York: Academic Press

——1978: *Experience and the Growth of Understanding*. London: Routledge and Kegan Paul.

——1982: "What exactly is social about the origin of understanding?" In G. E. Butterworth and P. Light (eds), *Social Cognition*. Brighton, Sussex: Harvester Press.

Hughes, G. E. and Cresswelf, M. J. 1972: *An Introduction to Modal Logic*, 2nd edn. London: Methuen.

Inhelder, B. 1982: Outlook. In S. and C. Modgil (eds), *Jean Piaget: Consensus and Controversy*. London: Holt

Inhelder, B. and Piaget, J. 1955/1958: *De la Logique de l' Enfant à la Logique de l'Adolescent*. Paris: Presses Universitaires de France/*The Growth of Logical Thinking*. London: Routledge and Kegan Paul.

—— 1964: *The Early Growth of Logic in the Child*. London: Routledge and Kegan Paul.

Inhelder, B., Garcia, R. and Voneche, J.-J. (eds) 1977: *Epistémologie Génétique et Equilibration*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Johnson-Laird, P. N. 1983: *Mental Models*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kirkham. R. L 1984: "Does the Gettier problem rest on a mistake?" *Mind*, 93, 501-513.

Kitchener, R. F. 1981: "Piaget's social psychology." *Journal for the Theory of Social Behaviour*, 11, 253-277.

Kuhn, T. S. 1977: *The Essential Tension*. Chicago, III.: University of Chicago Press.

Labouvie-Vief, G. and Lawrence R. 1985: "Object knowledge, personal knowledge and processes of equilibration in adult cognition." *Human Development*, 28, 25-39.

Leibniz, G. W. 1949: *New Essays concerning Human Understanding*. La Salle, III.: Open Court.

Lunzer, E. A. 1968: Formal reasoning. In E. A. Lunzer and J. E. Morris (eds), *Development in Human Learning*. London: Staples Press.

Markman, E. M. 1979: "Classes and collections." *Cognitive Psychology*, 11, 394-411.

—— 1985: Why superordinate category terms can be mass nouns. *Cognition*, 19, 31-53.

Mays, W. 1979: "Genetic epistemology and theories of adaptive behaviour." In N. Bolton (ed.), *Philosophical Problems in Psychology*. London: Methuen.

McCloskey, M.1983: "Intuitive physics." *Scientific American*, 248, 114-122.

McGarrigle, J. and Donaldson, M. 1974: "Conservation accidents. " *Cognition*, 3, 341-350.

Miller. S. A.1982: "On the generalizability of conservation: a camparison of different kinds of transformation." *British Journal of Psychology*, 73, 221-30.

Murray, F. B, 1981: The conservation paradigm. In I. Sigel, D. Brodzinskv and R. Golinkoff (eds), *New Directions in Piagetian Theory and Research*. Hillsdale, NJ:

Lawrence Erlbaum.

—— 1984: "Cognitive development." In T. Husen and T. Postlethwaite (eds), *The International Encyclopedia of Education*, vol. 2. Oxford: Pergamon Press.

Norman, D. A. 1978: "Notes towards a theory of complex learning." In A. MLesgold, J. W. Pellegrino, S. D. Fokkema and R. Glaser (eds), *Cognitive Psychology and Instruction*. New York: Plenum Press

Piaget, J. 1918: *Recherche*. Lausanne: Concorde.

—— 1922: "Essai sur is multiplication logique et les débuts de la pensée formelle chez l´enfant." *Journal de Psychologie Normale et Pathélogique*, 19, 222–261.

—— 1931: "Le développement intellectual chez les enfants." *Mind*, 40, 137–160.

—— 1947/1950a: "*La Psychologie de l´Intelligence*." Paris: *Colin/The Psychology of Intelligence*. London: Routledge and Kegan Paul.

—— 1950b: "*Introduction à l´Epistémologie Génétique*," vol.1. Paris: Presses Universitaires de France.

—— 1953: "*The Origins of Intelligence in the Child*." London: Routledge and Kegan Paul.

—— 1966: *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht: Reidel.

—— 1967a/1971: *Biologie et Connaissance*. Paris: Gallimard/*Biology and Knowledge*. Edinburgh: Edinburgh University Press.

—— 1967b: Logique formelle et psychologie génétique. *Les Modules de la Formatisation du Comportement*. Paris: Centre Nationale de la Recherche Scientifique.

—— 1967c: *Etudes Sociologiques*, 2nd edn. Genève: Droz.

—— 1969: Quelque remarques sur les insuffisances de l´empiricisme. *Studia Philosophica*, 28, 119–127.

—— 1970/1977a: *Psychologie et Epistémologie*. Paris: Denoel–Gonthier/*Psychology and Epistemology*. Harmondsworth, Middx: Penguin.

—— 1972a: Discours de Reception. Praemium Erasmianum *MCMLXXll*. Amsterdam: Stichtung.

—— 1972b: *Principles of Genetic Epistemology*. London: Routledge and Kegan Paul.

—— 1975/1978: *L´Equilibration des Structures Cognitives*. Paris: Presses Universitaires de France/*The Development of Thought*. Oxford: Basil Blackwell.

—— 1977b: *Recherches sur l´Abstraction Réfléchissante*, vol. 2. Paris: Presses Universitaires de France.

—— 1980: "The psychogenesis of knowledge and its epistemological significance." In M. Piattelli–Palmarini (ed.), *Language and Learning*. London: Routledge and Kegan

Paul.

—— 1981: *Le Possible et le Nécessaire*, vol. 1. Paris: Presses Universitaires de France.

—— 1983: *Le Possible et le Nécessaire*, vol. 2. Paris: Presses Universitaires de France.

—— 1986: "*Essay on necessity*." *Human Development,* 29, 301–314.

Piaget, J. and Szeminska, A. 1941/1952: *La Genèse du Nombre*. Neuchâtel: Delachaux et Niestlé/*The Child's Conception of Number*. London: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J, and Garcia, R. 1983: *Psychogenèse et l'Histoire des Sciences*. Paris: Flammarion.

Plato, 1956: *Meno*. Harmondsworth, Middx.: Penguin.

Quine, W. V. 1960: *Word and Object*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

Russell, J. 1981: "Children's memory for the premises in a transitive measurement task assessed by elicited spontaneous justification." *Journal of Experimental Child Psychology*, 31, 300–309.

—— 1982: "The child's appreciation of the necessary truth and the necessary falseness of propositions." *British Journal of Psychology*, 73, 253–266.

—— 1983: "Children's ability to discriminate between types of propositions." *British Journal of Developmental Psychology*, 1, 259–268.

Samuel, J. and Bryant, P. E. 1984: "Asking only one question in the conservation experiment." *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 25, 315–18.

Seltman, M. and Seltman, P. 1985: *Piaget's Logic: A Critique of Genetic Epistemology*. London: Allen and Unwin

Shultz, T. R., Dover, A. and Amsel, E. 1979: "The logical and empirical bases of conservation judgments." *Cognition*, 7, 99–123.

Sigel, I. 1983: "Cognitive development is structural and transformational—therefore variant." In I. S. Liben (ed.), *Piaget and the Foundations of Knowledge*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Smith, L. 1981: *Piaget's Genetic Epistemology*. Unpublished doctoral thesis, University of Leicester.

—— 1982a: "Class inclusion and conclusions about Piaget's theory." *British Journal of Psychology*, 73, 267–276.

—— 1982b: "Piaget and the solitary knower." *Philosophy of the Social Sciences*, 12, 173–182.

—— 1984a: "Genetic epistemology and the child's understanding of logic." *Philosophy of the Social Sciences*, 14, 377–83.

—— 1984b: "Philosophy, psychology and Piaget." *Philosophy of the Social Sciences*, 14,

385–391

—— 1984c: *Ability Learning*. London: Further Education Unit.

—— 1985: "Making educational sense of Piaget's psychology." *Oxford Review of Education*, 11, 181–191.

—— 1986: Jean Piaget. In A. J. Chapman and N. Sheehy (eds), *Who's Who in Psychology. Brighton*, Sussex: Harvester Press, in press.

—— 1987: "Children's knowledge. "*Human Development*, in press.

Stroud, B. 1979: "Inference, belief and understanding." *Mind*, 88, 179–196.

Tulving, E. 1985: "How many memory systems are there?" *American Psychologist*, 40, 385–398.

Vuyk, R. 1981: *Piaget's Genetic Epistemology*. London: Academic Press.

Wheldall, K. and Poborca, B. 1980: "Conservation without conversation?" *British Journal of Psychology*, 71, 117–134.

Winer, G. A. 1980: "Class-inclusion reasoning in children: a review of the empirical literature." *Child Development*, 51, 309–328.

皮亚杰论变化和选择模型:结构主义、逻辑必然性与互动论

〔美〕马克·比克哈德 著
奚家文 译

皮亚杰论变化和选择模型：结构主义、逻辑必然性与互动论

Piaget on Variation and Selection Models: Structuralism, Logical Necessity, and Interactionism

作　者　Mark H. Bickhard

原载于 *Human Development*, 1988, 31, pp. 274-312.

奚家文　译自英文

皮亚杰论变化和选择模型：结构主义、逻辑必然性与互动论

摘要：在整个职业生涯中，皮亚杰并不认为随机试验和错误模型或变化和选择模型具有充分性。相反，他认为，为了解释进化和发展的事实，需要进行基于目的性的自动调节。这个所谓目的性的必然性一直是其模型的一个有争议和被普遍反驳的方面——特别是在其进化学说上。然而，必然的目的性并不是皮亚杰思想的一个孤立的部分，而是由贯穿皮亚杰所有著述中的两个中心力量的深层驱动：围绕他关于知识本质的结构主义假设所组织的一系列假设，以及逻辑必然性的关键认识论问题。然而，结构主义被证明是皮亚杰认识论的一个具有严重缺陷的基础，并且是皮亚杰著述中许多不充分和错误立场的中心——关于认识论、进化，甚至必然性本身的立场，他概述了另一种知识概念——互动论——为必然性提供了相应的替代方法。

在皮亚杰的整个职业生涯中，他否定了随机试验和错误模型或变化和选择模型的充分性（Piaget，1952，1966，1971b，1980，1985；Piattelli-Palmarini，1980）。他认为，为了解释进化和发展的事实，必须有目的性的规则。因为这个所谓目的性的必然性一直是他的模型的一个有争议的和被普遍反驳的方面——特别是在其进化学说上——更彻底地了解为什么皮亚杰坚持它，以及它又与他其他方面的思想有什么关系等，都是有趣的。

我们将发现，这不是皮亚杰思想的一个孤立和异常的部分，而是相当深刻地受到皮亚杰整个著述中的两个中心力量的驱使：围绕他关于知识本质的结构主义假设所组织的复杂性假设，以及逻辑必然性的认识论问题。在预先简单的评述中，只要知识是在结构主义术语中解释的，无引导的变化和选择性建构主义不足以解释必然知识的进化或发展性的出现。

皮亚杰是认真考虑必然性的认识论问题的少数心理学家之一。局部的必然性对任何认识论都有严格的限制——它在历史上是理性主义和经验主义之间的主要战场——但是心理学影响各种形式的逻辑实证主义［不幸的是，它仍然猖獗且仍然有影响力（对此一个分析的例子可参见Bickhard等人于1985的著述）］，其组成的经验主义，使得不可能解决或考虑到这些限制。相比之下，对于皮亚杰来说，必然性问题是绝对核心的："所有认识论（特别是遗传认识论）的根本问题是理解头脑如何实现必然关系的建构"（Piaget，1950，p.23；引用在Kitchener的著述中，1986，p.80）。皮亚杰思想中必然性的认识论问题的中心性证明了他的洞察力，特别是在实证主义的盲目性历史中，但是，我们

会发现,皮亚杰的结构主义排除了这个问题的一个可行的解决方案。

从皮亚杰的结构主义到他对于必然性问题的尝试回答,这个路径是复杂的,并且要跨越几个中间结果。我将追踪这些结果,以及它们在皮亚杰思想中的一些相互关系,并展示它们如何在方法上让步于必然性。我还将指出,结构主义本身存在根本上的缺陷(除了产生几个额外的不可接受的结果),并将概述一个替代的知识概念,为必然性提供相应的替代方法,避免结构主义的困境。

该讨论需要厘清皮亚杰思想中的两个根本区别:(1)知识的性质和知识的起源之间的区分,以及(2)在关于知识性质的问题上,皮亚杰对知识一般性运算特性的洞察以及用来建模该特性的结构主义方法。皮亚杰关于知识起源的建构主义及其对知识性质的一般运算性的观点,将在对逻辑必然性的认识论问题(尽管不是不变的形式)提供的替代解决方案中得以持续;实际上,它们以新的和更深层的方式被整合,其中关于知识起源的建构主义被认为是知识的运算(互动)性质的逻辑结果。然而,结构主义被证明是对知识性质在逻辑上不相干方法的一种说法,与皮亚杰建构主义的中心论据不一致,并且结构主义也是在皮亚杰著述中诸多其他不充分和错误立场的核心——包括认识论,进化,甚至是必然性本身的立场(表1)。

表1

	经验论	皮亚杰的结构主义	互动论
什么是已知的	实物、特性、事件、事态	实际和潜在的状态;潜在的转换	潜在互动
它是怎样表征的	编码的对应	结构性的编码对应	功能区分;隐性定义
表征的起源	1. 被动"模仿";转导,归纳 2. 编码元素的组合	1. 积极模仿;必然内源性探索的结构主义;均衡;拟表型 2. 融合适应性和适应力;没有本体论系统的区别; 3. 起源的无限回归	1. 变化与选择的元过程;探索的启发法可以构建 2. 不融合适应性和适应力 3. 回避起源的无限回归
动作与表征	不同于表征的动作; 动作可能来源于变化和选择	尝试从动作协调言说表征的发生; 从未被解释清楚	表征是由互动能力而有的功能性发生
必然性的本质	约定,即时模式编码	数学的封闭	可能性空间里的恒定性
对必然性的理解	即时的编码表现	数学的封闭; 与必然性本质的融合	较低水平关系的恒定性在较高水平上的表征;没有与必然性本质的融合
对必然性理解的来源	未解难点	一致的内源启发法的建构倾向	有差别的内源启发法的建构倾向

皮亚杰的早期立场

在《儿童智慧的起源》(Piaget,1952),以及《智慧心理学》(Piaget,1966)中,皮亚杰明确反对随机试验和错误模型。他的推理是有趣的,并且预言了他后来的立场,尽管不是全部。这个早期立场有两个重要的部分:首先,皮亚杰认为,试验和错误模型使得解释随着时间积累的知识变得不可能——知识源于早期的试验和错误中的成功与失败。他认为随机试验和错误构成都是独立的,与起或不起作用的背景无关。换句话说,他不允许试验和错误模型有试探的启发法系统——启发法本身可以发展成更强大的启发法,且试验本身属于递归的变化,是基于已构建的系统上的建构,他不赞成实验以及包含心智本体的错误模型。

没有这样的启发法和递归系统结构的领域,随之就会有皮亚杰对过去的成功和失败的知识积累的不可能性的批评。但为什么皮亚杰会忽略这种在试验和错误模型中积累的可能性?这似乎有两个相关的原因:皮亚杰正在论及一个本质上是行为主义者的试验和错误模型,其中这样的内部心智的本体被否定,他还会考虑新达尔文进化模型,其中这样的前期失败的"记忆"也被认为是一种缺席——进化变异是无指导性的随机结果,选择只是一种"过滤"。对皮亚杰立场的这种一般理解与他的观点一致,他的观点是试验和错误过程确实会发生,但它们似乎是"在智慧调查的边缘或前沿"——只是当材料超过主体的理解时——而不是在智慧的"出发点"(Piaget,1966,p.95;也可参见在Piaget,1952,p.395开始的讨论)。也就是说,试验和错误过程不足以解释智慧,但是必须被理解为是针对另一个更基本的认知和智慧领域去操作的。

皮亚杰的第二个论点指向同样的方向。这是一个额外意义的讨论,其中背景无关的试验和错误模型不能被认为是足够的。这里的观点是,当试验与错误过程确实发生时,会在已经存在的先前建构的机制中,由一些先前问题的定义,以及一些"不均衡",所引起和引导(Piaget,1966,p.96)。也就是说,有问题的不均衡出现在先前的系统组织中,问题解决不仅是随机的,而且是由先前建构的启发机制引导;并且试验不是独立的元素,而是对已经积累的知识的递归构建。在当时行为主义为主导的背景下,对于皮亚杰已经花费大量努力来建立的认知本体领域——问题解决的启发机制的本体论——是非常正确和完全可以理解的,而且现今通常被认为是理所当然的。

适应性和适应力

皮亚杰对试验和错误过程的讨论是对智慧性质分析的一部分。他的结论是,智慧

不能通过简单的、与背景无关的试验和错误来解释(例如,Thorndike:Piaget,1952,p.395;1966,p.93),因为试验和错误只能在现有系统的背景下理解。就对行为主义模式的一般反对而言,这种对皮亚杰的讨论是正确的,但它包含一个微妙的混淆,这似乎已成为皮亚杰后来关于变化和选择模型的概念背景的一部分。

皮亚杰将智慧定义为"适应"的最高形式(Piaget,1966,p.7),然后尝试了解什么是适应。他声称,"适应必须被描述为生物体对环境的作用之间的均衡,反之亦然"(Piaget,1966,p.7)。随之就有引入了多少均衡或什么样的均衡的问题,这也是定义智慧时要回答的问题——这就足以使我们在复杂性规定上达成一致——我们将什么称为"智慧"。但是这里出现了困难,因为下界线仍然是任意的(Piaget,1966, p.9),为了应对这个下限问题,皮亚杰总结说:"可以通过发展的方向来定义智慧,而不必坚持边界的问题。"

这种智慧发展方向的倾向性观点产生了"智慧倾向于可逆的移动性"的观点(Piaget,1966,p.11)。因为"可逆性正是均衡的标准"(Piaget,1966,p.11),我们发现,"以其所构成的可变结构逐步的可逆性来定义智慧,因此就是以不同的语言重述智慧建构了均衡的状态,这是所有感知运动和认知性质的连续适应的倾向"(Piaget,1966,p.11)。然后,皮亚杰根据(均衡的、可逆的)知识(可变结构)的发展方向来定义智慧。

这个问题的讨论没有对此做区分,实际上它明确地混淆了适应性和适应力(Simpson,1967)。适应性是与一组特定的环境条件的关系,一个特定的生态位,而适应力是与条件潜在变化的关系。适应性涉及物种在特定固定条件下存活和繁殖的能力,而适应力涉及物种在新颖的变化条件下存活和繁殖的能力。通常,某一物种越适应于某些特定条件,例如厌氧环境,对那些条件的变化的适应力就越小。也就是说,适应性和适应力倾向于彼此负相关(虽然不一定如此,例如:Bickhard,1973)。

对于个体,这种区别对应于在特定条件下,成功运作的能力与为新条件发展新能力的元能力之间的区别。皮亚杰的讨论试图捕捉发展的元能力,但他是在适应性方面的尝试,而不是适应力,是在智能倾向的均衡结构方面,而不是表现出发展趋势的元过程。定义是根据方向倾向作为下界问题的解决方案给出的,下界问题的出现正是因为皮亚杰认为适应力不能用单独的元过程来定义,而是必须以适应过程的条件来定义——这立即产生了多少适应性会是足够的问题。

在狂热的行为主义的背景下,这并不奇怪:基本问题是认知结构和过程的任何本体论领域的必然性。目标导向的系统组织所表现的互动式灵活性与由改变系统组织的元能力所引入的灵活性之间的区别是次要的问题。然而,我想提醒:皮亚杰这种区分的含蓄的混淆埋下了后期错误和困惑的隐患。

特别是,在这些早期作品中表达的观点:(1)设置一个试验和错误的稻草人形式,或者是变化和选择的形式,借此排除任何本体论领域,其中可以发生问题定义、变化的启发法指导、启发法的发展和递归的建构性变化——变化和选择模型被推定换作浅认知

本体，并因此具有纯粹的随机性，非导引的随机性，且与背景无关的变化，以及是简单过滤性环境的选择；(2)根据它们趋向于均衡的系统来定义，建立了一种智慧、发展和进化的观点，进而，根据那些系统早期形式内部的问题与不均衡而引发和引导。也就是说，发展和进化是从发展和进化所推定要建构的结构来引导的：这里，我们发现了在皮亚杰后来的著作中变得明确的目的性的雏形形式。

从这个早期的立场将继续发展的最重要的问题是，适应性和适应力驻留在同一个结构中，并且只有一种结构可供其驻留。结构既是适应的，也是在努力适应中。因此，在参与和环境互动的系统的本体层次和可以改变这些第一系统的元系统层次之间没有区别，并且没有引入本体层次的这种区别的既成可能性，因为只有一种本体——结构——在整个模型中可用。进一步的结果是，不可能探索这两个系统层次的发展和进化之间的差异，也不可能探讨这两个层次中本体的和发展的差异。

设计的参数

在《生物学与知识》(Piaget，1971b)的时代，进化和发展的内源的、主动的引导已经成为一个成熟和广泛争论的立场。一般性讨论是根据构成生物的自我调节的各种形式和水平。在进化领域，皮亚杰认为，盲目的机会变化和选择根本不足以解释进化的事实——突变主义和新达尔文主义传统……过高估计……偶然解释事物的可能性并满足于通过排序过程得到一个简单化的选择模型(Piaget，1971b，p.305)。"从形成新的组合的角度看，(这个新达尔文主义者)的解决方案意味着概率性的辩解，这对于微小的变化将是很容易的，但对于诸如眼睛等器官是相当不可接受的"(Piaget，1971b，p.292)。

相反，皮亚杰提出，通过从表现型到基因组的反向调节，遗传系统获得关于其活性结果的信息(Piaget，1971b，p.305)。也就是说，遗传系统可以从其成功和失败中学习，可以积累信息，就像皮亚杰以前为智慧的辩解一样。实际上，他所主张的本体论是指在进化以及认知中存在自动调节的启发法和递归性结构。

皮亚杰认为，这个立场不构成拉马克主义(Lamarckianism)，因为论及环境只是将其刻印在基因组上的时候，他没有提出任何意见。应该说，表现型被看作是对生物体环境压力的有效反应，该反应的结果被同化在基因组水平(Piaget，1971b，p.289)。皮亚杰正在寻找一种方法，以求跳出一个两难困境，即：他所认为的，"一方面的纯粹的内源变化(从预制到随机突变)和事件之后的选择，以及另一方面的环境影响和自动遗传性的固定，这两者之间的困境"(Piaget，1971b，p.120)。这种困境的选择性一直是皮亚杰著作的主要焦点之一。

重要的是要注意皮亚杰论证的形式：他的第一个主张是"随机变化理论……在数学和生物学上都不足以考虑进化过程"(Piaget，1971b，p.175)。他的第二个主张是从表现

型到遗传系统的逆调节是可能的，并且可以解释随机变化不能解释的事实。皮亚杰关于这第二个主张的论据——对表型经验的这种遗传同化的可能性——部分是在可以发生的提示性模型方面，部分是在一些最好的确实会出现的提示性实证证据方面(Piaget，1971b)。然而，皮亚杰最为深刻的论点是他的第一个主张，一个原则上声称随机变化和过滤性选择在本质上——在数学上——不足以解释进化，特别是对于像眼睛这样的适应。这种对于随机性不足的论证是来自设计(design)的论证：像眼睛这样的现象，是因为它们的功能太复杂、设计太完美，只以随机性不足以解释它们。

因为这种来自设计的论证在说服大多数进化生物学家方面没有什么效果，所以有人会问：为什么皮亚杰会对此会这样固执(由设计论证了上帝的存在，事实上是达尔文的主要动机，进化论由达尔文提出，自那时以来，进化生物学家已经采用了进化论，指出从设计的角度来看所有的论证都是无效的)(Bowler，1984；Gruber，1981；Mayr，1982)。我想建议，一个根本原因是皮亚杰考虑到了一个特殊和强有力的来自设计的案例，它似乎抵挡了新达尔文主义者所有可能的反驳。这个案例事实上是皮亚杰在其职业生涯中的遗传认识论的核心激励问题，该问题能够解释逻辑数学知识中的认识论的出现，特别是这种知识的逻辑必然性。为了解决这个问题，我必须首先从皮亚杰讨论的生物领域转向认知领域。

逻辑数学知识

生物学和知识的中心主题是生物过程和组织与认知过程和组织之间的关系。皮亚杰认为，从生物学中出现的认知是一种更高级的自我调节形式，逻辑和数学是这种调节中最具可变性和可逆性，也最具均衡性的形式。然而，逻辑和数学，不仅是认知和表征更高的形式，组织的逻辑和数学形式也是所有认知的核心。“表征……需要……一个逻辑数学框架，在其之外，在任何可观察的水平上都不能有表征”(Piaget，1971b，p.334)，在表征层面，存在一个“逻辑数学框架的必然性”(Piaget，1971b，p.335)。此外，“逻辑数学结构在表征水平上充当与初始学习阶段的遗传框架相同的作用”(Piaget，1971b，p.335)。也就是说，这种组织的基本形式对所有其他表征领域而言具有基础性和创造性。

在这方面，逻辑数学组织与世界之间关系的问题与基因组与世界之间的关系的问题高度平行，因此，皮亚杰认为，逻辑数学框架产生了对世界的认识并以相同的方式同化的知识——这是一种认知版本的拟表型(phenocopy)——于其中，他认为基因组从拟表型中产生和收取信息。这种并行性在更高层次上被概括，包括数学物理学和理论物理学的形式主义之间的关系。

数学的一致性：预期和必然性

来自设计的观点声称，诸如眼睛的结构太复杂，它们在世界中的功能，完全适合于仅仅通过机会来解释。数学和现实世界之间的一致性是完美设计的特殊情况，这似乎最终说服了皮亚杰。

他所谓的一致性有两个部分：一个是数学一遍又一遍地预测了世界上的组织，另一个是数学的逻辑必然性的意义。皮亚杰对数学预期的关注在这样的说法中得到证实："更引人注目和更常见的是纯粹抽象的数学结构的构成、其后作为物理现象的不可或缺的框架，而不是这样被事先计划"（Piaget，1971b，p.341）。来自设计的论点是明确的，严格来说（虽然我自己不相信它）"随机突变和达尔文选择应该解释如何形成蹄和鳍是可以想象的；但是在这个模型的基础上解释为什么Riemann关于抽象的工作应该在物理学中获得了一个意义，这是由于爱因斯坦——以一个非凡的智慧赐予机会，并将选择转变成一个有目的的选择，能够以一种惊人的方式影响仍在幕后的部分"（Piaget，1971b，p.342）。在皮亚杰看来，机会不能产生这样完美的预期。

我们发现：关于数学的逻辑必然性，（逻辑数学）结构不能仅仅由遗传传输引起，因为如果（它们是），它们将不是必然的，也不是普遍的（Piaget，1971b，p.322）；"如果（遗传主义）是正确的，数学就失去了它的所有'必然性'，因为遗传的特性不再是它是的样子"（Piaget，1971b，p.325）；非常明确，"不可想象的是，人类大脑构建逻辑-数学结构的能力如此令人钦佩地适应物理现实，它应该只能通过选择来解释，如突变论者一样。因为效用和生存的因素将只对应于一种粗略近似的智慧工具，对于物种及其个体成员的生命来说是足够宽松的，并且从来不具有这种精确性，最重要的是，较之在随机变异中其后的选择，不具有这种需要一个关于适应的更加透彻的解释的内在必然性"（Piaget，1971b，p.274）。在皮亚杰看来，机会不能产生必然性。

两个困惑

皮亚杰以《生物学与知识》中的大量篇幅来说明基因组能够积累知识的情况，然后将他对于认知的讨论，特别是数学，作为基于这个生物基础的衍生。然而，在这个论证中至少有两个困惑点。第一，无论基因组拟表型案例有怎样的优点，在认知层面这种知识积累的可能性在很长时间一直没有被关注，所以为什么皮亚杰如此关心呢？也就是说，皮亚杰对进化的拟表型的关注是一个与个体认识论平行的关注，或者两者之间是否存在更深的逻辑连接？

第二个困惑是,从先前的成功和失败的"记忆"中获得的知识积累不论有多少,可能会有外围、边缘、"先锋"或变化的前沿,环境选择的发展和进化可能仍然被认为基本上是随机的:无论有机体向环境提出的问题如何复杂,无论对问题解决方案的试验的启发法是多么复杂,以及无论进一步构建的基础如何精细,如果提出的问题解决方案和构建基础本身最终是随机变化和选择的产物,那么皮亚杰对随机性不足的关注并不能从他的论证中得到帮助。也就是说,无论是在生物或认知层面,如果用于知识积累的本体论领域本身最终是由于随机变化和选择,那么这只是一种复杂的随机性的演示,而不是如皮亚杰所希望的那种随机性的替代。

不合逻辑的推论

在进一步的知识建构中存在的启发法知识积累的领域是皮亚杰所持论点的焦点,但他的总结不止于此。这样的领域在生物学水平上至多是有争议的,但在认知层面被认为是理所当然的(同时代来看)。皮亚杰的问题是,即使给予这样一个领域,也不能解决他所关注的最深层的问题。特别是,无论这样知识的内部积极的积累能做出怎样宏伟的设计,就像眼睛看起来似乎更真实,在这样一个领域前沿最大的随机性让皮亚杰关于数学的一致性的原则性问题——预期和逻辑必然性——未被触及过。随机性,无论如何由过去的随机成功和失败的启发法积累来做调解,似乎仍然无法解释数学预期和逻辑必然性——必须有这种一致性的一些其他来源。

皮亚杰意识到了这个问题,虽然不完全,但他的回答部分是直接的,包含在一些隐含的假设里。他回答中的直接部分指出,通过自动调节的均衡本身就是一致性之源——既有预期,又有必然性。然后,"逻辑-数学结构的必然特性并没有证明它们是遗传的,而是通过它们的自动调节达到逐步均衡"(Piaget,1971b,p.317)。皮亚杰并没有明确提出对于数学和世界之间预期的一致性问题的解决方案,而是建议在"人类心智所能达到的环境和物体知识中,只有通过扩展该组织的结构作为一个整体进入宇宙……物理知识是将现实世界同化为逻辑数学结构,(因为)属于某个主体或任何生物的组织是一种与环境交换的条件"(Piaget,1971b,p.338)。此外,"在任何层次上都没有组织功能不与环境相协调;数学和经验之间的一致性只是这样的一个例子"(Piaget,1971b,p.345)。换句话说,逻辑数学结构是所有知识的必然框架,因为它们"只是"这种知识的抽象形式:"关于客体的任何一种知识总是对格式的同化,并且这些格式包含一个组织,不管多么基本,它都可能是逻辑的或数学的。"(Piaget,1971b,p.335)并且,不那么含糊地说,"没有一定的结构和逻辑数学框架就不可能建立物理和实验知识"(Piaget,1971b,p.342)。因此,当这些数学结构本身被视为研究和发展的领域时,独立的数学发展可能预测它们作为框架被应用于世界是完全合理的。

逻辑必然性

尽管皮亚杰对数学与世界之间预期的一致性问题的回答不如他对逻辑必然性问题的回答那么明确，但它仍然是一个更令人满意的答案。皮亚杰通过论证数学结构是理解世界的必然框架来解决预期问题。一个新的数学发展构成了一个新的潜在的框架，所以如果这样一个潜在的框架被实际使用，应该不足为奇。然而，他对逻辑必然性问题的明确回答是，均衡本身就是必然性的来源。了解皮亚杰打算如何利用这一说法，需要更深入地分析皮亚杰关于知识本质和必然性的概念。

第一，皮亚杰认为，知识有两个基本的方面：状态的知识——属比喻方面，和转换的知识——属运算方面（Piaget，1970，p.14；1977，p.18），比喻和运算方面都涉及潜在知识：潜在状态或这些状态的潜在转换。这种向潜在性的改变作为知识的基本焦点——而不仅仅是世界现实（例如，事物或事实）的知识，这种潜力是皮亚杰的主要见解之一，大部分其余的心理学（如认知科学）尚未可及。

第二，潜在性的知识是在与那些潜在性相对应的系统中构成的，这些系统与它们是同构的。"了解现实意味着构建与现实或多或少相适应的转化体系，它们或多或少同构于现实的转变"（Piaget，1970，p.15）。这一点在皮亚杰的结构主义中是本质性的，早期和晚期结构与他们"知道的"或表达的结构是一致的、同构的。皮亚杰著述中的许多地方都明确指出了这一点，但这通常是以预先设定的而非陈述或演说的方式提出的，并且没有详细阐述或论证。甚至在皮亚杰后来的作品中，这样一个假设的一个明显例子是关于在一个结构中拆除和重新插入单一作业的讨论（Inhelder and Piaget，1980，p.22）；另一个例子是在可能性和必然性的发展过程中，他们获得的"可能性"的类似个体化（Piaget，1987）。这种结构主义的形态对应特征的假设通常是隐含的而不是解决的，因为它不符合任何皮亚杰的主要关注点——他不明白它是有问题的，因此既没有为它辩护，也没有为它制订任何替代方案。他的主要争议在别处。然而，这个假设将成为我分析和批评皮亚杰明确表述的一些立场的核心。

第三，这些作为知识焦点的状态之间的潜在转化的领域产生了第二个这样的领域——这些潜在转化之间潜在协调的领域，这是一个元潜力的领域。协调这些元潜力的认识最初是零碎的，一次一个或几个，但逐渐变得更加有组织，并与发展相结合，"……所有的知识都与行动联系在一起……而行动的进化以协调为前提"（Piaget，1971b，p.28）。"首先，公开行动的各个部分之间有一个协调的开始……最后，他们采取移动和可逆的操作性结构的形式"（Inhelder and Piaget，1964，p.291）。

第四，已知但尚未纳入可逆结构的协调称为规则，而整合到此类结构中的协调称为操作（Inhelder and Piaget，1958，p.246）。因此，操作就是嵌入在集成结构中的协调。

第五,将操作性结构与调节性知识区分开来的关键特征是:操作性知识是“可逆的”,即能够逆向转化,而调节性知识却不是。“可逆性被定义为返回到有问题的操作起点的永久可能性”(Inhelder and Piaget, 1958, p.272)。“这两种机制(调节和操作)之间的区别在于,可逆性在第一种情况下仍然不完全,但是在第二种情况下可以实现”(Inhelder and Piaget, 1958, p.246)。“智慧的特征不是为了体现,而是为了‘转化’,其机制本质上是操作性的。操作包括团组结构中的内化和协调的行动,如:可逆性”(Piaget, 1971a, p.67)。

第六,可逆性是一个如此重要的特征,其原因是:只有在协调的可逆整合的情况下,系统才能够完全补偿变化——可变回原点,扭转变化——从而保持自己的稳定性……“稳定性是补偿力的结果(这反过来又表达了……操作的可逆性)……稳定性是补偿性操作的一个功能,而可逆性仅仅表达了它们的补偿性质”(Inhelder and Piaget, 1964, p.292)。

第七,因此,这种可逆性以及充分的补偿和稳定性是关于整个潜在协调空间的操作结构的封闭属性——不存在潜在的转化,在系统中的这种转化没有协调的逆转、补偿和潜在的转化。结构中的所有潜在转化都必须与结构的可逆协调区域保持一致——结构必须以它转化和协调的综合潜力形成封闭。否则,会出现一些潜在的转化,一些潜在的变化,对此没有任何补偿可用。“……与环境交换的系统……在任何情况下都不排除封闭,在循环而不是在(交换的)线性秩序的意义上说”(Piaget, 1971b, p.155)。……结构变得完整和封闭;也就是说,它内部的关系是相互依存的,可以在彼此之间组成,而不用求助于系统以外的任何东西(Piaget, 1971b, p.316)。

第八,这种操作的封闭式结构协调有某种的一般形式。“操作是行动的延续;他们表达了对所有行动都是普遍适用的某种形式的协调;不管协调是否完成,操作和预操作的协调会进入行动的多种多样的类型”(Inhelder and Piaget, 1964, p.291)。这些一般的形式将是分组、网格、组等的逻辑-数学结构。

第九,正是这样的结构性封闭产生了逻辑必然性(Piaget, 1971b, p.316f)。……主体……在操作性结构封闭的层面上符合逻辑必然性(Piaget, 1971b, p.322)。 ……“推论必然性是一个操作者结构封闭的指标”(Piaget, 1985, p.99),并且将几个观点联系在一起,“在他们最后的操作形式中,(逻辑数学)结构获得完全补偿”(Piaget, 1985, p.133)。

第十,这些封闭、可逆和补偿的特征构成了均衡的性质:完全均衡恰恰是完全补偿的能力,这需要完全可逆性,要求操作性的封闭——反过来又产生了逻辑必然性。“……当一个改变系统状态的扰动对应于补偿它的自发行动之时,这个系统就处于均衡状态”,(Inhelder and Piaget, 1958, p.243)“行动中的均衡定义为主体为对付外部扰动而设置的主动补偿,无论是有经验的还是预期的”(Piaget, 1971b, p.12)。“操作均衡……本质上具有可逆性……或者更具体地说,是一种补偿系统的稳定形式”(Piaget, 1971b, p.25)。请注意,均衡是有机体与其环境之间,结构与环境之间的关系,环境根据转化潜

力和协调元潜力来概念化。均衡不仅仅是面对实际环境干扰和选择压力而维持的生物体内的一种属性——这是从知识（作为潜力和元潜力，而不仅作为现实）基本上是"环境的"观点来看，控制"均衡"是准备对潜在干扰进行协调补偿，而完美的均衡，即结构或逻辑数学均衡，是准备就某一互动领域内的所有可能的干扰进行的协调补偿。逻辑数学结构已然封闭；他们通过包含该领域的所有潜在的协调来彻底地探讨一些协调性元潜力的领域，因此每条可能的路径都有反馈。

第十一，也是最后一点，均衡恰恰是在面对补偿协调构建的干扰（实际或预期的）时重新均衡的过程，也是随之而来的越来越均衡的协调组织的逐步建立，也是越来越高的均衡形式。均衡"相当于……对外部扰动进行主动补偿……那么显然，所达到的均衡与均衡过程本身之间存在着连续性"（Piaget，1971b，p.25）。此外，"思想的运作，特别是……逻辑数学思想的运作……（作为）它们的主要原因……是一个逐渐均衡的因素"（Piaget，1971b，p.11f），而且"逻辑数学结构……尽管有经常更新的结构表征它们自己的进化，但却达到了永久的均衡"（Piaget，1971b，p.356）。

我们现在可以回到为什么皮亚杰声称均衡本身产生必然性的问题。在刚刚概述的理论构成中，答案变得明显：均衡是建立逐步封闭的协调组织的过程，并且在达到封闭的时候——在这些组织成为操作结构的地方——必然性出现了。当结构完全地捕捉到协调的（相关）元潜力——包含它们的全部并因此对它们是封闭的时候——结构达到逻辑数学的必然性。

不幸的是，这只能解决问题的一部分。在皮亚杰看来，它解释了均衡应该如何通过实现封闭而在功能上产生必然性，但在皮亚杰自己的分析中，如果均衡过程——或产生均衡的过程——仅仅是随机变化和选择的一种，如果结构是通过单纯的随机变化和选择形成的，那么结构可以预期为最多只有"粗略近似"的组织结构，它足以支持实用和生存，但不具有我们实际发现的精确性和必然性：

实际上，生物选择与生存有关，而一个观念优于另一个观念取决于最终的分析中关于其中所包含的真值的价值。……人类大脑具有构建非常适合物理现实的逻辑-数学结构的能力，而这仅仅通过单纯的选择来解释，实在是绝不可能的。正如突变论者所做的那样，对于效用和存活因素而言，只能产生一种粗略近似的智慧工具，对于物种及其个体成员的生命来说足够充分，但从来没有达到或超过某种精确，并且最重要的是，这种内在的必然性需要一个更为深入的解释，而不是随机变化中后验的选择适应。因此，我们可以不接受突变解决方案。（Piaget 1971b，p.274f）

我们再次看到皮亚杰的观点，即均衡——或者它的某些属性——本身就是这种精确性和必然性的来源，超越单纯随机性的来源。但是，它是如何以及为什么应该（必然）如此？关于这一点的一个观点包含于：

整个问题是要知道这种影响（从世界到理解世界的数学框架——在这个直接的讨论中，从实验物理到数学物理）是心理的，也就是说，与问题选择和通过这些选择决定利

益有关,或者它是否是认识论的——也就是说,包括真值的转换……

任何阅读这一分析概要的生物学家都必然会想到表型变异先于似乎是模仿它的基因型(有时被称为拟表型)的出现,目的是表明一种积极和内源的模仿已经发生。(Piaget,1971b,p.344)

皮亚杰很想表达的观点是:

在(数学结构和物理数据之间)对应成功的情况下,数学家(仅仅)通过其抽象结构"模仿"物理数据,依然难有建树,只有通过内部和内源的重组手段,他才能够获得这些数据,从外部的"表征"中未曾借鉴任何东西,而这些外在的"表征"是他完全自主地整合和重构的。(Piaget,1971b,p.344)

这里,他的关注点在于强调数学物理学家所进行的必要的积极重组,而不是对数据进行一些相对被动的模仿。这也是为什么他将拟表型描述为"主动和内源模仿",而不仅仅是模仿。这里的关注正是他早期论证的认知版本,他的立场并不构成生物进化层面的拉马克主义,因为有机体,以及基因型,是一种积极的构建者,而不是被动地接受影响。

尽管如此,关于这一讨论我想强调的是,无论是生物性,还是认知的多样性——即认识论的影响——"拟表型"都涉及"转换真值"到系统中,它涉及模仿的关系,然而是积极地实现。皮亚杰的讨论表明,这是数学具有逻辑必然性的根本原因:数学结构转换真值,从世界引入真值(从与世界转换协调的元潜力中引入),它们不仅仅具有近似效用去拟合来自世界的随机选择压力。这种对真值输入的假设,通过内源自动调节均衡过程的积极模仿——一种认知"拟表型模型"——对于皮亚杰对数学逻辑必然性问题的回答至关重要。

真值是如何导入的?

问题在于,这种内源活性基因组或认知因子"输入真值"的特性与皮亚杰之前的观点无关。这一本体论的领域,无论是生物学的还是认识论的,都在积极地提出问题,以启发法提出解决方案,并积累过去成功和失败的信息——"显而易见,所有通过反复试验(或探索)学习的预测都假设了这样的反馈结构,每个试验所吸取的教训对那些后来者"会有连锁反应(Piaget,1971b,p.11)——并没有自动完成任何像从(现实或潜在的)世界中"转换真值"到系统中的事情。皮亚杰并没有提到这样的过程如何完成这样的输入,也没有提及这样的输入到底是否可能,甚至也没有提及"真值输入"意味着什么。这是欠缺分析的假设,又没有遵循任何先前的论点。皮亚杰的思想中为什么会有这么不合逻辑的推论?

结构主义和建构主义——集中未了解的问题

这里，就有可能将这个讨论中发展起来的几个未了解的部分放在一起：为什么把真值输入的不合逻辑作为主动均衡的属性；为什么当这些属性已经被认可用于认知时，对基因组积极同化会有令人困惑的关注；为什么适应性与适应力之间会有混淆？这又会产生什么后果？我打算在这些问题中提及一些关系。

皮亚杰在整个职业生涯中都非常关注知识应有的积极性和建构性特征，致力于对被动知识获取模式的持续批评，无论是在认知版的复制理论（Piaget，1971b，p.361），还是在生物版的拉马克主义上（Piaget，1971b，p.289），皮亚杰认为这与经验主义等同。然而，与这种对知识获取的基本建构主义观念一起，皮亚杰坚持对知识本质的深刻结构主义概念。也就是说，知识只能通过积极的建构来获得，并且不可能通过被动复制来实现，但所获得的本质是“模仿”环境或与环境“相对应”的结构。换句话说，我认为皮亚杰的论点致力于建立知识获取应有的积极建构主义特征，并且所提出的“输入真值”或“对应关系”的前提假设是这一过程的一个方面，该过程源自有关知识的结构本质的假设。

皮亚杰关于知识获取的假设与关于知识本质的假设之间的这种区分开始有助于了解以前未了解的问题。只要知识的获取必须是积极的和建构性的，并且只要基因组被认为是认识论的核心（Cellerier，1984，认为如果皮亚杰将基因库作为相关的核心，则会有更强的理由），那么基因组必须具有认识论上的积极性和建构性，类似于拟表型的说法必须是真实的。相反，如果进化的认识过程“仅仅”是一个随机变化和选择，而没有积极探索建构的问题，那么设定人类认知积极建构的逻辑必然性是什么？如果随机变化和选择在进化的认知水平上是足够的，为什么不也将之应用于人类呢？当考虑到逻辑数学结构及其预期性和逻辑必然性的一致性时，这些观点会产生特殊的效果：这样的结构既是个体的，也是生物的认知成就，而且，它们的起源问题以及它们出现的可能性必须在两个层次上解决。那么我的建议是，皮亚杰对积极的建构主义基因组的生物学问题的关注源于他对知识起源——发展和进化的起源——的一般建构主义观点的关注。

但是，这一点必须扩展。如果建构本身作为潜在的新知识的来源是唯一的问题，那么随机的建构性变化和环境过滤选择似乎就足够了，至少在原则上是这样，至少新达尔文主义的说法将因此足够，但显然皮亚杰会对此非常不满。这样的模型将涉及生物学和个人层面的必要构建，但是指导性、目的性和建构性的启发法在生物学水平上将会丢失。并且在皮亚杰看来，仅用于随机构造的过滤性选择最多可产生近似功利主义的解决方案，而不是数学结构。皮亚杰需要两个层次的结构主义的对应关系，因为这是两个层面的知识本质，数学知识尤其如此，他似乎认为这只能通过一个真正积极主动的建构性认识主体才能获得：直觉虽然没有发展起来，但似乎只有通过内源积极的探索才能将

潜在转化或协调的结构“完全填充”,完全模仿,通过系统变化——从内部“填充”出来,可以这么说。同时,在只是随机变化的情况下,潜在转化的结构最多会被充满,而这种结构几乎可以捕捉到潜在的结构,但不会真正地“模仿”或“转换”该结构进入系统。在这种协调元潜力的情况下,意味着不会发生彻底的封闭,因此必然性永远不会出现。通过无制导的随机变化来“粗略近似”地实现一些或许多协调可能对于一些或许多实际目的是足够的,但只有在元潜力协调的整个领域无一例外地在结构上被获得,逻辑必然性才能实现,并由此实现封闭。因此,他必须在个人和生物层面都有这样一个积极的指导性、建构性和同化性的“主体”或系统,因此我们在生物学层面找到了拟表型的假设和广泛的论证。

概括地说,结构主义产生了一个完美均衡的逻辑数学知识的模型,“真值导入”结构——与环境相关的协调性元潜力完美对应的结构。这种完美的结构不能被认为是由单纯的随机变化和过滤选择产生的,因为它们至多会产生粗略和简陋的近似结构,而不是逻辑数学知识的完美预期和逻辑必然性的一致性。因此,内源主动的启发法构建是必要的。

然而,如果这种内源主动的启发法法则本身就是随机性的产物,皮亚杰原则上的论证就会失败。皮亚杰并不这么认为(Piattelli-Palmarini, 1980, p.281),但更根本的是,不可能模拟甚至也不能认真考虑,在皮亚杰的框架内它会如何(或像这样):如此做,将需要(1)随机变化和选择过程的模型;(2)由这些变体发展性构建的内源建构性启发法模型;(3)用这些启发法构建世界相互作用的系统模型——并且皮亚杰不能在其单一的心理本体论层面上开始做出这样的区分。

换句话说,在这一点上,再次呈现了皮亚杰将适应性和适应力结合在一起的做法,且这种结合有两个部分。首先,皮亚杰认为,无论是个人还是基因组,智慧发展和进化的驱动和指导源于系统内部,而不源于被动的印象经验主义复制或随机过滤选择这些外部形式。为了在生物体与环境之间建立一个互动的过程,以及通过随机变化和选择改变和构建较低层次过程的逻辑上可分离的元过程,似乎消除了这种内部召唤和指导系统发展的任何可能性:系统开发似乎完全掌握在(随机的)元过程中,那么指导从何而来?(稍后我会论证这个现象是错误的。)

此外——对于第二部分的结合,在皮亚杰的看来,只有有了这样内部的唤起和指导,任何不仅仅是简单的近似功利主义程序的,以及任何类似于逻辑数学结构的都可能发展;只有通过这种主动引导的结构,(完美设计的)结构主义的对应或同构才会发生。因此,从皮亚杰结构主义的角度来看,真值输入是必要的,以解释任何类似数学的内容,而且没有一个积极的指导性认识系统,输入真值是不可能的,因此,适应性的建构和发展必须在内部(部分的)适应性系统中唤起和引导。所以,只有一个系统的级别,适应力是适应性系统的结果,适应力和适应性之间的显著区别是正如被误导和具误导性之间的区别。

当然,从历史的角度来看,这可能是相反的。皮亚杰对认知主体内源建构性活动的

必然性有着深刻的理解，这本身可能要求他面对那些可能有异议的行为主义者时会为这种活动做适当的本体论领域的辩护；产生了对系统本身的内部指导的系统的试验和误差变化的从属性——从适应力到适应性；并在认知基因组以及人的水平上产生了这种活动的模型。皮亚杰的这种激励性组织的结论与前面讨论中所阐明的逻辑联系分不开，并且可以解释为什么这些逻辑联系往往在皮亚杰的作品中相对欠充分，它也相应地模糊了结构主义作为这些逻辑联系共同前提的作用。

结合的观点来源于这样一种认识：皮亚杰在这些讨论中关注的中心与我一直关注的结构主义相应假设完全不同。就必然性而言，最常见的情况是，通过从系统与环境之间内在关系——而不是囿于其一的（元潜力）领域或通过协调封闭性的固有内在属性来解释必然性的出现——皮亚杰已经阐明了一个知识的来源（必然性），既不如环境经验主义者或拉马克主义者所言，也没有先成说的先天性。必然性——封闭性——本质上出现在操作均衡和均衡的性质上。同样，结构主义的对应预设几乎不受关注，并且相应地被预先假定（例如，在获得个体化协调直到达成封闭性为止的概念中）而不是处理。

这里所涉及的皮亚杰著作中的另一个重要主题，也是结构主义所对应假设中隐含的，是他对模式在知识和发展中的根本性和基本性的参与——这种深刻的洞察力如此不同，并且比任何版本的经验主义都更具有洞察力。“转换”的“真值”是行动、转变和协调的可能性（潜力的和无潜力的），以及其结构。每个新的转换或协调的均衡建构是系统向一个新的可能性（注意个性化）的开放，而在这种可能性的“封闭”中，必然性出现了，而发展——均衡——从根本上看，可能可视为它们之间的一种辩证法（参见，例如，Piaget，1969，p.250；Inhelder 和 Piaget，1958，p.255-266；Piaget，1977/1986；Piaget，1981/1987）。

然而，皮亚杰动机另一个也关涉融合的方面强调了结构主义的作用，并为皮亚杰将自己局限于系统过程的本体论层面提供了更深刻的积极动机，尽管它仍然使逻辑连接和后果变得模糊，这种动机是皮亚杰在他的认识论和生物学观点之间所作的普遍类比，特别是类比于结构与功能之间的生物学区别——相应的研究领域分别是解剖学和生理学——皮亚杰假设认知结构的功能是均衡的（Kitchener，1985，p.150），同样，我们也认为只有一个系统和过程的级别。

然而，不幸的是，这一系列结论使得皮亚杰至少有两个站不住脚的立场。第一个是经验问题，即进化似乎并不像皮亚杰需要的那样：任何类似于拟表型的证据都是最少的，并受到其他解释的影响（Simpson，1967；Piattelli-Palmarini，1980）。

起源的无限回归

第二个是更深层次的逻辑问题，通过强调积极建构主义主体的原则必然性，以求认

识的发展,皮亚杰似乎已经把自己置于一个立场中,为解释认知主体的存在,他需要假设认知主体的存在。也就是说,皮亚杰的认知发展模式似乎排除了认知主体出现的可能性——在此类系统之前,没有像皮亚杰认为的那样以建构性指导来开发这样的系统。

皮亚杰可能会反驳说,这种体系的出现与它们一旦出现的发展是不同的问题,只有后者需要积极的内源结构。然而,如果它们的出现在单纯的随机变化和过滤选择方面又是可以解释的话,那么皮亚杰论证的大多数逻辑基础就会沦陷:如果认知指导和目的性本身可以通过随机变化和选择产生,那么我们也只是有一个模型证明这种随机性的力量,积极的指导不再是认识上必要的。然而,皮亚杰认为生命本质上是认识论的:生命是某种形式的自我维持的自动调节("生活本质上是自动调节",Piaget,1971b,p.261),自动调节本质上是认识论的("知识是……反映生命自动调节组织的真实互动系统",Piaget,1971b,p.27)。这里的基本点是,自动调节要求对环境的变化进行补偿和预测,并且这种补偿和预测能力构成了知识。但是,如果生命系统的存在本质上是认识论的话,那么关于认识系统起源的限制就完整了:认知发展需要认知指导和建构,但即使是最基本的认识论(生活)系统也必然包含认识内容,如果没有一个认识系统的指导,它就不可能发展起来,因此,每一个认识系统都需要一个先验认识系统来解释它的产生。

对此,有人可能会反驳说,皮亚杰并没有尝试,也不需要尝试一种认知系统最终起源的模型,因此,该批评忽视了它的标志,但皮亚杰不需要为了批评而进行这样的尝试。原则上的批评是:在皮亚杰的系统中,任何关于起源的说法在逻辑上都是不可能的,因此,这种认识系统的存在是皮亚杰的一个反例,因为通过上述必然的无限回归,那种存在是不可能的。在总的形式上,这个论点同于皮亚杰在原则上反驳的乔姆斯基和福多的天赋论(Piattelli-Palmarini,1980)——他们指出我们已经有了表述,故此应进入他们自己的无限回归——并且后来会提出,构成两个回归基础上的两个立场之间存在一个共同的错误假设。

上述的第一个困惑——为什么皮亚杰在生理学水平如此强烈地集中于拟表型,当其对等物在心理层面上被承认——的答案就在于:皮亚杰认为从经验中积极同化在认识论上是本质性的,因此,在生物学层面也至关重要,就像在心理学层面一样。那么,皮亚杰关于认识论的一般立场要求他在进化论方面支持类似于拟表型的观点。

对于上述第二个困惑的回答——如果皮亚杰的启发法和积极建构的本体论领域本身就是随机变化和选择的结果,他如何避免纯粹的随机变化和选择的力量——则有所不同。简而言之,皮亚杰并没有回避它,或者更谨慎地说,他只是通过为认知内容的构建提出积极的认知指导的逻辑必然性来避免它——因为这种内源指导是必要的,仅仅随机变化是不够的;不幸的是,他因此坚持不可能出现任何认知系统,因为这种认知指导的起源存在有缺陷的无限回归。

后期的发展

这里的主张是,皮亚杰陷入了一个概念性困境,并不是他认识到的那个困境。事实上,他的思维在上述问题框架内继续发展,并且该框架的后果变得更加明确。1975年,皮亚杰和乔姆斯基之间的辩论中,逻辑必然性问题的中心地位仍然非常明确——"那么,中心问题是要理解这种(认知)操作是如何产生的,以及为什么,即使它们是来自非预定的结构,它们最终变得在逻辑上是必然的"(Piattelli-Palmarini,1980,p.23)。同样显而易见的是,这样的必然性需要一种目的性——"于我而言,我绝对否认逻辑-数学结构归因于偶然;它们没有任何偶然的因素。这些结构不能通过生存选择形成,而是通过对现实的精确而细致的适应来形成"(Piattelli-Palmarini,1980,p.59)。接下来是详细阐述:"有两种类型的适应必须加以区分:(1)生存适应,它通过筛选有用的和有害的变化而有利于繁殖速度和物种的保存,这两种情况都是在这次筛选之前发生的并且与其无关;(2)充分适应性,这意味着与环境有关的目的性……现在,正是这种目的性是必须要解释的,因为……它可能不是仅仅由于整理而产生的结果"(Piattelli-Palmarini,1980,p.281)。和以前一样,皮亚杰用拟表型的方式解释了这种目的性(Piattelli-Palmarini,1980,p.59)。

皮亚杰仍然迫切地意识到逻辑必然性问题的重要性,但他仍然把它看作是设计论证的另一个例子——他甚至认为,仅仅是生存的选择不可能解释像燕子精致的巢一样精确的东西!即使在这种情况下,也需要解释目的性是如何产生的(Piattelli-Palmarini,1980,p.281)。对于鸟巢精致复杂性的逻辑必然性的问题上令人难以置信的同化,皮亚杰大大削弱了他的立场。鸟巢和眼睛这样的事物的设计论据取决于一个基本的概率论证,这种复杂和完美精致的设计在随机变化和选择模型的情况下是太不可能。换句话说,该论证不是原则上不可能,而是考虑到所涉及的小概率的不可信。相比之下,设计中对于逻辑必然性的论证的最强说法根本不是概率论,而是关于本体论涌现的原则论证。基本上,皮亚杰的观点并不仅仅是产生数学结构的机会的可能性是微乎其微的,而是随机偶然性本质上不能产生逻辑上的必然性。不仅仅在于这个概率低,而且这种由随机产生的必然性在本体论上是不可能的。皮亚杰提出了这个论点,然后通过将它同化为鸟类的巢穴来降低其意。

关于鸟巢、眼睛的设计以及其他这类进化的产物的论点,不是来自任何特殊的本体论,而是来自它们的复杂性或功能适应性的精致,没有涉及本体论的发生。面对目前关于选择性塑造和渐进演变的知识,被这样的观点说服似乎很古怪,而皮亚杰在与乔姆斯基的争论中所持立场则饱受批评(Piattelli-Palmarini,1980)。

但皮亚杰是完全正确的,逻辑必然性的发生的认识论问题基本上未被皮亚杰本人

以外的生物学家所解决。也许他的动机之一就是，解释逻辑必然性，如果需要目的性，如果需要充分适应性，那么它也适合解释鸟巢及眼睛。但关于必然性的观点的力度恰恰取决于这样一个事实：它不仅仅是复杂性和功能性生命的另一种论证形式，也是关于本体论发生的论证，而皮亚杰将之掩盖了。

另一方面，一个重要的意义在于皮亚杰的理论模糊了必然性的本体论发生与精心设计的复杂性的起源之间的区别，也许皮亚杰自己将本体论发生的问题描述为："只是"一个精致的复杂性的起源问题——减少了一个概率问题的出现——尽管有些段落似乎至少要主张(如果不是这样的话)更深层次的区分。这当然会重新提出一个问题，即为什么皮亚杰只是被一个"单纯"的设计论点说服，而没有明确支持任何发生的论点，尤其是考虑到设计的出现正是其中的一个主要问题，它首先论及了进化论。

皮亚杰的理论将发生与精致相结合的意义在于，皮亚杰将知识的增长解释为构建逐渐与世界上越来越多的潜在转变和操作相对应的结构，并且他认为必然性是"发生的"，当用相应结构填充操作潜力达到局部饱和或封闭的结构，其中所有可能的操作已然获得、导入且可补偿。这种转变或操作性封闭涉及所有可能性中所有方向的潜在转变/操作，因此意味着皮亚杰经常强调的可逆性和完全的机动性，并且进一步构成皮亚杰所热衷的代数转换集合的直接模型(即，这样一个饱和的转换组织，被理解为一组自同构，将倾向于本质上具有结合性、同一性和反转的属性，从而将它们建构为组合下的集合)。在这个观点中，当达到真值饱和输入的条件时，就会出现必然性——这个饱和会产生封闭性、完全的机动性，以及完美的和永久的均衡(进一步的适应被排除，因为可容纳的可能的操作空间已经完全获得，已经饱和)等等。如果任何可能的操作被遗漏，这种饱和性封闭将不会获得：不输入，不被主动模仿。因此，必然性的"发生"将取决于完全获得操作性潜力的这种结构，而不仅仅是由随机构建的生存适应所产生的一些局部或不整齐的子结构，因此，对这些(元)潜力的内源积极探索是需要的。那么，从这个角度来看，必然性的发生被简化为完全捕捉潜在操作空间的精妙与完美，而关于内源目的性活动的必然性的论点被简化为含蓄的主张，即仅仅随机的构建将完全获得这样一个潜在的操作空间的可能性是微乎其微的。在这个意义上，必然性的本体论被简化为完全封闭的结构对应的精妙性，而来自涌现的论点则被归结为一种来自可能性的论点。

在这些问题上皮亚杰的回答从来就不是很清晰的，所以相应地，就不清楚这个推理影响了他多少，但它确实遵循了皮亚杰的立场的其他部分，并且引入了一个强大的，至少具有激励性的一致性，否则，他的立场会是让人费解的。

然而，这里涉及的必然性的解释其实严重不足：封闭性、可逆性等与必然性之间的联系并不明确，并且从来没有得到很好的发展(Campbell and Bickhard，1986)。例如，封闭的数学结构可能具有必然的属性，但并不表明封闭的数学结构与必然性的认识论和知识一定有关。事实上，皮亚杰在他的职业生涯后期开始摆脱这种必然性的纯粹结构

主义解释，但是没有机会探讨这种变化对其他理论的深远影响（Campbell and Bickhard，1986，p.95f）。事实上，他转向内涵逻辑（Apostal，1982；Piaget and Garcia，1987），他的“局部的”必然性的概念（Piaget，1977/1986），以及他对反省抽象的日益强调，除了其他的后续发展之外，都以不同的方式与他的关于必然性的结构主义观点不一致（Campbell and Bickhard，1986）。例如，一种内涵上理解的“局部必然性”并不具有完全均衡的结构必然性的封闭特性，这种理解完全不是一种结构：“在前运算水平上……必然性的小岛已经构成，但它们是局部的，而不是连在一起成为稳定的系统”（Piaget，1977/1986，p.236）。与他的结构主义必然性观念的这种不一致，反过来又与他对结构主义的一般知识本质的观点不一致。

皮亚杰最初和最基本的结构主义的这种后来的分歧可以让人认识到，这种结构主义并不涉及这里所声称的对应的表述。皮亚杰似乎至少有三层这样的“非对应”的解释，我乐意简单地解释一下。首先，除了一些更基本的精神本体论层面的行动的可能性之外，可以说皮亚杰的结构本身并不存在。对此：(1)皮亚杰从来没有这样说过什么，也没有说过这样一个更基本的水平可能是什么；(2)皮亚杰几乎在每一次讨论中都预先假设结构的现实性；(3)皮亚杰在逻辑上承诺它们的存在，因为没有结构，均衡过程就无处安放；(4)均衡的认知结构显然是从生理学功能的解剖结构衍生出来的；(5)我们发现这样的陈述：“如果结构是或者看起来是非时间的系统，可能它们不存在于孩子的头脑中，而仅仅是心理学家所做的解释的产物……这有点像说，即使孩子知道吃和呼吸，他们的胃和肺只存在于生理学家的概念里……孩子认为可能、不可能或必要的事情提供了孩子心智中结构存在的最好证据”（Inhelder and Piaget，1980，p.22f）。这不仅使结构的存在非常明确，而且还表明了皮亚杰著作中的一种倾向，即假定对每一个分化功能都有一个单独的元素或结构（或结构的元素）来服务该功能——基本前提似乎是可分化（生理）功能是由分化（解剖）结构形成的。此外，即使结构本身只是潜在的，通过对应表达的基本点仍然是：如果通过对应表达的元素要在每次需要时被构建（它们只是潜在的），而不是持续存在，不会相应地改变表述的基本逻辑。

其次，可能只是他否认这种结构被认为是通过对应表达的：(1)皮亚杰使用“对应”和“同构”等术语多次提到这些；(2)例如，他假设在转换协调和可能性的个性化或原子化中，或者在从结构中提取和重新插入的操作中，它无处不在；(3)皮亚杰既不以对应去制定对于表征的一般性批判，也没有制订任何替代方案——对于对应，他既有默认，也有声明和预设（另见 Kitchener，1986）。

最后，作为比第二点更强的说法，它可能声称，尽管除去现象之外，所有皮亚杰对结构的需要，也许他所有想要的，并且他肯定需要的，是隐喻意义上功能适合性的“对应”，功能上适合且相当的——正如“胃”之对应于“食物”。这种说法将保持皮亚杰对行动和转变的强调，以及他对潜在性的中心性的一些理解。它也可以适应皮亚杰的建构主义，并且，显然它不会受到基于表征对应模型的反对。但这种解释将使皮亚杰成为一个天

真的实用主义者,没有任何表征的模型。这里的基本问题正是如何在或从功能成功的系统中表征出来的,皮亚杰的这种表征模式是在知识结构与它们所表征的潜力之间的对应关系。如果那些对应关系被重新解释,以便否认或忽略表征的发生并返回到纯粹的功能,那么皮亚杰将被剥夺任何表征的、理解的方面,毕竟——以及客体的、算术的或必然性的模型,这不是一个有效的解释——它失去了皮亚杰所关心的大部分内容。除此之外,它使皮亚杰关于内源性探索的论点完全变得无足轻重和神秘:如果简单的功利性成功是唯一的考虑因素,那么粗略近似的非导向的纯随机变化和过滤选择的功利性成功就足够了。同样,在没有任何替代说法的情况下,皮亚杰不仅通过他说的和预设的去支持对应的说法,而且也会默认之。这些考虑使得皮亚杰后来与这种更加有趣的结构主义相背离,但这些背离并不以对应来替代表征,并且在任何情况下,都不会影响皮亚杰各部分理论发展中原初的结构推理和动机研究,比如说:内源性探索的认知必然性。

无论有怎样的逻辑必然性,无论通过发生抑或精致的复杂性,无论皮亚杰后来如何部分地偏离纯粹结构主义的重要性,在皮亚杰的结构对应观点中,内源的目的性活动的必然性是根本的,因此解释它如何工作也是重要的,或者至少行之有效。此外,这种目的性要求进行综合和相互一致的解释,既在生物进化水平上——对形态复杂性的解释,也在个体层面上——对目的性的均衡的解释。皮亚杰后来的几部作品恰恰论及了这些问题(Piaget,1978,1980,1985)。

筛选性选择

在大多数情况下,这些著述试图填补细节,并回应对早期著作的批评,如《生物学与知识》(Piaget,1971b),就此而言,它们不会影响这里提出的一般分析。然而,有一种发展说,我要谈谈。首先,关于连续性:皮亚杰依然坚定致力于通过生物学中的拟表型,以及通过"认知的拟表型"或者目的性的均衡来解释知识发展,从而将知识从发展中的外源形式转移到内源形式(Piaget,1980,p.80)。他所主要关注的是表明这种进步的发生,以及它们如何发生。尽管逻辑必然性发生的生物学问题有所退步,但皮亚杰关注的逻辑必然性仍然存在(Piaget,1977/1986,1987)。然而,在这个框架内,皮亚杰指出:

我想就(这些关于拟表型的观点)如何与早期研究的《生物学与知识》中提出的观点相关联发表评论。在那本书中阐述的理论似乎对一些同事来说是被拉马克主义所影响的。这种建议可能源于始终坚持的主张:除非所涉及的许多调节力为其提供关于内源发展成败的"反馈"信息,否则,将极为良好组织的和广泛的合成能力归因于基因组本身,存在内在的不可能性。然而,较早的研究缺乏精确性,目前的工作是为了达到之前研究所没有达到的水平。似乎相当明显的是,所提到的信息反馈不需要包含"消息",这

样措辞应该是合适的，反馈只需包含由均衡丧失引起的渐进和追溯性影响（通过选择性阻碍或阻止）。换句话说，假设的消息可能包含一个“非编码”的指示，说明“某事未起作用”。另一方面，当一切正常运作时，就不需要任何这样的指示。（Piaget，1980，p.9f）

这些言论的意义源于这样一个事实，即在《生物学与知识》中，皮亚杰指出，真正积极主动和有指导性的认识系统的必然性的深层原因是，只有通过这种内源的建构性活动才能输入真值，才有内部建构与世界的结构性对应的可能性。特别是，只有采用这种内源活动的系统，我们才能期望获得比单纯的功利主义解决方案更多的东西。然而，上述引文可能意味着皮亚杰已经从这个立场退出。如果所涉及的唯一反馈是“某些事情没有奏效”，除此之外根本没有任何信息，那么就不清楚应该如何输入结构相应的真值。目前尚不清楚这与单纯的“筛选”或“分类”选择有何不同，根据前面的介绍，这不能产生逻辑必然性等等。对于将真值输入作为内源主动认知系统的一个方面，该主张如果被放弃，那么皮亚杰将陷入严重削弱的地位，这涉及从外源形成到内源形成的积极运动，特别是在进化形式的拟表型上，仅仅是因为它比单纯的随机变化和选择更有效。在《生物学与知识》中，皮亚杰指出，这种内源活动对于逻辑必然性的出现是必要的，因为逻辑必然性需要输入真值，建立完整的对应关系，并且需要内源的建构性活动。如果放弃真值的输入，那么皮亚杰的必然性论证也就放弃了，而且他只剩下一个有效的论点。这样的论证仍然有分量，这并不是说它对进化的细节之观点是正确的，但它不再与认识论有很强的相关性，因为它随后成为一个论证，即某种方式只是效率的原因，不再是本体论必然性的原因。这样的论证如果有效，将不是不重要的，它将有一个不同的意义：它将提出一个基于或然效率而不是认识论必然性的观点。更深刻的是，从结构主义的真值输入中退却，完全不清楚皮亚杰如何在这种变化的框架内解释逻辑必然性的认识论。更进一步地说，这将使皮亚杰著作中关于动机和逻辑之间相对紧密的相互联系变得混乱。那么，这个皮亚杰评论的益处就不是微不足道的。

然而，这种评论的潜在重要性与和乔姆斯基之间坚持辩论的观点相矛盾，即仅仅生存适应不可能产生逻辑必然性，而是需要充分适应。此外，我们发现：

有两个问题需要区分。首先是全球适应或生存（这意味着物种或种群的有利繁殖以及个体的生存）。其次是我提出的适应性的差异性适应。这预设了生物体的特定器官或运动与环境的特定方面或受该行动影响的物体之间详细的对应或态射（数学意义上的）。（Piaget，1978，p.28）

在这里，我们不仅有生存适应和充分适应之间的关键区别，而且还有明确的主张，认为充分适应产生了生物体内部对世界的结构对应关系。也就是说，我们仍然区分皮亚杰关于知识起源的建构主义观点和他关于知识本质的结构主义观点。无论是在《生物学与知识》中，还是在与乔姆斯基的辩论中，都基本主张只有积极的建构主义才能获得完整的结构主义的对应关系，并且只有在这种完整的结构主义的对应中才能出现逻辑必然性。

除了简单的“它没起作用”的说法之外，皮亚杰(1980，p.10)否认任何反馈，然而，这种结构主义的对应真值输入一定是可能的，即使仅仅是功能性选择，只要认知系统在其探索和建构中是内源性的活跃状态。换句话说，只要正被选择的系统结构本身是启发法的和被积极引导的，皮亚杰就会接受纯粹的筛选或分类选择，被积极引导的变化和纯粹的筛选选择对结构主义相关知识而言已足够。皮亚杰在此澄清的是(尽管他谴责“单纯分拣”或“纯粹筛选”)，对他而言，积极的、探索的、目的性的结构总是重要的，而不是筛选本身：“真值输入”并不需要环境中的“信息”，只需要积极的探索建构和反馈。

然而，并不清楚皮亚杰是否支持结构主义对应的知识的论述，他的讨论形式是从完美的结构主义对应的角度来阐明必然性，并且认为内源性的探索对于建构这种完美的真值输入是必要的，而没有明确地说明结构主义对应本身是否可能或有意义。事实上，在逻辑上有很深的理由认为，不可能赞成任何这样的说法(Campbell 和 Bickhard，1986)。它与皮亚杰积极倡导的建构主义假设一起，仍然是一个单独的并行的结构主义假设。从知识的建构主义起源的观点来看，它仍然是一个未经审查的不合逻辑的论述。

两个困难：必要的认识活动和结构主义

在这一点上，我们面临两个根本性的困难：第一个困难的生发点在于，皮亚杰为了这样的系统的生成，对已存在的积极的认识论体系的必然性给出的逻辑承诺；另一个困难，是关于他对认识内容性质的结构主义假设。这两点是相关的，因为第一点的论点——活跃的指导性认识论体系的必然性，认为这样一个系统需要第二点——结构主义知识——的发生。但是，如果结构主义知识的对应关系在任何情况下都不可能或不一致，那么皮亚杰关于内源主动认识主体的必然性的论证就消失了，关于一个认识系统初始发生的可能性的无限回归也就消失了。然而，这种方式对皮亚杰来说并不可行——他的结构主义假设过于深入，他似乎极不可能看到他的联合立场所导致的困境。

此外，即使没有皮亚杰的结构主义假设，也有强大的约束阻止皮亚杰放弃内源活跃和指导性认识系统的逻辑必然性。首先，他只是花费了大量精力在进化水平上建立一个拟表型，放弃积极“探索”的必然性会削弱这些努力的基本原理。然而，从逻辑上讲，更基础的是，皮亚杰实际上是从变化和选择模型开始理论建构，尽管他早期攻击它们。然而，他的观点不仅有建设性的变化，而且还具有在这些建设性的变化中所谓的启发法引导的“探索”。

重要的是，虽然皮亚杰在他的建构主义中有两个逻辑上可分离的方面：(1)本身具有建构性的变化和“单纯”过滤性的选择；(2)对这些建构的内源性积极探索——他只有一个本体论领域，并在其中尝试理解和建模结构均衡的领域。我已经提到，当皮亚杰将

适应性纳入适应系统时，他将自己限制在一个系统过程的本体论中，从而消除了适应过程与适应性元过程之间充分区分的可能性——他在逻辑上被迫假设“均衡”可以以某种方式做到两者兼顾。在这里，我们发现在适应性元过程的“元”领域内本体论限制的第二个类似结果：只有一个系统过程本体的层次，皮亚杰不能在（初始随机的）建构性元过程的一般本体论中建模单独的指导性建构的元过程启发法，他不能通过初始随机建构和选择的过程来为指导性建构启发法的发生与建构完成建模。如果皮亚杰将初始系统建模为随机变化和选择的系统，并且因此可以通过随机变化和选择来生成，则将避免出现这种系统逻辑上的不可能性。他不能在这样的初始随机过程的基础上来研究积极的认知主体的发生，然而，他没有放弃主动探索建构启发法的逻辑必然性的假设，更根本的是，他甚至无法解决这种主动探索可能不是最初所需要的，只要他只有一个系统层次本体：一个单一级别的系统本体（活动结构）不仅强制适应过程和适应性元处理的合并，在适应性元过程的领域、适应性“建构”和适应性“主动探索的建构”中，它也迫使其合并，均衡被迫做到这一切。

此外，皮亚杰有支持性理由来争辩内源性活动的必然性。例如，他认为理性不会没有理由地改变，并将随机性与非理性等同起来。那么，随机变化不是理性变化，不能说明理性本身的合理变化；反之，如果理性变化没有理由，那么由于这种不合理的变化，理性不会是理性的（Kitchener，1986，pp.180f，191，194）。但是请注意，这个理由不是一个论点，而是一种直觉，认为理性不能从某种本身不合理的东西中产生出来。然而，理性是否会如此发生，例如从随机性中发生，这正是讨论的关键，所以皮亚杰在这里的诉求是循环性的。进一步说，这个理由在初始的无限回归中产生了自己的轻微变体：如果理性只能由理性构建，那么我们必须有理由才能推理。

解困之路

困难在于，在皮亚杰的观点之下，如果没有结构主义知识，就不能解释必然性，没有内源指导的建构主义认识系统就不能获得结构主义知识，而且如果事先没有这种系统参与必要的先前内源性活动，这种认识系统就无法形成。结构主义与逻辑必然性认识论问题的冲突已经产生了对可能起源的无限回归。但是，还是有独立的理由来质疑结构主义的知识概念。如果有一些非结构主义的知识可以解释逻辑必然性的发生，那么它也可能避免认识系统发生的困惑。内源性主动认识系统的假设的困难并不是来自这种系统存在的假设，也不是来自这种活动可能是某种知识的起源所必需的主张，而是来自这样的假设：内源性指导活动对于构建任何认知内容而言在逻辑上都是必要的——困难在于，在这样的假设下，内源性指导必须在这样的内源性指导发生之前出现。因此，需要的是对知识和表征的本质的看法，这与皮亚杰的基本建构主义观点是一致的；

它可以以非引导的方式出现,但与指导性建构主义潜在的后期发展相一致;这可以解释逻辑必然性的发生,而不会遇到结构主义的问题。

这里提出的主张是:在皮亚杰的著述中已经有了一个对这种观点的部分而重要的直觉——他强调知识和表征的互动性和操作性的特点。皮亚杰一生都在强调,静态的形象化表征不足以解释生物体对世界的认识——这种形象化的表征必须符合这些形象化点如何从一个点转换到另一个点的互动式知识。如果不被嵌入到这种可能转换的互动式知识中,一个孤立的静态形象化条件的表征基本上就不会构成任何知识:"……人类知识本质上是活跃的,知晓就是将现实同化到转化系统中"。(Piaget,1970,p.15)

但是,符合与否,皮亚杰的形象化知识是一种与操作性知识不可分割的知识形式——它本质上是结构主义对应的表征。此外,即使皮亚杰关于可能转换的互动式知识的概念也是以结构主义相应的方式来解释的:他的格式和操作概念是与可能的转换结构相对应的知识结构(Bickhard and Campbell,1986;Campbell and Bickhard,1986;Kitchener,1986,p.107;Piaget,1970,p.15;Piaget,1977,p.18)。除了与皮亚杰的建构主义论证不相符之外,基本上由这种对应构成的知识概念具有一种深层次的逻辑不一致性。结构主义表征通过结构表征和潜在转换结构之间的已知对应关系构成知识,但为了了解这种对应关系,必须知其相应的潜在转换:结构表征本质上是转换可能性的结构的复制,但为了构建一个副本,你必须已经知道要拷贝什么。那么,结构主义知识,以及形象化的、转换性的、调节性的和操作性的知识不能成为不可约的知识形式——它最好是从其他形式的知识衍生而来,而对于这些知识形式,此类对应是可以被定义的。

皮亚杰很清楚知识的复制理论是不可能的,并且经常表达自己的异议(Piaget,1970,p.15),但他没有认识到自己的结构主义观念也受到了同样的质疑(Bickhard and Campbell,1986;Kitchener,1986,p.107)。他没有意识到这些论争的真正范围:他对被动的"复制"模型以及这种知识的起源多有论及,赞成应有的积极的建构性起源,而不承认其对结构主义相应的知识本质假设的有效性。特别是当前的相关性问题,需要内源认识性探索来解释内源认识性探索的起源,这一无限的回归是皮亚杰自己反对复制理论的心理学论证的一种进化的观点:我们必须已经有了某些知识才能生成它的副本,如果知识被认为是作为副本构成的,那么我们必须已经有副本才能构建副本,我们必须已经有知识才能解释知识的起源。

皮亚杰对于表征的复制理论的论证实际上是一个经典怀疑论的论证方式:我们如何知道我们的表征是否是正确的,因为为了检查它们,我们必须面对它们所表征的是独立的那些陈述,而且根据定义,这是不可能的。该论证的类似观点指出,除了某些其他表征之外,甚至不能指定对应性应该是什么,并且对于它们定义的某种其他表征的这种依赖性使得这种通过对应的表征必然是派生性的——它们不可能是基础性的,否则就没有其他表征方式可以指定它们的表征内容以及它们的认识对应关系。凭借已知认知对应表示的表征通常被称为编码,并且皮亚杰论点所属的综合观点适用于被认为是逻

辑上独立表征的所有形式的编码,其中特别是皮亚杰自己结构主义的表征和知识的概念(Bickhard, 1980a; Bickhard and Richie, 1983; Campbell and Bickhard, 1986)。

此外,它也适用于Chomsky和Fodor关于表征必要的天赋论的原则论证:我们必须已经知道我们要编码什么,以便定义或构建它的编码——不一致的内容;因此,我们不可能获得新的基本编码,而只能得到现有的新的组合——因此最终是先天的编码。但是,这种原则性的论证不会因为发展而停下来——它在进化水平上对原初产生了不可估量的无限回归,就像在学习或发展的层面一样。皮亚杰以回归概念质疑了乔姆斯基和福多的立场(Piattelli-Palmarini, 1980),这是正确的,但皮亚杰也含蓄地分享了关于表征性质的相同编码假设,因此也会有同样的回归观点(Campbell and Bickhard, 1987)。

如果结构主义的表征概念是不一致的,如果结构主义的真值输入或对应建构是不可能或不一致的,那么皮亚杰对于内源主动"探索"的逻辑必然性的动机就不成立了:这种探索被认为是结构主义的真值输入所必需的,这种真值输入对于形成逻辑数学结构是必要的,但是,如果无论如何结构主义真值输入是不可能的,那么论证中的中间环节就不再存在。这使我们能够考虑内源主动变化的演变以及由随机变化去发展的可能性——只要对经历均衡的系统的单一本体领域的约束被放弃——但却提出了以其他方式解释必然性的问题。

剔除皮亚杰的结构主义编码观会留下纯粹的互动论——知识就是成功互动的能力。现在要提出的主张是,互动论可以解释皮亚杰认为需要结构主义的——逻辑和数学的必然性——并且可以这样做,而不会产生原初的逻辑上的不可能。也就是说,互动论与建构主义是一致的:不需要结构主义;无论如何说明了逻辑的必然性;在逻辑上不需要积极的引导变化,从而避免了原初的无限回归。但是,它仍然能够模拟这种指导启发法的发生。现在的重点是如何概述使这一说法更好。

互动论

互动论是对知识和表征的本质的一种看法。知识是成功互动的能力,表征是知识的一个方面,涉及根据系统正在与之互动的相关区别来区分系统的活动。也就是说,表征从系统必须对正在互动的内容敏感的意义上发生,以便互动成功:表征的发生是因为互动式子系统在互动完成后的内部结束状态用于含蓄定义那些潜在组合环境,如果该集合遇到该互动式子系统,则将产生该特定的内部状态,并且该最终状态反过来又可以用来帮助区分和选择整个系统进一步潜在的互动作用。与皮亚杰不同,互动论认为表征是任何成功互动系统发生的功能,而不是对应的、结构的、基本的或其他方面的问题。显而易见,互动式知识是一种知识形式,但许多问题可以被问及其性质、含义及其充分性作为知识和表征的完整模型。这些问题中的大部分都不会在这里讨论(见

Bickhard，1980a；Bickhard and Richie，1983； Campbell and Bickhard，1986年进行更广泛的讨论)，为人所关注的将是互动论能够满足约束条件并解决皮亚杰所分析的困难问题。

与互动论的融合深深地融进了皮亚杰的直觉概念。他反对静态复制模型，对于知识的固有积极属性、潜在知识的基本状态，以及形象化知识对操作性知识的隶属关系，都表现出他的基本趋同直觉的观点。实际上，互动论源自皮亚杰的立场，因为它与皮亚杰自己的反对知识复制理论的观点相一致，并且用互动论的表征概念来代替结构主义概念(Bickhard and Campbell，1986)。这样，互动论与皮亚杰关于知识的核心直觉是一致的。

互动论也与皮亚杰关于知识起源的建构主义直觉相一致：互动系统可以像表征结构一样构建。然而，这里不仅仅是附和：互动论在逻辑上加强了建构主义。皮亚杰一直反对知识模型作为环境对系统的被动影响，然而这种概念的主要诉求直接来自皮亚杰自己的结构主义的编码论。如果内部表征是凭借与世界的对应关系，那么似乎有意义的是，它们可能通过世界结构对系统施加的影响而产生——经典的白板说可为范例。尽管这与他自己的结构主义格格不入，皮亚杰明白这种对世界的被动复制并不是令人满意的模式。然而，对知识获取的必然主动性的理解与其结构主义无关。相比之下，互动论并不是凭借结构对应或任何其他类型的编码对应来表示的，因此，对于世界的影响无法创造表征。互动式表征是凭借成功的功能性隐含的定义和区分，而不是凭借对应性来完成的。互动系统必须被尝试性地建构和改进、修正等等，然后根据这些变化是否有助于它们的互动潜力来决定保留或改变：互动作为知识本质的概念，通过变化和选择促使建构主义形成知识获取的模型。在这方面，它与皮亚杰将建构性知识的获取与结构性知识的获取混合在一起，具有更深的一致性。

另一方面，互动论在逻辑上并不需要积极的启发法指导的建构性变化。随机变化和过滤选择在逻辑上是足够的，都可以开发一个已经存在的互动系统，在这种情况下特别重要的是可以从头开始产生原初的互动系统。因此，互动论可以避免皮亚杰观点所提到的可能起源。特别是，不管事情的实际情况如何，互动论在逻辑上都不需要像生物学的拟表型这样的概念。

然而，互动论可以解释辅助启发法方法的发展，以指导其问题定义和变化的建构主义者在解决方案上的尝试。因为皮亚杰明确地拒绝了这种可能性——"现在，这种目的性是必须解释的，因为……它可能(不)是单纯排序产生的结果"(Piattelli-Palmarini，1980，p.281)——我将更加注意概述这种情况是如何发生的。似乎皮亚杰错过的是：在逻辑意义上即使不一定是物理意义上，随机变化和选择的元过程也是相互作用之系统的一部分环境，因此变化和选择的元过程将有一种倾向，即改善系统与那些相同变化和选择的相互作用，这在逻辑上与其改善系统与环境的相互作用的倾向非常相似。换句话说，系统将倾向于学习使用变化和选择的元过程。如果这些变化是简单的动作试验，

正如皮亚杰在最初提出对反复试验和错误模型的反对时可能想到的那样，那么这种观点是不可能成立的。但如果变异本身是目标导向的问题解决系统的结构，那么那些系统将改善他们的总体目标达成和解决问题的启发法功能。反过来，一个重要的潜在启发法或启发法类型将用于解决问题的启发法来启动系统目前无法成功完成的互动，以便明确地调用建构性变化和选择的元过程——一种使用随机变化和选择作为其资源之一的可能性的启发法。以这种方式，一种倾向于出现的过程的重要本体论领域——并成为其进一步发展的一个重要领域——是启发法区分问题类型的那些过程的领域，而且启发法会尝试那些适合于这些问题类型的解决方案，总是在外部环境下受到越来越少的启发法指导，越来越少的"有见识"的策略在其他策略不起作用时可能会使用，并以系统组织中的纯随机变化作为可用"启发法"的最外层"边界"。也就是说，一种重要的潜在启发法类型将是明确而内源地唤起与环境的探索性互动。

那么，一个具有随机变化和环境选择元过程的问题解决型互动系统将成为一个整体的系统加元系统，以精确地完成皮亚杰觉得必须从一开始就要独立假设的探索。在这样的分析层面上，这样的探索，特别是这种探索的发展将是非常低效的，但随着情感和意识的进一步发展，这种探索启发法发展的效率和有效性（以及普遍性）将会大大增加（Bickhard，1980b；Campbell and Bickhard，1986）。然后，互动论从一开始就不假定内源的探索，但它可以解释它们之后的潜在进化和发展。

必然性怎样？

我已经说明了互动论如何论及皮亚杰最深层的直觉之一，避免了结构主义的不一致性，与建构主义有着深刻的共鸣——一个建构主义的逻辑推动力，事实上，是不会假定原始的内源性探索——因而不会使适应性和适应力变得混乱；并且可以解释它们后来的发生。换句话说，我已经展示了互动论是如何解决和消除皮亚杰的立场中发现的问题和困惑，除了逻辑必然性出现的问题之外。这个主题在其他地方被广泛地发展（Campbell and Bickhard，1986），这里不再重复，但我想将它概括得足以指出一些涉及的基本原则。

首先，需要一些准备性的讨论。互动的观点产生了对以下讨论至关重要的潜在认知水平的层次结构，简单地说，与之互动并且在该意义上知晓环境的第一层互动系统将具有作为系统的属性，它本身不能从该系统内部（互动地）获知，但是可以从与之互动的第二层获知，知晓第二层级在同一意义上知晓的环境，而第二层级又因此具有可从第三层级获知的属性，如此类推。

在建构主义发展模式中，这种可以被认识的潜在层次的等级层次推动了发展阶段相应的序列——在给定的认识水平上没有系统可以被构建，除非已经有系统在下一个

更低的发展水平上已获知。然后,层次结构必须发展上升,如果有的话,在分级序列中一次一个阶段。这种认识水平阶段与皮亚杰的阶段说有很强的相关性,特别是他在1970年后的观念,但也有一些独特的差异。例如,了解水平阶段不涉及任何特定的结构或组织原则作为阶段的确定——没有整体的结构。相应地,各个阶段的发展可能在各个不同的发展领域之间广泛地不同步。此外,与皮亚杰的阶段相比,认识阶段提前了半个周期,其中第一阶段从出生阶段延伸到大约四岁,第二阶段到第九岁,依此类推;在每个层次上获得恒定性的知识——例如,在第一层次上的对象持久性,在第二层次上的守恒性等等——在认识阶段的水平上是一项重大成就,而不是像皮亚杰那样划分阶段之间的界限。每个更高层次都通过反射抽象与下一个较低层次相关联并发展出来——类似于皮亚杰的1970年代模型(Piaget,1977/1986,1985)。这个认识水平阶段属性的简单列表是为了说明目的性——该模型被Campbell和Bickhard (1986)进行了广泛的阐述——但是,为了概述逻辑必然性发展的互动模式,需要清晰相邻阶段之间存在的层次、阶段和反省抽象关系。

在展示这种模式时需要做的第一个区别是在逻辑上必然的关系表征的发展与必然性的表征知识的发展之间。皮亚杰一直将这种区分混为一谈:他坚持将实际上逻辑上必然的关系表征模型与逻辑必然性属性的表征模型相融合。这种融合本身就是皮亚杰的结构主义所强加的:结构通过它们所表征的态射来表征;它们通过体现这些关系来表征抽象关系;特别是它们通过逻辑上必然的(属性)(具有封闭的数学结构)表征逻辑上的必然性。因此,在逻辑上的必然性和知晓的必然性之间没有区别的可能模式。在知晓的水平模型中,可能在逻辑上必然的关系表征将在某种适当的知晓水平上发生,但是必然性的属性将是该水平表征中隐含的属性,并且因此将仅仅是一般而言,通过反思抽象,可以从更高层次获知。所以,对于逻辑必然性发展的知晓的水平模型有两个部分:逻辑上必然的关系怎样才能表征出来(而不仅仅是近似关系,仅仅是存在就足够了),以及这种逻辑必然性怎样来表征?逻辑必然性的表征如何发展是复杂的、有趣的和重要的,但它不是当前讨论的核心问题(参见Campbell and Bickhard,1986,关于逻辑必然性表征的发展)。皮亚杰将逻辑上必然的关系与必然性知识结合起来,但他从逻辑必然性认识论问题出发的最强论据涉及事实上具有逻辑必然性的关系的发展,而不管这种必然性是否被表征或理解——皮亚杰关心的是逻辑数学结构的发展,这些结构从本质上、在逻辑上都是必然的(闭合),而不仅仅是近似和足以生存。他关心随机性到底如何才能产生合乎逻辑的必然性,这是目前要解决的问题。

必然关系的表征

有些讽刺意味的是,关于这种情况如何发生的争论的一般形式,以皮亚杰自己的阶

段序列模型为例在心理学中最为强烈地表现出来。特别是，如果正式操作实际上是针对具体操作的操作，那么按照皮亚杰提出的顺序解释为什么会发生这种操作就并不是偶然的解释。这是一种逻辑必然性的解释：正式运作遵循具体的操作（如果它们完全存在），因为这是它们的逻辑必然结果。该序列是这些阶段的本体论的逻辑内在属性。任何过程，无论是否随机，都不可以构建这些阶段并违反该序列，因为该序列是阶段所固有的——操作之前的正式操作本身不能在具体操作之前进行。内在必然性的这种论证在心理学中是不寻常的（虽然在物理学中很常见），并且通常不被认为是一种独特的合法形式的论证和解释（参见 Campbell and Bickhard，1986，关于内在约束）。皮亚杰确实承认了这种形式的论证，并且在主要的经验主义心理学领域提供了最好的例子，但似乎没有认识到它与他的一个非常特殊的问题——逻辑必然性的发展之间的潜在关联性。就像具体操作和正式操作之间的顺序对于它们本身是固有的一样，因此在逻辑上是必然的（这一点与这些阶段是否实际上模拟人类发展无关），表征之间的其他关系也可能是这些表征的内在特征，因此在逻辑上是必然的。正如已经提到的那样，这种逻辑必然性的内在性属性只有在知晓的下一级才能知道，但是必然性已经是内在的，而且隐含在下一级的表征中。

从互动的角度来看，这个秘密消失了。可以在给定的知晓水平（可能甚至是随机发展的）上发展表征，事实上这些知晓水平是以本质上必然的方式相关的，并且那些必然的性质可能在下一个更高级别上被表征和知晓。对皮亚杰来说，必然性的发展部分是由于必然性和必然性知识之间的混合而产生的问题，然而，它更是因为他将必然性同化到了他的设计理论之中——完美的逻辑必然性如何能从单纯的随机性出发。不过，随机变化和选择探索了一个约束空间，无论怎样随机（或具衍生性、指导性），这种约束空间包括了自制约束和内在约束，并且将发展与其他一样多的互动式表征。然后，在更高的知晓水平上进行探索，就可以发现可能的与必然的之间的区别，以及必然性的特殊不变性——反事实组织下的特殊不变性。

必然性趋势

然而，皮亚杰还有另外一部分难题。事实上，不仅认知系统确实（偶然地）发展逻辑上必然的必然性组织和知识，而且这种发展似乎是生活和人类的一种深刻趋势。皮亚杰质疑的另外一部分，不仅仅是这样的发展如何发生，而且是如何以及为什么会有这样的发展趋势。

这种趋向于必然性的趋势可能有两种意思：作为定向启发法趋势和作为内在的发生趋势。我们将找到这两种形式，并将首先讨论启发法趋势。理解必然性的启发法趋势的第一步是认识到逻辑必然性是具恒定性的一种形式，恒定性本质上是有用的，因

此,会有发展的趋势——例如,客体和守恒(Bickhard,1980a)。恒定性和关系的内在有用性的直觉可以从考虑恒定性意味着这些性质和关系的应用的范围和扩展的观点得出。相对于某些种类的其他变化,恒定性是不变性、稳定性,即:这类变化在空间上应用的范围和扩展。逻辑必然性,作为一种无限制的反事实转换的恒定性,在皮亚杰看来,相对于逻辑上可能的转换空间的恒定性,是永久的或完美的均衡。关于这一点的另一个观点是:与某类的转换相关的恒定性等同于在转换空间中被抽象,作为普遍的形式在这样一个转换空间中是普遍存在的。

作为对事实逻辑转换空间普遍的抽象形式,恰恰是皮亚杰在描绘基因组和类似结构之间的类比时描述逻辑-数学结构的方式(尽管不完全是这些术语):逻辑-数学结构正是所有知识普遍基础的一般形式。“任何有关对象的知识总是对格式的同化,并且这些格式包含一个组织,无论它多么基本,都可能是逻辑的或数学的”(Piaget,1971b,p.335),而“物理和实验知识不可能没有一些结构和逻辑数学框架就建立起来”(Piaget,1971b,p.342)。那么,逻辑必然性是其最深层次意义上的恒定性,因此它意味着框架的潜在范围是其最一般形式之一。反过来,逻辑上必然的关系发展的启发法倾向自然是发展功能性互动系统,并为此类系统的发展而发展启发法和框架。(这是在明确数学史的美学欣赏的影响之前——这种欣赏实际上明确地寻求更深层次的关系和组织。美学欣赏的互动模式以及相关现象,例如在科学中寻求“更深层次的联系”,需要独立而广泛的呈现。)总之,逻辑上必然的组织是一种最终的恒定形式,而恒定性具有功能上的有用性,因此,生命,特别是人类,会有一种发展自身的倾向(发展一种启发法的倾向)。

除了这种启发法的倾向之外,互动论还提供了对发展必然性的内在认识倾向的解释。这种趋势也源于作为恒定性最终形式的逻辑必然性的解释,它与皮亚杰从必然性中推导出来的直觉相一致,作为(局部)完美的均衡(Piaget,1977/1986;Kitchener,1986,pp.56–68):如果必然性作为“完美”均衡而构成,那么趋向于“更好的”均衡的均衡自然倾向于“完美的”均衡,并且在获得完美均衡——必然性——时将保持稳定。同样,如果变化和选择是由与环境相互作用中的功能障碍引起的,那么变化和选择将倾向于功能稳定的系统组织,对于如何实现这种恒定的空间,也是不变的。作为这种恒定性最终形式的逻辑必然性将参与到这种趋势中。

注意,一方面,涉及可能性空间的认识论穷举的必然性的直觉对于皮亚杰的模型和互动论是常见的,但是对于皮亚杰,(1)穷举是对应那些可能性的点对点的结构性表征,(2)可能性本身只是转换或协调,以及(3)必然性——在某种程度上神秘地——发生在这种结构的“封闭”中。另一方面,对于互动论:(1)认识论“穷举”具有恒定性、无限性(跨越可能性的空间),有或没有被系统表征或知晓,恒定性都可以保持或是真实的——当然,与这些可能性、结构性或其他方面没有任何的对应(如果相关可能性的领域是无限的,那么结构主义模型会是怎样)。(2)所涉及的可能性仅受限于未表征的必然性的情

况下系统的隐性表征（阶段），或在已表征的必然性的情况下的显性表征力——它们不局限于转换、协调或数学结构，但可以包含。例如，可能事实的空间，可能的世界，可能的论点，可能的情况，可能的本体论等的空间。以及（3）必然性正是这样的无例外或恒定——直观地与逻辑必然性融合为“在所有可能的世界中都是真实的”，但没有任何对“可能世界”方式的本体论内容的承诺——并且与皮亚杰的转换或数学“封闭”等内容没有内在关系。除此之外，互动论很容易适应皮亚杰的“局部必然性” ——即使不是绝大多数，交易活动中的许多必然性都是“局部”的恒定性，而不仅仅是在操作前——而皮亚杰的结构主义则不然。此外，互动论方法的概括容易考虑对应于恒定性的不同类型的必然性，例如，实用的必然性，物理的必然性，逻辑的必然性，本体论的必然性，道德的必然性或存在的必然性。

趋向必然性是互动式认知转换和选择建构系统的内在趋势。它是认知变化与选择之间关系的一种内在产物，是一种发生的事物，以及作为一种恒定性的必然性的本质。因此，它先于必然性价值观的发展（Campbell and Bickhard，1986），并且先于为了达到逻辑必然性而存在的发展启发法——因此它可以为两者的发展奠定基础。也就是说，向必然性发展的内在趋势可以围绕着启发法倾向（更进一步来说，价值观的发展和启发法倾向的发展将存在内在的倾向，而不会蒙蔽这种启发法发展的“基础”和可能——见Bickhard，撰稿中）。

这种对于必然性的内在倾向和对必然性的启发法倾向之间的区别是皮亚杰不容易做出的结论：结构应该是探索性的，而探索的必然性倾向应该是内在的和启发法的。再一次，我们看到只有在积极结构的本体层面上的约束。

这样，互动论区分和解释了认识论体系中的趋向必然性的启发法的和内在的倾向，它解决了偶然和随机过程如何产生必要关系的知识的问题，以及为什么存在如此强的趋势的问题。

总结和结论

这个分析由皮亚杰先前对发展和进化的试验和错误模型的反驳开篇，然后追溯皮亚杰思想中的一些后续发展。提到了皮亚杰的一致性存在于：他的结构主义，内源探索指导的必然性的研究，拟表型的研究，均衡结构的单一本体论领域，适应性和适应力概念的融合，以及逻辑上必然关系的表征和这种必然性知识的融合。这一系列观点和研究通过动机和逻辑关系紧密相连：结构主义在解决必然性问题时，产生逻辑数学知识的模型作为完美对应，而为了通过建构主义获得完美对应，提出积极探索的必然性，认识论上必要的积极探索在进化的水平上产生了拟表型，以及在逻辑层面的起源的无限回归——这些是根本的错误。此外，结构主义产生了均衡系统的一个本体论领域，它强制适

应性和适应力的融合,以及逻辑上必然的关系的表征与它们的必然性的表征的融合——这些是使问题变得困难的错误,使得不见过去,或者完全认识不到根本的错误。这些立场中的每一个观点都是错误的,但是,由于它们紧密地互联,它们可以相当干净彻底地从皮亚杰理论中去除掉。

我认为,仍然存在着一种更加深入的互动式知识的直觉,当被辅以互动式知识时,必然会产生知识的建构主义起源,并且合理地解释内源发展的启发法和逻辑必然性的发展。互动论的核心是在这种互动式知识的直觉的基础上发生的一种非对应的表征形式。互动论也产生了本质上必然的发展阶段序列,以及不直接在本讨论的内容上的其他后果。

因此说,互动论把握并一致得出了皮亚杰最深刻的见解,且正确地区分了他的有效和无效承诺。特别是互动论与皮亚杰一道解决了必然性的认识论问题,还为解决这一问题提供了解决方案,避免了皮亚杰结构主义的缺陷。

文献总汇

Apostel, L. (1982), "The future of Piagetian logic." *Revue Internationale de Philosophie*, 36, 567–611.

Bickhard, M. (1973) "A model of developmental and psychological processes," Doctoral dissertation, University of Chicago.

Bickhard, M. (1980a) *Cognition, convention and communication*. New York: Praeger.

Bickhard, M. (1980b) A model of developmental and psychological processes, *Genetic Psychology Monographs*, 102, 61—116. An abridgement and revision of Bickhard. 1973.

Bickhard, M. (in preparation). Rationality: Emergence, development, and domains of application.

Bickhard, M. & Campbell, R. (1986, May) Interactivism and genetic epistemology, Presented at the Jean Piaget Society meetings, Philadelphia.

Bickhard, M. H., Cooper, R. G. & Mace, P. E. (1985) "Vestiges of logical positivism: Critidues of stage explanations," *Human Development*, 28, 240–258.

Bickhard, M & Richie, M. (1983) *On the nature of representation*, New York: Praeger.

Bowler, P. (1984) *Evolution*, Berkeley: University of California.

Campbell, R. & Bickhard, M. (1986) *Knowing levels and developmental stages*, Basel: Karger.

Campbell, R. & Bickhard, M. (1987) "A deconstruction of Fodor's anticonstructivism," *Human Development*, 30, 48–59.

Cellerier, G. (1984) "Of genes and schemes," *Human Development*, 27, 342–352.

Gruber, H. (1981) *Darwin on man*, Chicago: University of Chicago.

Inhelder, B., Piaget, J. (1955/1958) *The growth of logical thinking*, New York: Basic Books.

Inhelder, B., Piaget, J. (1959/1964) *The early growth of logic in the child*, New York: Norton.

Inhelder, B.,& Piaget, J. (1979/1980) "Procedures and structures," In D. R. Olson (Ed.) *The social foundations of language and thought*, New York: Norton.

Kitchener, R. F. (1986) *Piaget's theory of knowledge*, New Haven: Yale.

Mayr, E. (1982) *The growth of biological thought*, Cambridge: Harvard University Press.

Piaget, J. (1924/1969) *Judgment and reasoning in the child*, Totowa, New Jersey: Littlefield, Adams.

Piaget, J. (1938/1952) *The origins of intelligence in children*, New York: Norton.

Piaget, J. (1947/1966) *Psychology of intelligence*, Totowa, New Jersey: Littlefield Adams, & Company. From lectures given in 1942.

Piaget, J. (1950) "Introduction a I' epistemologie genetique," Vol. 1. *La pensee mathematique*. Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J. (1957/1971a) *Psychology and epistemology*, New York: Grossman.

Piaget, J. (1967/1971b) *Biology and knowledge*, Chicago: University of Chicago Press.

Piaget, J. (1968/1970) *Genetic epistemology*, New York: Columbia.

可能、不可能与必然

〔瑞士〕让·皮亚杰　〔美〕吉伯·沃亚特　著
蒋子修　译
蒋　柯　审校

可能、不可能与必然

The Possible, the Impossible, and the Necessary

作　者　Jean Piaget, Gilbert Voyat
英译者　Donald Nicholson Smith

原载于*The Impact of Piagetian Theory: On Education, Philosophy, Psychiatry, and Psychology, A Publication of the Jean Piaget Society*, Chapter 5, edited by Frank B. Murray, University Park Press, 1979.

蒋子修　译自英文
蒋　柯　审校

内容提要

这篇文章分别讨论了儿童对“可能”“不可能”和“必然”三个概念的理解方式，并试图通过感知运动运算、表象运算和符号运算等儿童认知发展阶段中的不同认知格式的变化来解释儿童对三个概念理解的发展特征。最终，作者希望陈述儿童发展的三个阶段：第一个是无差别阶段，在这个阶段，真实体现为伪-必然性而同时可能性则被限定在最容易预测的发展趋势之中；第二个是区别化阶段，其中，可能性和必然性都被从简单的“事实”中分离出来，它们会在数量上逐渐增加；最后一个阶段是整合化阶段，在其中，可能性、必然性和结构性真实等观念形成综合。

对儿童认知格式发展的梳理是这篇文章的中心议题。

蒋子修

可能、不可能与必然

可能

建构主义者的认识论的中心问题是建构或者创造某些之前并不存在的东西。然而,在这里立刻就出现了两种相互矛盾的理解"可能"的方式。第一种解释是常识性的观点;在一些学科(如生物学)中,它也是"预成论"的观点。根据这种观点,所有的可能性都预先地决定于某种初始条件,因此,从理论上说,如果有一台足够精密的计算机,能够解决所有可能的组合,那么它就能够预先列出一份完整的(可能)清单。例如,在生物学中,遗传特质的资源——构成DNA(脱氧核糖核酸)的基本要素可以被联合成为无限可能的组合方式。因此,生物的进化可能被构想为不同组合可能性的简单结果;这导致了进化的创造性特征被当作一种幻觉而被抛弃。根据一个频繁被引用的类比,DNA的构成要素可以被类比为字母表中的字母,它们可以被用来拼写成为任何单词或句子。从这个观点来看,甚至是连最伟大的文学作品,例如莎士比亚的悲剧,也只是数百万种字母、单词和句子组合可能性中的一种(虽然事实上它体现为不同层次的可能性)。但是,在这一点上正如塞勒里尔(Cellérier)所说,莎翁的悲剧总是会被写出来的:好的组合无论如何都会被选择并组建出来。

另外一种理解"可能"的方式是,可能性总是在不断地形成,但是它们却没有稳定的特征,我们希望通过明显的事实来证明这种方法的正确性,尽管在这个领域内要区分事实与解释是非常困难的。一个可能之所以成为"可能",是因为它进入了可能现实化的范围,还因为它被一个主体察觉到曾经进入过这个范围,并且还因为它不仅仅被这个人作如是观,而且还被"涵摄"(comprehended)到能够成为现实的前提之下。因此,每一个可能都是这样一个事件的结果,即它使得它自己成了一个"新的可能性"的"开端";一旦它成为现实就会引起其他的可能性被"激活"(opening),以此类推。在这一点看来,关于一个可能性集合的联合计算,对于进行这种计算的主体而言就构成了可能性本身的初步现实化,尽管这只是非常有限的现实化尝试,可能性在这些尝试中仅仅处于"概念"水平,并缺少现实化的必要前提的涵摄。这些现实化的前提可能会相当复杂:主体知道了字母表中字母组合的所有可能方式,但是他"仍然只写了一本书"。

在这一章节中,我们将选择第二种方式来理解"可能",这种选择不仅仅是建立在理论演绎之上,也是建立在事实之上。因此,在这里的研究主题是主体对可能性的创造和

理解,以及这样的假设,即当可能性被设想为与相应的活动分离时,它本身将只是一个无意义的观念。

关于问题的这种表述并不是毫无依据的。事实上,除了在一些特殊的情况下人们可能会提到"演绎的可能性"之外,被框定为某种既成的结构的"所有可能性的集合"(例如:序列)通常是不存在的,它不能被界定,因为每种可能性都有可能会引起其他的可能性。更具体而言,"所有可能性的集合"就是一个自相矛盾的概念,追究起来"全部"本身就是一种可能性,而集合则是一个永远无边界的概念,从而是无法定义的。

让我们转而来关注一些事实。首先,应该强调的是,以下实验旨在考察4—5岁以及11—12岁的儿童所能够发现的某一活动的可能性的最大数量。我们向儿童呈现了诸如这样的问题:"能用其他方法做这件事吗""还有没有另外的办法"等。实验设置了五个情景。第一个情景是,在对于被试而言毫无困难的活动中,被试可以对材料进行自由组合。例如,孩子可能会被要求用他能够想到的尽可能多的方法来分割一个方块,用他认为合适的方法安排树与房屋,用各种各样的方法把三个小方块放置在一张卡纸上,用各种可能的方法连接两个点,或者用可拼接的小棍拼凑尽可能多的图形。第二个情景涉及用所有可能的方法去解决一些简单的实际问题。孩子们会被要求:在固定的点之间以相同的距离放置各种东西,用不同形状的建筑砖块建造"尽可能多"的建筑,给橡皮球装上"腿"让它们能够站立在地板上,向容器中放入轻重不一的物体来让其中的水位到达任何规定的高度,或者以恰当的方式放置方块以使它们暴露的表面达到最大。第三个情景中,儿童被要求画出一种图形,例如:三角形的不同形态。在第四个情景中,孩子们会得到一个图形的局部,他需要以不同的方法去完成全图。在第五个情景中,儿童被要求去发掘一个物体的多种不同用途,例如:一个圆规。

所有这些实验所得出的基本结论是,最年长和年幼孩子所能够创造出的可能性变量的数量有明显的区别。最年幼的孩子只能够设想出很少数量的可能性,并且在同一个任务中只能发展出非常单一的衍生性尝试,但是随着年龄的增长,儿童形成的替代方案的数量和多样性都呈现类似幂指数增长的趋势,所以11—12岁的孩子能够不由自主地言说几乎无穷多种可能性,这是有保障的。实验要求孩子们判断一辆玩具车在实验的房间内会有什么可能的行进线。最年幼的孩子只能够提出避开障碍物的直线路线,除非障碍物和路标被移开,否则他们不会改变路线。6—7岁的孩子提出了曲线和折线式的路线,虽然数量有限。然而,到了形式运算阶段的孩子则做出诸如此类的陈述:"你可以开得很远,或者很近,你可以在任何时候转弯,这是没有限制的。"在另一个实验中,孩子们被要求在卡纸上放置三个骰子,最年幼的孩子只会进行十分有限的常规布置,如果问他们可能的方法有十种、一百种、一千种,还是一百万种,他们会说"十种"。比较而言,一位11岁的女孩在没有提示的情况下会做出这样的回答:"如果你不断改变位置,或者如果你投掷这个骰子,就会有无限种方法。"在用不同的方法剪切一张纸的任务中,一个9岁的儿童在仅仅使用直线和曲线而产生了五种不同变化之后,他已经意识到可

以形成“成千上万”种新的方法。相应地，一个5岁的儿童从事同样的任务，他只用直线进行裁剪，并只能够设想出“大”“小”和“中等大小”的形状作为可能的选择；但是他还能够剪切出诸如房子等有意义的形状。其他同龄的儿童大多数能够剪出对通常而言具有典型代表性的图案，例如苹果、钥匙等，但他们不认为废弃的纸片也是他们自己创造出来的某种可能性。在一个实验中，当物体被屏风遮挡住一半时，儿童被要求去想象不可见部分的形状（可视部分被明确圈出或指示出），11—12岁的儿童回答道“那可以是任何形状”，而更年幼的儿童只能想到两三种可能性。

总之，在可能的解决方案事实上是无穷多的情境中，我们发现了被试表现出一个非常特别的发展阶段，并且界定这个阶段的年龄上限和下限。这个阶段性的发展不仅仅是因为儿童在不同材料的现实化形式中构想多种解决方案的能力增长了，更重要的是，儿童获得了这样一种能力，即，或直接或间接地推论可能性的无限性。这一发展的阶段在另外的方面也体现出长足的进步，它们是：关于那些可能的解决方案的数量有限问题，以及那些达成目标的手段有限的任务，巴蓓尔·英海尔德（Bärbel Inhelder）关于策略的研究也显示同样的结果（Inhelder，Sinclair，Bovet，1974）。在当前一个实验中，被试的任务是用棍子拼接三角形。值得注意的是，年幼一些的被试只会拼出等边或者等腰三角形，而年长一些的被试则能够拼出所有可能的比例和形状（参见后面关于“不可能与必然性”的讨论）。

因此，（我们面临的）基本的问题是要试着去解释这种可能性增殖的趋势，以及相伴随的另一个现象，即较年幼的儿童既无法实现甚至也不能构想新可能性的情况下，新的可能性却能够发生的现象。关于这个问题的回答，有两个因素是显而易见的——一是操作性结构的发展，以及另一个更特殊的是假设——演绎结构的专门性特征在11—12岁年龄阶段的发展。尽管这两个因素毫无疑问是具有建设性的，但是用来解释这个发展，它们两者都显得相当不充分。

至于一般性操作性（逻辑-算术的或空间的）结构，这些结构在前青春期儿童中是非常少见的，尽管它们的确在一定程度上赋予了儿童思维以一致性特征，从而满足内在的协调需求；但是我们很难断言这个过程的确发生了，即儿童因为可能性领域的发展而导致了思维的创造性成长。毫无疑问，这些结构的特定架构印证了一种自组织，它的规则适用于可能性的现实化加工。例如，如果主体将可能替代关系一般化而形成概念，那么这个操作过程包括了在一个更高级和更本质的结构，即“综合的整体”的形式中开启一种新的可能性。当然，这一类操作过程多半是无意识的。这里所涉及的是演绎性或结构性的可能性。它们在可能性的发展过程中起到了无可置疑的作用，但是它们解释不了在主体探索过程中体现出来的组合的多样性特征，也无法解释另一个谜题，即克拉帕雷德（Claparède）所说的“假设的生成”问题，尽管他对此作了仔细的分析。

另一方面，如果我们不仅仅关注被试所能够设想的可能性数量的增长，而是还关注每一个单独的实验所显示的，11—12岁年龄段儿童所表现出来的量的飞跃（同时伴随着

形式运算阶段的出现),那么很显然(我们会发现),可能性数量的激增和特殊操作结构的属性之间的联系形成了这个年龄阶段儿童的发展特征。事实上,有三个论据可以用来支持这一联系。第一,形式运算是假想-演绎的,也就是说,它们可以被适用于简单的假设,从这些假设中它们形成了无关乎初始命题对或错的逻辑结果。这种类型的假设完全属于可能性的领域,在这里,形式思维的任务就是在这些可能发生的可能性之间建构内在的必然联系。第二,形式运算建构了新的结构,诸如综合化整体,包括组合型结构,它们在可能性的增殖过程中毫无疑问起了极重要的作用。第三,正如巴蓓尔·英海尔德在另外一篇论文中写到的那样(Inhelder, Piaget, 1958),当处于形式运算阶段的被试遭遇到新的问题时,他们会列举出一个可能性假设的心理清单,只有这一步完成之后,他们才可能为了选择和使用正确的解决方法而做进一步的确认(例如,分离要素)。于是,我们可以形成这样的结论,在形式运算阶段,被试的加工过程开始于将现实注入可能性世界,而不是简单地从现实中推断可能性。很明显,这是这个年龄阶段可能性增长的另一个理由。

尽管在心里记忆并持存这些因素是很好的,但是它们和解决可能性增殖的问题并无多大关系——首先并且最重要的是,这种可能性增长的发生在儿童到达形式化运算年龄阶段之前就开始了。从4—5岁时开始,儿童已经在寻找新的可能性,从这时开始直到11—12岁,可能性的数量在持续增长,因此,最后一个出现的飞跃是之前所发生的一切的结果,当然,不是它的原因。其次,虽然形式运算开始于演绎推理的形成(也就是,必然性推理),这种演绎推理基于仅仅关注可能性的假设,并且儿童不再需要(这种需要从7岁时开始)以具体的事实和物质性客体作为基础来支持他的思维,余下的事实便是:这种假设可能性本身并不是这种思维的新的推理模式的产物。形式运算只不过是通过一种新的方式去利用了这些假设,并且增加了它们的数量:它们并没有创造可能性的概念。事实上,从感知运动阶段开始,在孩子们的活动之中就已经内隐地区分了可能和不可能,并且不需要进一步的概念化作为支持:例如,儿童会抓近处的物体(可能),但是不会去尝试抓取够不到的物体(不可能)。

于是,一个特别的问题摆在我们面前了——主体所表现出来的可能性的增长开始于感知运动阶段,并一直延续到形式运算阶段。讨论操作结构的精细化进步不能解释这个问题,幸运的是,这一事实并不意味着我们一定违背了早期的理论构想。事实上,在关于提供解决方案的问题上,操作结构将起到必然的,尽管也是部分的作用。通过考虑新的维度以及补充的组织化形式从而尽量维持那样的阐述将是非常必要的。

首先,三种类型的格式一定要被区分开。第一种类型可以被叫作表象格式(presentative schemata)。这种格式起源于可参照物体的永久性和同时性特征。表征性格式(representational schemata)或概念(例如"方块""猫"等)是这个范畴的主要成员,它被称为"表象的"是因为它包含了很多感知运动的格式。例如,婴儿即使在他还没有摇晃物体时也能辨认出一个物体被绳子悬挂起来了,或者儿童会知道物体在很远的地方

即使他并不准备要去抓住它。表象格式的第二个属性是它们区别于现实情景的一般化和抽象化特征。第三个属性是它们依然保持了其独立性，即使当它们被纳入到更大的概念中时，例如，当"猫"这一概念被纳入到"动物"这一大类概念之中。

第二种格式叫程序格式(procedural schemata)。它包含了一个指向目标实现的活动序列。这些活动序列的特征是"预导性"(precursivity)，也就是，是指向事件未来状态的趋势引导了初始活动的发生。这种格式很难和它们的存在情境分离，因为它们的每一个细节都被定义在特殊的和异质性的情景中。另外，它们的存在期限是有限的，因为，如果是由目标决定了存在意义(1,2,3…N)，那么当后一个的因素开始起作用时，这个集合中的第一个因素就失去了它存在的目的和理由。毫无疑问，只有在表象重构时，这些格式的激活(evocation)才会倾向于维持过往的因素。

第三种模式是操作格式(operational schemata)。它们在某种意义上是程序性的，但是和程序格式的区别在于它们依赖于规则性和一般化意义(或者操作)的使用。进一步，它们组合的结构(类别、系列等)是以表象为特征的(包括感知运动的替代群)。因此操作格式加强了表象性和程序格式的综合。(注意：很重要的是，不要将这种综合与主体处于感知运动水平时对这两种格式缺乏区分的状态相混淆。)

现在，几种格式之间的区别已经体现出来了，一是在认知机制的领域内区分两大系统的识别标志的位置。这两个系统是互补的，但是它们的功能不同：第一个(系统Ⅰ)旨在理解所有的物理和逻辑——数学的实在，而第二个(系统Ⅱ)是在所有领域中的形成序列(successes)的关键，从最简单的动作到最抽象的问题解决。于是，系统Ⅰ是由表象格式和操作格式作为结构性实体而构成的。表象格式不会总是独立的，而是会结合成为类别(比如，概念)、系列(比如，非对称性传递关系)等。换句话来说，它们整合成了各种各样的操作性群，包括亚逻辑群和空间群。

相应地，系统Ⅱ(序列)则聚集了所有的程序格式并将它们与操作格式整合为目标导向的转换性操作(问题解决)。在关系到可能性发展的问题情景中，很重要的是，要理解程序格式也是自协调的，并且它们构成了一个属于自己的系统，当然它们与系统Ⅰ中所采纳的程序格式具有不同的意义和不同的形式。通常这样的发展更难以实现，因为程序格式不得不被从它们所在的情景中部分地分离出来。其含义包括了方法的一致性和转换过程中的本质构成，这实际上激励了新程序的形成，这些新程序形成是通过与那些在其他情况下有效率地起作用的程序相对比来实现的。正如之前我们已经发现的，这种程序性的转换在主体意识到它之前就已经发生了，因此助力了系统Ⅱ的建构，尽管是以一种晦涩并低效的方式，并且没有包含控制系统Ⅰ的建立的自组织化过程，尤其是对操作性结构的建立。至此，人们终于可以理解可能性发端早期的延滞现象的原因了。

这些存在于关于可能性的考量和问题之间的联系应该真正地向读者阐述清楚。与"现实"不同，现实是由表象格式和操作格式结构性特征所构成的实体(通过系统Ⅰ)，新"可能性"的形成则依赖于两个前提。第一个是这个方面之间的自由联合的确立，一方

面是一个未解决问题的给定条件或情景,另一方面是解决这个问题的尝试中所运用的程序或探索方法。这样的联合在任何程度上都可能是系统性的或者随机性的,并且不排除采用探索性的或尝试错误的战略。这里所说的联合与联合式正式结构没有关系,它是一种更高级运算的特例。第二个前提是,在这些联合构成了一个选择以更正错误。这样的选择被两个方面的考量所掌控:(1)评估已经尝试过的程序所形成的结果;(2)评估那些已经被组织起来的表象的和操作的格式(系统Ⅰ),以及那些已经尝试过的程序格式,因为已经尝试过所以易于转化(作为内源性选择资源的系统Ⅱ)。

简而言之,新可能性的发展过程基本上可以被归于程序性系统之下,即系统Ⅱ。这是很自然的,因为任何的程序都建立在确信可能性成功实现的基础上,而用来修正或改善这些程序的管理规则都被设计来改善行为本身,于是这就导致了在其他多种可能的程序之中一种被现实化。在这个问题上,考察关于错误的可能性的问题可能会有积极效果。本章开头提到的五种实验中,在好几个实验中所有的联合都为问题集合提供了一个可接受的解决途径(正如已经强调过的那样,11—12岁的儿童可以认识可能性的无限性);然而在其他实验中,错误则是常有的。因此,错误的特征一定要得到明证,因为即使在系统Ⅰ中它也可能仅仅被作为一个"意外"而不予理会,在系统Ⅱ中,它在多种可能性中构成一个"可能性"的过程中起了重要的作用。明证甚至是更本质的,因为这个系统专门性的特征是,一般化的替代关系(可替代性)以及活动的平衡化(和平衡相对应)。这些属性应该被强调,因为它们代表了处于认知功能领域中的可能性的一般性意义。

似乎很清楚的是,系统Ⅱ,以及一般性程序一定会因为它们的转换性特征而必然地被区别出来,因为任何的程序都指向一个目标,一旦目标实现了,这个程序就被剥夺了它的效用以及它继续作为一个程序而存在的意义。所发生的是,结果,也就是到目前为止一直被当作目标的东西,现在却成了表象格式,而程序则在随后的情景中引起了心理重构(包括记忆,以及关于成功实现目标的原因的理解等),并获得了一种新的表象特征而成了思维的概念化对象。事实上,它甚至获得了一种表征性的特征,感知运动阶段的重构只是简单的重复或初级的一般化,还不是表征。程序的协调而产生的进步(通过转换,简单的规则,以及关于规则的管理,等等)引导了操作性程序的形成方向。这个问题有两个方面的含义需要被考察。一方面,我们将操作看作是时间性活动(例如,将两个类别联合成为一个整体的类别),而这样的操作一旦启动,同时也就不存在了。另一方面,我们将操作看作一个概念(U或+,等等),在这个意义上它获得了"表象"的特征(系统Ⅰ)并且因此成了结构的一个独立部分。简而言之,系统Ⅱ从来不是平衡的,而这正是它的基本出发点。现在看来这的确是一个富有成效的特征,因为这个持续更新的特征才能够让它适合于担当再平衡化工具之职。任何达成目标的努力,例如,解决问题,都是补救缺失的尝试,为的是消除分歧并建立新的平衡,当目标达成或者问题解决了,新的平衡就实现了。通常说来,新可能性的出现相当于从一个事件的给定状态朝着新的现实方向发生的超越,这个过程充满了可能的现实化,进而达到了更好的概念性平

衡。于是，这个发生过程的典型的特征是，它伴随性地出现在认知的再平衡阶段中。

现在让我们回到错误的问题，与在系统Ⅰ中所扮演的角色相比，显然错误在一个诸如系统Ⅱ的系统中起着十分不同的作用，它作为组织化和结构化的主体，其中一项功能便是启发式探索(heuristic)。就创造性而言，一个适当的错误可能比即刻的成功更加具有产生性，因为比较错误前提与结果会产生新的知识，而错误和错误的对比会培育出想法。举一个高等数学领域内的例子庞加莱(Poincaré，1905)一开始努力论证一个理论不可能为真，但是它的真实性随后被证明是他最伟大的发现之一。通常说来，如果命题p为假，那么命题非-p就为真；当p被证明为假，这个发现本身就成了真实判断的元陈述。

相互连接的并执行成功的程序的全部组群构成了系统Ⅱ，这个组群在形成正确观念的同时也带来了可能的错误，因为“击中或漏报”的策略和错误的转换等是其方法运作固有的缺陷。从纯粹理论的观点来看，这种由可能性引起的、在逻辑上是必然嵌入的错误其实是具有高度建设性的；在理论层面上，一个人必须要在两种认识论之间做出选择，一种是所有预成论的认识论，另一种是建构主义认识论，建构主义认识论把新可能性的发生看作是在“演进”(becoming)过程中关于新的事物或事件的创造性活动。这种观点实际上表明新可能性问题不可能作为数学联合系统的基础，因为这样的系统只能够应对稳定的、拥有表象性特征的格式，然而错误是不可预测也无法量化评估的。于是，可能性既不是预成的也不可能被预先决定；它们只是被探索性活动“预置了导向性”(pre-oriented)，这种探索性活动的目标是在更高或更低级的水平上带来改良。预成论缺乏逻辑上的一致性，一个典型的例子是伯特兰·罗素在他早年信奉柏拉图主义时期的论点。罗素清楚地看到了问题所在，并勇敢地断言：如果“观念”是不朽的，那么错误观念的地位一定与正确观念的地位等同(同样地，有白玫瑰的存在也就有红玫瑰的存在)。随后他又承认这个论点是荒谬的。我们承认，我们是为了服务于自己的目标而形成了这样的结论，即基于自我规范观念的建构主义认识论是正确的。在这样的情况下，错误的可能性可以被看作是一个例子，以表明否定性和断言性控制的困难。

把错误置于“可能性”的标题之下有另一个理论性优势。它强调了一个事实，如果系统Ⅱ最终导致了系统Ⅰ的增强，尤其是其逻辑数学结构群的增强，那么这个系统的策源、新程序的运行、新可能性的出现等，就可以与生物学中所观察到的现象进行类比。于是，生成可能性的问题和程序联合就可以类比于基因的“重组”；其相伴随的选择则可以类比于外因(源于外部世界的操作)和内因(源于内部和表观遗传学领域的操作)之间的选择；错误可以类比于致死或仅仅是有害的突变或变异。

现在我们可以通过区别四种不同的可能性来形成这一节的结论。基本的类型是假设可能性。它包含了产生式错误和成功预期观念的结合。第二种类型是可现实的可能性，既包括在选择之后能有效地现实化的可能性，也包括对现实化程度做出正确评估的可能性(即使这种现实化的可能被认为是“无穷大”的时候)。下一种是演绎的可能性，其中的内在变量可以从操作性结构中推论得来。最后，我们打算说说可得性可能性(可

实现的可能性),它属于这样一种情况,主体认为他能够且应该将结构一般化,却不需要知道一般化的程序。

不可能和必然

在这一节我们讨论正在进行的关于不可能和必然性的研究。这两个概念十分类似:一个必然性命题 p 和其否定命题 $\bar{p}$ 的不可能是等价的。从实践的观点来看,询问孩子不可能要比询问必然性容易,因为必然性的观念倾向于在口头层面的理解。

现有关于"可能性"的研究已经形成了一些关于"不可能"的认识,乃至让我们能够区分不同类型的必然性。在考察不可能时我们需要分辨一些有用的类型。第一种是主观的不可能或"非-不可能",其时主体对某事做出不可能判断,但他的判断是错误的。第二种是逻辑不可能,或者叫必然性否定。第三种是物理法则的不可能,它是通过演绎的方式而形成的。最后一种是物理经验的不可能,它通常来源于可以被反证的情景,所以它非常适合于我们的研究目的。

主观的不可能,它是所谓"非-必然"的正面对应形式,有两个原因使得它很重要。第一,它让我们得到许多关于必然性的资源。第二,它和我们的可能性理论本身相关,因为它强加了可能性的主观性限制,也就是所有增加的限制都是来自可能性的主观性。我们可以引用两个可能性的例子来说明这一点。年幼被试所想象的三角形是等边的,它的底边一定是和桌子的边缘平行的。当这些条件并不满足时,他就会体验到不可能:其他任何图形都不是三角形。同样,一个正方形应该有两条边处于水平位置才能被识别为正方形:如果它只用一个角竖立起来就"不成为正方形"了。事实上,将这样放置的正方形看作菱形是如此强的观念,以至于它的四条边会被看作是不相等的——只有相对的两条边被看成是等长的。

在这样的"非不可能"或"非必然性"之中,我们能够区别出两种反应,尽管它们实际上是不可分的并且在某种程度上是逻辑性依存的。第一种反应合并了习惯和必然性:一个三角形或者正方形通常都是以底边处于水平位置的方式呈现,这就诱发了一种必然性属性的观念,任何否定和忽略它的方式就会被认为是不可能。第二种反应不区分事实与规范。如果一个事件"是这样的",主体就断定它"只能是这样的",即认为事件的发生总是基于某种义务,同时也具有了逻辑的和价值的负载。在这种例子中,"主观性的不可能"的反应总是会发生,而无论针对的任务是什么,也无论询问的方式是"不是你所做的"还是"不依规则而做"。一般情况下,这样的"不可能性"没有经过儿童反思就被排除了,更确切地说,它们被剥夺了进入"可能"领域的权利。

对儿童而言,当最初的新可能性的发生过程开始时,这样的排除可以非常有效地启发所观察到的困难。由于它们的新颖性,这些可能性发生侵入了非-不可能的禁区,或者(其实是同样的)它们突破了非-必然性的藩篱。也就是说,在这一点上,新可能性发生所遭遇的困难并不完全是因为新事物难以想象这个事实,也包括来自儿童把动机性

的新可能性想象为固化现实的阻力。就此而论，可能性的增加看似会带来成功的喜悦，但是也包括了在过去已经建立起来的种种限制之上所作的艰苦努力。

为了阐明这个逐渐清除发展障碍并征服可能性的过程，我们要考察众多实验中的一个——在实验情景中，被试的任务是把一张方形的纸片剪切成许多片，然后把它们拼接成另一个方形。年龄较小的被试剪切出了有意义的形状（苹果、房屋等等）并且忽略剪切剩下的纸片同样也有"纸片"的功能。当然，与这种非-不可能相关的是那些被剪下的规则形状的纸片被忽视。在第二个阶段，被试意识到重点是要把纸片切分成许多小块儿，就开始将纸片精确地对半剪切，然后再均匀地对半剪切，接着沿对角线剪切一到两次，也总是对称的。然后，儿童打破了对称性的限制，开始随意地剪切，但依然限于沿直线剪切。有时这种限制也会被突破，被试开始使用少量的曲线，然后是随机的变形、折线等等。这时就可以看到发展性的进步开始了。最初，被试拒绝将从有形轮廓上剪下来的部分看作"纸片"，我们可以看出这显然是非-不可能的影响。随后，可能性持续地增长，而限制一个接一个地被排除；表面上看起来主观不可能性就这样消失了。然而事实上，这种不可能性依然内隐地存在，而不再是以拒绝的形式来显示它们的存在，例如最开始时儿童拒绝将剪下来的纸片作为考虑对象，它们现在的影响体现在儿童缺乏对新形状的想象力。

简而言之，主观不可能性和非-不可能性作为一种反应有很重要的意义，影响着我们关于可能性增殖发展以及确立"必然性"等整个进程的理解。这样的反应可能仅仅被描述为一种对现实的过高估计，或者给予事件——既是特殊的，也因而是受限制的——的实际状态以现实的特征，这种现实的特征只能被理解为一般性的和必然的（源自"非-不可能性"），或者更简单地说，当前的现实是唯一可能的一种，并因此而限制任何新可能性的出现。同样，正是因为这并不足道，所以在伪-不可能性的一般性条目之下，人们可以将它当作是"非-矛盾"特殊例子，"非-矛盾"已经被研究过了（Piaget，1974）。例如，"如果B比C小，它就不会比A大，因为它是小的"——这就是不协调的匹配先于经验性的序列。特别要强调的是，否定的非-不可能性和非-矛盾，不会产生必要性，只会带来新的可能性。

现在让我们把注意力转向逻辑不可能性，将会发现非常不一样的情景，逻辑不可能性是对必然性的否定。以下是三个例子。在剪纸片的实验中已经提到过，第一阶段的儿童相信，剪N次他就可以得到N张纸片；当只剪切一次时，正如前面所提到的那样，他会只注意一张纸片，忽略另一张。如果让他剪出三张纸片，他会剪切三次，但是不理解为什么最后会得到四张纸片。但是，被试早晚会发现，N次剪切不可能得到N张纸片，这会引导他们发现N次剪切→（N+1）张纸片。在三角形实验中，被试最后会发现，用长度为A >（B+C）的三根棍子无法搭成三角形，因为图形不能封闭。因此，他会推断必然性是$A<(B+C)$或$B<(A+C)$。在玩具车的可能路线的实验中，实验者规定不能有倒退的路线，孩子会断定后退的路线就是不可能性。因此，在这样真实的不可能性中，有一

种因素促进了可能性的发现，或者某种程度上限定了可能性。

物理的不可能性有两种。第一种是从简单的观察事实中推理得到的，例如，儿童可以理解如果最高处的物体没有放置平衡，那么整个一堆积木是不能维持平衡的，即使他还不能详细解释平衡的原理。第二种类型可以阐述如下：被试很快会意识到，一把平衡于桌子边缘的尺子如果悬空超过一半的长度就无法维持稳定的状态，并且他还可以用相对重量的词汇来解释这个事实，因此在进行有关正向和反转操作的分析时，他会把这些现象归因于物理客体的关系。因此，源于规则的物理不可能性不只是经验性的，即依赖于“将现实插入”操作框架之中，并且也是逻辑-数学的不可能性和必然性。

必然

这一章的第三部分是围绕必然性问题的讨论。由于这些问题和可能性、不可能性的问题有密切联系，所以在这里需要概述它们的来龙去脉。我们最初的假设是，从必然性到非必然性之间不是简单的二分法的关系，而是必然性作为一种功能所体现出来的程度上的变化，而这里的功能是指平衡的或强或弱的形式，正如当今的数学家会依据结构的相对“力量”对必然性做出界定。

如果我们将必然性和非必然性看作两个极端，那么其构成不外乎两个方面，一方面是才描述过的非-必然性，另一方面则是正式的假设-演绎思维，这种思维可以让11—12岁的被试能够在纯粹的可能性(包括被认为是错误的假设)和必然性关系之间建立联系。于是人们立刻就意识到，一定可以找到某种中间形式。

应该强调的是，在它们发展的最初阶段，非-必然性不是由必然性关系带来的唯一形式。儿童早期，主体就能够察觉确定性关系并正确地将它们判断为必然性，但是这种必然性在某种程度上类似于非-必然性。在可直接观察的例子中，处于这种类型的关系之中的是拓扑学的包含关系：如果A包含于B，B包含于C，那么A一定也包含于C。正如非-必然性那样，事情的真实状态似乎无法从一种“一定是这样”的想法中被区别出来，这种想法源于一种强制性联结，类似于意义属性的自然延伸(这里的联结发生在谓语属性中，而不是在命题中)，所以看起来这似乎是可能的，即这些空间包含关系的组合——A包含于B并且$(A+B)$包含于C——是通过关于事件状态的直接“知觉”而获得的，不依赖于推理。于是，人们就被引向考察事件的最初状态，将它看作一个混合体，在其中，事实、必然性和不可能性(在最简单的层面上来看：是那些我们期待发生的事情)是很难区分的，它们之间的联结会根据情况的变化而有不同，无论它们的特征是静态的还是变化的。

只有当主体到达转化的阶段，这三种模式才会被明显地区分开。一种状态只能在这种条件下是真实的：在这些状态之间一致性的建立当然需要由主体所表现出来活动的支持，但是这个活动不会改变状态本身。相应地，转化则能够：(1)仅仅被指出(描述，以及其他)，比如事实；(2)被引起(预测，以及其他)为新的发展；或者(3)被构成(或被

解释——但是此处的解释无论如何都是假设性的论述)。如果转化的产物是我们在"可能"一节临近结尾处区分出来四种可能性之中的某一种的功能,那么,转化的构成就是必然性的起源。一个事实自身永远不会是必然的,并且必然性的关系在可能性之间只能是构成的结果。在某种程度上说转化就是可能性的简单叠加,这些可能性是它们的资源,并且它们都是由必然性构成的,因此我们不会感到奇怪的是必然性的发展与可能性的发展是携手并进的。这样的进展一开始的表现是很弱的并且是局部性的;接下来系统建立起来了,尽管还很有限;最后,我们会见证一个爆炸性的整体性发展,伴随着假设-演绎结构的建立。

在前运算水平(preoperation level)上,新可能性的产生似乎受到了抑制,人们会发现必然性关系的发展也是一样,虽然这个阶段中的发展也显示出了一定数量的问题。其中一个问题聚焦于推论的必然性与那些看起来是必然性形式的东西之间的界限,这种看起来像必然性形式的东西是一种建立在构成(composition)基础之上的必然性,没有这种构成在现实层面上就不会有必然性,这种必然性的发展外在于简单的解释,诸如非-必然性。例如,让我们来看这个实验,儿童用一只手把一颗珠子装进透明罐子A中,用另一只手把另一颗珠子装进不透明罐子B中。在这样的情况下,所有的被试都认可A中的珠子数量n和B中的珠子数量n'等同,但是让他们预测$n+x$是否会等同于$n'+x'$时,最年幼的儿童会否定("让我们先看看吧"),然而,超过五岁半的儿童中有一部分表现出了重复必然性:"一开始发生过的以后会一直发生。"显然,这些更年长的儿童在这种例子中通过构成(composition)而获得了必然性。令人惊讶的是,同样是这些被试,在其他场合却没有显示出他们掌握了数量守恒定律:在一项测试中,桌子上安放着一套可见的筹码,儿童却无法用守恒来规范他们的构成活动。在这里明显地发生的事情是推论必然性的最初的知觉阶段的发生,但这依然是一种被定位于,以及被限制在一个情景之中的必然性:我们的被试在罐子实验中显示出了进步,但是在筹码实验中却没有。人们应该怎么界定被试的这种特征,他们可以用完整的行动来表达事实$n+x=n'+x'$,但却不能预测它的重复?目前尚不明确的是,这种反应是否表达了更早些时候活动的真实构成,或者它仅仅是某种对事实的解释,这种事实类似于那些包含于非-必然性之中的问题。

在空间的和物理的领域内,因为之前已经提到的道德强制性和因果必然性之间的混淆,使得这个问题变得更加复杂。如果我们询问一个小男孩:"为什么月光只有晚上才有,白天没有?"他的回答是"因为白天不该月亮管"。无法区别物理的和道德的法则是一项指标,它表达了人在这两者之间划清界限的困难,一个是通过活动的构成来理解必然性,另一个是依然保留了非-必然性"知觉"特征反应模式。在另一个实验中,被试可以做规则性推论,拉绳索A,绳索B就会变短,进行这样的推论所需要的功能的发展过程中,我们能够辨认出三个水平。在第一水平上,被试假设在A和B长度之间存在一个简单的协变量。在第二水平,他们会理解B的长度是A的长度的函数。在第三个水平,他们将这个事实进行了概念化描述:除了B对A的依赖之外,$A+B$的总长度是恒定的。

于是,可以明确的是,协变量独立地被理解是通过了合法的推论,这样的推论中没有包含必然性,而依赖于恒常性(7—8岁儿童)的知觉则是通过恒常性而实现必然性的一个例子。我们如何解释这一现象,即儿童已经有能力去发现依存的事实,却还没有理解恒常性的能力(5—6岁的儿童)? 在这一点上所有能说的就是,必然性有多个层次,正如可能性发展进程中存在不同级别,也正如在经验性不可能性到规则性物理不可能性之间存在着中间水平。此外,必然性的知觉增长的速率是其所涉及的结构相对强度的函数。

如果做一些限制,那么第一个真正的必然性形式的出现是伴随着第一个基本的结构性能力而出现的,就像"群化"——在它们的构成中具有一定程度的闭合性——包括了诸如传递性、循环性、交换性、定量性以及包含性等,并且所有的构成对于各种"群化"而言也是特殊的。对于必然性关系的延展有一种系统性的限制,于是,关于它们的构想只能存在于包含了具体要素的范围内,也就是,诸如客体,断言以及关系等都应该是可以直接观察的。于是,特别是在假设性命题被视为假,以及在假设性命题的必然性依存关系被用来证明它们为假的情景中,必然性关系也不会被看作是假设性命题之间的约束。

在讨论因果关系时,我们希望通过它表达的是解释或模式,它们将必然性的质量分配到规则性关系的内容中,当我们在描述或解释规则时,我们假设,在这种情况下主体将自身的运算(operation)"归属"(attribute)于对象并进而把它们当作"算子"(operators),于是这就不单单是一个将运算"运用于"现实的问题。这时我们的想法是,必然性源于主体的运算的构成或协调,而现实作为必然性关系所在地的情况只在这样的因果性"归属"(attribution)第一次发生时才可能。

当适用于形式运算阶段时,我们的解释就更加明了。在言语性表达的假设中,演绎必然性就可以被一般化了:现实被投入一个可能性的一统之中,这些可能性因为被必然性联结起来而变得敏感。作为结果,人们在这个阶段中看到了(儿童的)因果性解释和逻辑-数学推理(能力)的惊人发展。

结论

在结论中,我们简要地回顾两个问题。第一个是关于"真实"的发展,因为在认知"事实"整体的意义上,它关联到可能性和必然性的发展。第二个问题是在"可能性"中的"必然性"关系所独享的显著地位。

关于第一个问题,我们通过转化的特有的存在属性,了解到它们是可能性的资源,并且通过它们对构成属性的影响,了解到它们同样也是必然性发展过程中的形式化因素。真实性的转化不应该从这个规定性中被排除,正如我们前面所说,因为主体具有了逻辑-数学运算能力,以及最根本的空间运算能力,所以这些转化才能被理解。于是,转化的双重角色衍生出了两个平行的设定,即可能性的生长和必然性知觉的发展。然而,

在全部的这些意义中，真实的命运依然是被决定的，这些意义既有包含对应于每一个心理发展阶段的那种现实性，又有不断被科学所揭示的现实性。

在这两个领域内，有一个一般性结论似乎在变得越来越不可避免。这就是，随处可见的“状态”似乎正在变成转化的附庸。换句话说，转化就像是知识的密匙。很久以前巴歇拉尔(Bachelard，1949)曾经说过“如果你告诉我你转化了什么，那么我就能够告诉你你是什么”。如果人们接受这个结论，并且以上叙述的是正确的，那么，真实性，尽管它非常广泛并且随着发现——这种发现可能来自儿童发展也可能来自科学研究——的深入还在不断地延伸，一定会越来越整合它的两极，即可能性和必然性。更确切地说，这两个领域的交叉会越来越多。在任何意义上这都不会简化真实性；相反，其结果是使得真实大大增益。一方面，对真实性的转化形成了一个可能转化的领域，只有那些已经被“现实化”的可能性才可能被放进真实性的概念中。另一方面，这些转化的构成形成了必然性，尽管这不会让它们离开真实的范围。因此，关于真实性的知识在这两个领域中不断地被完善，这个事实使得这样的知识不会被轻易地简化到预成论学说的术语中。反之，正如已经指出的那样，建构主义却做好了准备，以应对全部真实的“事实”本身，以及主体关于这些事实的频繁重构，这样的重构是可能性和必然性两个领域的功能。

这个问题的矛盾在于这样一个事实，可能性和必然性并不是独立地作用于真实，而是互相关联的。这给我们带来了第二个问题：为了发现真实中的必然性关系，为什么真实必须首先被整合到可能性的系统中？答案是很简单的，在一个转化能被知觉为必然性之前，它必须要和其他的转化一道先进入构成(composition)。通过这样的方式，它就被定位为结构的内在变化的特殊形态；换句话说，它被定位于“演绎可能性”之中。于是，一系列罗列于“可能”清单中的各种可能性变化形式，已经表现出在可能性和必然性之间逐渐增长的合并趋势。这样的合并是不可避免的，因为起源于转化的增殖和协调中的全部可能性模式，也就是起源于知识的基本工具。总的来说，相信关于发展过程的一般特征我们已经解释清楚了(虽然我们还需要更细致地考察必然性的类型)，这个发展过程大致有三个阶段：第一个是无差别阶段，在这个阶段，真实体现为伪-必然性而同时可能性则被限定在最容易预测的发展趋势之中；第二个是区别化阶段，其中，可能性和必然性都被从简单的“事实”中分离出来，也就是形成了现实化的状态或者转化，它们会在数量上逐渐增加，并且开始以某些方式改善“真实”；最后一个阶段是整合化阶段，在其中，可能性、附属必然性和结构性真实形成综合。

文献总汇

Bachelard, G. 1949. *Le Rationalisme Appliqué*. Paris.

Inhelder, B., and Piaget, J. 1958. *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*. New York: Basic Books, Inc.

Inhelder, B., Sinclair, H., and Bovet, M. 1974. *Learning and the Development of Cognition*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Piaget, J. 1974. "Recherches sur la Contradiction." Études d' Épistémologie Génétique, Vols. XXXI and XXXII. Paris: Presses Universitaires de France.

Poincaré, J. H. 1905. "La Baleur de la Science." Translated by G. B. Halsted, 1907: *The Value of Science*. London.

论必然性

〔瑞士〕让·皮亚杰 著
查抒佚 译

论必然性

Essai sur la Nécessité

作　者　Jean Piaget
原载于*Archives de Psychologie,* 1977 , 45, pp.235–251.

Essay on Necessity

英译者　Leslie Smith, Francoise Steel
原载于*Human Development* ，1986 , 29 , pp.301–314.

查抒佚　译自英文

内容提要

1981年皮亚杰编辑出版了《可能性与必然性》的第一部分，1983年由英海尔德编辑出版了这本书的第二部分。在这两部分中，皮亚杰描述了新可能性的产生、导致“必然之感”的封闭结构的形成是如何从一个阶段到另一个阶段发展的。1986年，皮亚杰再次就必然性的发展及其与运算结构的关系问题撰写此文。

文章之初，皮亚杰即指出“必然性被认为与主体格式的解释相关，它产生自一种心理发生观”。必然性不是一个可观察的变量，它常常是主体内在结构的结果。如果必然性关系可以称作“状态”，那么它们也不过是一个无尽过程中的各个阶段，必须考虑其内在动力。所谓无尽，指的是一个新的必然性产生自前期的可能性，并转而产生新的可能性，而新的可能性的获得也产生于前期必然性的框架之中，并引起后期必然性的形成，二者的演变共同“构成决定运算结构之形成的总体框架”。

接着，文章围绕着“必然性的形成中，后一阶段是否有强度上的发展，而不只是必然性关系数量的增长”以及“必然性是否总是运算结构固有成分的结果，或者必然性是否与可能性一起决定运算结构的形成”两个问题进行了论述。针对第一个问题，皮亚杰的观点是在必然性的发展阶段中允许存在更强的结构，并且这些结构成为新的必然性的来源或结果。新的必然性具备更高的整合力，以及由此而来的更复杂、更具预示性的蕴涵。针对第二个问题，也是核心的问题，皮亚杰将必然性的基本形式回溯到主体产生的第一个“预示蕴涵”上。预示蕴涵的形成早于运算结构的形成，它是一种格式-协调工具，表现了获得的意义之间的关系，以及格式之间最原始的协调关系。比如儿童会拖动纸板以拿到置于纸板之上的物体，但当物体不在纸板上时儿童则不会做出拖动纸板的动作来帮助自己取到物体，“置于其上”就处于儿童对蕴涵的“原因”的理解范围内，这构成了必然性关系的来源。

皮亚杰还在文章中指出，现实世界提供的规律虽然具有普适性，但或多或少是缺乏必然性的。但是，即使是在伪必然性中也存在一个真必然性的起点。主体有能力凭借“规范的”活动（例如在演绎、反省抽象基础上的建构活动）生成比由现实提供内容的形式更多的形式。必然性的不同形式总是与“成为必然性的建构”有关。最后，皮亚杰指出了一个仍需确定的问题，即确定必然性的内在动力机制。

查抒佚

论必然性

摘要[①]：必然性被认为与主体格式的解释相关，它产生自一种心理发生的观点，包括多次提到的科学思想史。必然性的形成阶段平行于“可能性”的形成阶段，在心理发生期间每个阶段均为另一个阶段提供相互支持，这可以被解释为一种接近（新的可能性）与闭合（在作为必然性之基础的系统中）的交替。此外，必然性的力量随其发展阶段而增强，必然性的演变与“可能性”的演变一起，构成了决定运算结构之形成的总体框架。

一、与可能性（possible）相对，[②]必然性（necessary）与主体的活动有关。如果P的必然性被定义为非P的不可能性，那么在心理发生（psycho-genesis）或科学史的某个特定水平上的不可能可以在其后的水平上成为可能。于是较早前的关系被证明是可追溯的“伪必然性（pseudo-necessities）”或“伪不可能性（pseudo-impossibilities）”。即使P的必然性是由非P衍推而来的矛盾所定义的，这些矛盾后来也可能被消除，甚至相反地，P可以在某个系统中引起矛盾，尽管它在另外一些系统中是必然的。此外，如果“可能性”表现了发生（genesis）的起始性特征，以（*qua*）区别于起始状态，那么“必然性”就不再比预设的可能性更具先验性（*a priori*）。“必然性”在整个结构中得到了详尽的阐述，最终只实现了对一个或多或少封闭的系统之典型特征的综合表达，然而这只是初级的。但正如没有绝对的起始那样，因为每个发生都取决于先前的发展，在绝对（最终）意义上二者都不存在终结。所有的必然性都依“原因”而定（皮亚杰，2006），而这些原因无论多么合理，都需要更深层次的对应。即使是在那些现代形式逻辑所依赖的纯粹的公理化中，“我们从未面对一种已最终确定或可设想的形式。每时每刻，我们都处于一个向着形式靠近的上升运动中”，正如拉德里埃（Ladrière）所解释的那样（1973，第55–56页），“因此向着形式的上升并没有可指定的术语”。

---

① 由莱斯利·史密斯（Leslie Smith）和弗朗索瓦丝·斯蒂尔（Françoise Steel）翻译为英文并得到了*Archives de Psychologie*（皮亚杰，1977b）的授权出版。

② 表达语*le possible*被译为“the possible（可能性）”，应理解为“那是可能的”。皮亚杰用这两种同样的表达时既有加了引号的也有没加引号的。有时候也会用到复数形式*les possibles*，在此译为“whatever are possible（诸如此类的可能性）”。最后，名词*la possibilité*同样也用于单数和复数形式中。以上翻译反映了皮亚杰的习惯用法。和*l'observable*一样的，类似见解适用于其他模型概念。

总之，必然性不是一个可观察量，引发对客体的解读。[①]必然性常常是主体内在结构的结果。如果可以将必然性关系称作“状态”，那么它们也不过是一个无尽过程中的各个阶段，必须考虑其自身的内在动力。由此引起了人们对它在心理发生过程中的形成（formation）的研究兴趣。我们从一开始就注意到，研究存在着双重兴趣，在此方面观察到的阶段原来是与那些具有“可能性”发展特征的阶段相平行的。于是产生了这两种形态间的渐进交互作用。正是这种合成产生了运算结构。

事实上，我们已经能够区分出可能性的三大阶段（皮亚杰，1976b）：类比连续性（analogical succession）、有限的共同可能性（limited co-possibilities）和无限的共同可能性（unlimited co-possibilities）。同样地，我们在必然性的演进过程中发现了下述三个时期。在前运算水平上，产生了连续的可能性（contiguous possibles）。这些连续的可能性被视为必然性的集群（clusters），它们是局部的且不受稳定系统的约束（虽然它们出现于与概念化相反的感知运动水平阶段的某些特定点）。在具体运算水平（尤其是在群集结构的中心），“有限的共同必然性”的群系（formation）产生了。“co-”这个前缀确定了关系的存在（正如逆运算与守恒之间的关系）以及由于结构上的贫乏所带来的限制性特征，结构上的贫乏导致结构仍然从属于其内容。相比之下，在假设演绎的运算水平上，共同必然性获得无限性这一特征是出于两个原因。首先，主体可以从虚无假设中得出必然性结果，正如从真实假设中得出的那样。其次，主体开始能够根据初始运算来构建新的运算，由此获得越来越强的必然性。还有一个更深层的原因在于，在第三阶段可能性所具有的无限性特征源自于将状态 A 与另一状态 B 结合起来的连续变量这一概念。现在这些变量表达了群系的系统规律，这些规律也因此从属于必然性的整合。所以在此情况下无限的共同可能性通过必然性得以产生，正如后者已通过共同可能性的发展令其自身的无限形式成为可能。

总之，一个新的必然性只会在其先前状态成为可能性之后才会出现，而且它会转而产生新的可能性。相反地，新可能性的获得则产生于一个前期必然性的框架之中，并导致了后期必然性的形成。这是因为所有的顺化（accommodation）都是对同化格式（assimilation-scheme）的顺化。这些演替，实际上是开口与闭合（*ouvertures et fermetures*）的不断演替，这是由分化与整合之间的平衡规律所导致的。它们体现了认知结构在本质上具有短暂性的一个方面，虽然在结果上它们导致了具有永久必然性的系统。相比之下，这些可能性构成了时间形成（temporal formation）中的阶段。继伽利略之后，现代物理学起源的标志性转折点之一就在于相信时间是一个独立的变量。通过在认识论中引入发生的维度，我们可以期望，在适当的比例下也将提供类似的服务，即使时间的形成终止于不受时间限制的结构中。在这种情况下，非时间（atemporal）是超越性（transcendence）在其超越过程中整合的结果。这就是认知平衡的区别性特征（distinctive feature）。

---

① 这个术语已在皮亚杰（1974）中得以探讨。

二、两个正待确定的主要问题。问题一是确定在必然性形成中的这些阶段是否表明了后一阶段在强度上的发展，而不仅仅是在必然性关系的数量上的增长。第二个问题是确定发展是否应归于运算的建构，或者是否（正如在可能性的情况下）必然性的演变构成了一个在各水平上都至关重要的总体框架，连同可能性一起决定运算结构的形成。

先不考虑第二个问题的解决方案，第一个问题的解决方案与下述问题密切相关。允许存在或多或少较强的结构，并且这些结构也由此成为新的必然性的来源或结果。这种新的必然性可以通过两种方式来加以解释，而且这两种方式是非排他性的(non-exclusive)。一种解释方式承认所有必然性都具有相同的约束力。例如，分析判断 $n = n$ 与综合判断 $n \to n+1$ 都将具备同样的约束力，即使后者的内容比前者更为丰富。在这种情况下，包含更多的必然关系这一单纯事实让结构变得更为坚实稳固，这些必然性关系是相同的项(terms)之间或更多的元素之间的关系。与之相比，另一种解释相当于承认，在稳固的结构中，必然性关系通过丰富自身的内涵而变得更为强大。这意味着必须将那些表现出更多差异属性的必然性关系连接起来，这要求必然性具备更高的整合力，以及由此而来的更复杂、更具预示性的蕴涵。

我们的假设是如果必然性被解释为一个过程而不是简单地作为一个状态，那么这两个解释就是在同一立场(tout)上的相互补充。必然性 $n = n$ 和必然性 $n \to n+1$，作为状态，提供了同等的约束力，但当它们作为一个过程的阶段时，更丰富的必然性会更为强大，因为它为其他必然性的产生提供了更高的力量。事实上，从恒等式 $n = n$ 中得不到太多的东西。然而事实是任意数字 n 的必然性包括且只包括一个后继者，通过增加一个单位+1，需要一系列关于顺序、单位差、等价($+1 = +1$)、序数基数的有限数之间关系等必然性结果。另一个例子表明，新必然性关系的附加物的新关系无论是在丰富性还是在强度上都增加了一个给定系统的“内涵”，即映射。映射被康托尔(Cantor)引入基本算术之中，带来了对超限的“阿列夫零(aleph zero)”的发现。后者则让根岑(Gentzen)在后来得以完善基本算术的饱和度，基本算术中的不足已被戈德尔(Gödel)所证明。在这种情况以及在一个非隐喻的意义上，内涵丰富性的增加是等价于整合力的增长的。

为了保持在最简单的结构水平上，让我们对半格中所固有的必然性，半格是一个“群集(grouping)”，它通过所有子集的集合[①]（例如命题运算）而构成（例如，最复杂的系谱树“群集”）复杂的格。考虑到外延时，必然关系的数量自然也会因此多过第二条中的内容：

(1) 任何一个元素与其他任何元素之间的直接关系不同于一个群集的连续关系（例如：堂兄=父亲兄弟的儿子）。

(2) 一个组合系统截然不同于单一的直系关系，也不同于旁系关系。

---

① 至于相似的翻译，参见英海尔德与皮亚杰(1958, p. XIX)。

(3) 上限与下限取代了单一的前者。

现在为了理解内涵,在“单形(simplex)”(所有子集的集合)情况中的诸多必然性必须“强”于一个群集中的必然性。采取后者,则在系谱树中只有退化才可以还原为它们的反面——即使如此也仅限于在确定的个体之间,否则就存在“无传递性(aliotransitivity)”,因为“我兄弟的兄弟”可以是另一位兄弟,也可以是我本人。相比之下,在一个所有子集构成的集合中,否定N,互反R和相关C都是对合的,因为每个N,R和C中的每个元素都同时具备三个属性中的一个,且只具备一个。

简而言之,单形中的诸多元素彼此联系,并且各元素自身也通过更必然的关系(外延)而与整体系统联系起来,这比在一个较弱的结构比如群集中具有更为丰富的意义(内涵)。因为“更强”的结构具有更高的内聚力,这使之成为合格的结构。

从“相关”(在斯皮尔曼的意义上)到比例的过渡为此提供了另外一个例子。相关是一个概念上的等价,它存在于两对项之间所建立的相同关系中,例如“罗马对于意大利正如巴黎对于法国”。本例中存在一个明确的必然性,如果已经给定了四个项中的三个,则第四个项也的确被确定了。(如此一来就不能用马赛来取代巴黎)。但如果以数值关系,如$2/4 = 3/6$来代替这些概念关系,那么就增加了一个新的基本属性,即叉积等式$2\times6 = 4\times3$,这一属性在应用于相关时是没有意义的。[①]因此很显然地,比例中所固有的必然性要强于相关中所固有的必然性,因为它必须协调两个除法和两个乘法。因此关系中比例(11—12岁)的建构与相关(7—8岁)之间发生了明显的延迟。而且,我们见证了对乘法的理解相比于对加法的理解而言有一个特别的延迟,前者存在于多个加法的相加之中,并由此具有了更强复杂性的必然性。

对于这些更具复杂性的必然性,让我们回顾一下在双重参照系统的建构中发生的特征延迟(例如,一只蜗牛沿着一块本身就在移动的木板前进)。在那种情况下,运动物体的每个位置均从属于一个双重必然性:相对于其支撑物的位置,以及由支撑物将其分配到一个外部系统的某个参照位置上。正是这种组合使被试面临着一个长期的、突出的难题。一旦得出了解法,我们就可以说,它一方面产生了更多的必然性,但另一方面,运动物体的那些位置在相对位置概念的意义上可以被更好地确定下来。这构成了内涵的发展。如果用位移来解释力的强度,那么不言自明的是这种相对化产生了更高、更概括的功率。

同样地,从带有中性元的半群(又名单式半群或幺半群,monoid)到群的转变中,逆运算导致一个新的必然性关系的引入,这不仅需要增加外延$Z > N$,也需要丰富数值概念的内涵。[②]难以承认的是负数正是由几个世纪以来的这一意图所产生的。

总之,在这些由更强的必然联系所连接的项的意义上,我们似乎可以说这些多多少

---

① 另一方面,平方差积的等式对于“逻辑属性”:$I/N = C/R$而言是有效的,因为$IR = NC = R$。

② N=自然数。Z=整数。

少"强的"必然性得到了更广泛(更多的关系)和更集中(更多的含义)的"确定"。初步看来,内涵与外延之间有一种直接关系。我们已经在我们对归纳的研究(皮亚杰,1978)中看到这与反比关系(inverse relations)的一般规律并不矛盾,并在元素水平和结构水平之中做出了区分。至于必然性的程度,目前对必然性和相关性的蕴涵的研究(我们将在第4节返回到这一话题上)似乎表示还不错,由于抛开了对真值表的纯外延观,确定度(degrees of determination)被引入到蕴涵本身之中。

三、然后我们就可以面对核心问题了,即确定必然性是否总是运算结构固有成分的结果,正如在强必然性的情况下,或确定必然性是否与可能性结合起来构成总体框架的特征之一,运算在这个总体框架中得以构建。

我们的假设就是,如果可能性将格式(schemes)的形成阶段区分出来,一旦后者构建起来了那么意义也就形成了。意义天然地与这种结构相互依赖,因为它们随后将形成于这些相互依赖的、小的、局部的系统之中,而这些小的局部系统的建立早于运算结构的建立,必然性的第一种形式就存在于我们称作"预示蕴涵(signifying implications)"之中。

让我们首先注意意义系统的存在,在其初始状态下由于相互依存的事实而呈现出环状形态。这一事实并非儿童所特有,它对于查阅字典来找到此类环形的其他例子而言已经足够了。拉鲁斯(Larousse)将"数量"定义为:"数量就是易于增加或减少",并且"增加会使之变大",如此一来"尺寸"也就是"可以被增加或被减少的"。另一方面,当有关问题解决的疑问产生时,个体不可避免地要建立一个线性序列或不同类型的嵌套。这就使得在特定情况下可以对数量和质量的区分,例如——将"大(great)"美之"大"与"大(great)"表面积之"大"区分出来。以前这些多重关系也许可以平衡到稳定结构中,比如分类和系列化的第一个群集,某些不变的关系可以在行动过程中强势加入。这些关系的内容是由经验提供的,因为它们的外延非常具有通用性,同时在内涵上被试可以理解其原因,然后赋予某种程度上的必然性。例如,在感知运动阶段,10至12个月大的婴儿会发现在拉动纸板过程中,当纸板上放置了一个离得太远而难以直接伸手拿到的物体时,婴儿拉住纸板边缘将物体拖到更近的位置,就能顺利拿到它。如果物体随后被放置于正好超出纸板范围的位置,婴儿仍会继续拉近纸板,这是因为"置于其上"关系的意义仍未被婴儿所"理解"。与此相反,当婴儿有意地使用纸板时,我们可以说对婴儿而言"置于其上"的情况意味着一起被拉动的可能性,但只有当(且仅当)它被置于纸板之"上"而非在纸板的一侧时才可以。我们应该用术语"预示蕴涵"来表明这种关系[①],因为在这种情况下,一个意义,例如空间位置,引起了另一个意义(它在此情况下的电影式用途)。这些关系为外延确定了一个具体的必然性,让被试理解了这些关系的成因。

总而言之,我们可以说在两个格式(schemes)x与y之间存在一种预示蕴涵的关系,

① 法语"apports"被视作是"rapports"的误印。

即 $x \supseteq y$，如果对 x 的考虑（或使用）引起了对 y 的考虑（或使用）的话，这是因为 y 的意义是 x 的意义的一部分或者与 x 的意义有共同特征（简而言之“被 x 的意义包含在内”，即 $y \subseteq x$）。该初级形式具有最小的结构，因为相对于格式的内涵和内容而言，它基本上只涉及格式的意义。因此，预示蕴涵真的先于以外延为前提的包含（inclusion）出现，也先于所有“群集”的要素嵌套或具体运算的结构。自然地，这也先于以“所有子集的集合”和有系统的组合系统为前提的命题蕴涵（propositional implications）。

现在，它是一种预示蕴涵，即使在最原始的水平上，它也是一种格式-协调的工具。正是预示蕴涵，在被试对蕴涵的“原因”的理解范围内——例如，“置于其上”——构成了必然性关系的来源。对外延而言，必然性是组合与整合的产物（与可能性指向分化形成对照），这些最简单的正是存在于这种基本蕴涵中。预示很明显，必然性的发展先于运算的形成，运算是通过组合内涵意义与外延因素，尤其是与共同可能和共同必然性的组合，最终在格式之间的局部组合基础上达到精细的整合转换结构。这些运算结构也因此获得了一个较晚的形成，因为，取代在这些局部和多形态的组合，它们用“群集”嵌套来代替一般的组合形式，即使前者在内容上是连续的。更进一步的取代发生在形式的建构期间，在其正式独立的进程中变得越来越抽象。即便由此产生的新必然性永远“更强”，但这些高阶运算的必然性仍然逐步地从初期起作用的预示蕴涵所固有的“形式”中被抽取出来。这种蕴涵已经具有了作为必然性的特征，构成了随后的组合的前提条件。在所有发展水平上，推理都是在一般的、稳定的运算结构形成之前就被发现于认知过程的中心。后者只能在格式的最初结构内发展。该结构在其整体上是紊乱的，但其粗糙的构造从一开始就包含了两种可能性的混合，这两种可能性一是关于分化形成和必然关系的可能性，二是关于既定意义的可能性。然后它们全部合并为一个实体。在运算让不完全的分化按照组合定律，协调转换为一般的凝聚结构（coherent structures）之前，该实体中包含了这些不完全的分化。

四、我们因此被引导到“预示蕴涵”的“形式”中去确定必然性的起点位置，预示蕴涵表现了获得的意义之间的关系以及格式之间最原始的协调关系，即使是在最初级的水平上。非常有趣的是，我们注意到必然性的外延问题再次出现，在当今的形式逻辑中出现了一个解决它的类似方案，而且还不只是在模态逻辑的领域中，这是不言而喻的，但是在逻辑学家们克服这一问题的尝试中，可以毫不夸张地称之为经典外延逻辑的丑闻，即诸如“如果醋是酸的，则有人留着大胡子”等的蕴涵怪论。刘易斯（Lewis）在 1932 年认为他已经通过在 $x \rightarrow y$ 的蕴涵中增加一个一元算子“必然性”，解决了这一难题。然而可以证明的是该方法还不足以解决这一难题。相比之下，A. 罗斯·安德森（A. Ross Anderson）和 N.D.贝尔纳普（N. D. Belnap）的近期研究提出了一个自然蕴涵的理论，表明“当且仅当存在一个可能性途径让 A 演绎为 B 时，$A \rightarrow B$ 是有效的”。现在，这一途径需要内涵介入到相干关系的形式之中，相干关系假设在 A 与 B 之间存在“共同之处”。于是我们再次找到了——甚至是在其他因根岑的“自然演绎”所产生的更

高级且复杂的形式中——先前被称为“预示”的初级蕴涵的本构特征(constitutive characteristic),在这层含义上,B的意义也就与A的意义有了某些关联。因此,指出所有水平的原因都对逻辑必然性起到了重要的作用,这一点就非常有趣了。所以,如果局部的必然性(nécessaire local)尚存在着争论,它要么是在格式之间关系的运算结构形成之前就出现了,虽然非常初级,要么是在命题蕴涵的公理化系统所固有的形式化的必然性中产生的。

这有赖于“内涵”,而这是仅仅基于真值表建立的纯外延逻辑失败的先兆,自然会导致非外延的析取(disjunction)和合取(conjunction)的平等引入。由此,如果A不能从B中分离出来,那么$AB \rightarrow A$就失去了其有效性,这再次体现了意义在必然性建立中的基础性作用。(例如:A=动脉系统,B=静脉系统)。

五、现实(le réel)只提供了或多或少普遍却缺乏必然性的规律,这是唯一可观察和独立的模型的特征,这些模型是被试在对原因的探寻过程中建构起来的。这一限制反驳了两个经典的观点,这两个观点均融合了规范性和事实性。一个是亚里士多德,他相信“真实的”必然性,而没有看到必然性常常是演绎(由此具有了规范性)矛盾的结果。另一个是孟德斯鸠的观点,他对“法的精神”所作的解释(法律的,因而是完全规范性的)和用作起点的著名定义“法是由事物的性质产生出来的必然关系”,将规范性还原到了事实性的水平。

两组事实解释了最初的这种未分化。第一组事实是,有[i]“伪必然性”在一开始就承认如果事实就是它们本来的面目,那是因为它们必须如此。因此,从可能性的观点来看,这就相当于把某一部分现实的属性看作是只有这一部分才具有可能性,而不考虑它们是不是由于其他几个有实现可能性的部分所产生的某个特定现实化的结果。从必然性的观点来看,它具有明确积极的方面,即假定如果这些属性正是它们本来的面目——而且必须如此——则必然性就是凭借了“原因”,即使这些原因仍然未知。但这个伪必然性所固有的缺陷或缺口在于,没有认识到只有对原因的理解才允许对必然性的限定部分加以界定,特别是没有认识到只有超越可观察物的演绎模型才能提供这些原因。[ii]第二组事实意味着伪必然性是被试在进行简单的外延归纳时,从一开始就相信拥有这样一个没有超越可观察物的演绎工具。例如,在解释水位的水平状态时,那些相信水的重量很轻的年幼被试,限制自己去挑取容器的种类。但当他们后来发现水的重量时,他们就理解了水往低处流的趋势,并由此将水位的水平规律变为重物坠落的一个特例。后来他们将学到地球的“引力”作用,并通过学校传授万有引力的总体框架来结束这一发现过程。现在特殊规律对更普遍的规律的从属关系还只存在于外延嵌套中。(让我们将吸引假说放到一边,而且在爱因斯坦相对论的几何动力模型之前——或者米斯纳和惠勒的几何动力模型——它也只是对尚待解释的事物的一个描述而已)。除此之外,正是这些嵌套通过归纳概括来证明自己的事实,加强了从一般性到必然性的同化,并且除了惠更斯和莱布尼茨那样的批判性精神外,伪必然性在很长一段时间内得到了

巩固。

事实上，嵌套的演替包括了必然性这一点只是从运算“应用于”对象的观点来看的，而对相应动作的“原因”可能不只是简化到了从“一些”到“全部”的转换。必须到那些与表述规律的关系有关的演绎模型中才能找到它们，所以它们必须依据这样的客体——不再像可观察的事物，而是像这类关系的来源的那些客体。那相当于重新解释了这些客体，但是以一种物理的必然性所特有的矛盾方式进行的。一方面，它们被解释为算子并由此与必然性一起提供关于规律的原因。但另一方面，这些运算对象正是模型的那些对象，并且它们的运算也类似于模型建构者所做的那些运算。事实上，必然性因为这一点而被认为只不过是“属于”真实客体的。[①]其实质是物理学家在模型框架内得出的结论。这并不妨碍我们对实验控制和应验了的预测做出因果解释，有能力在“原因”方面取得进展，发现并提出新的可以带来新模型的问题，从而实现更深层次的“原因”等。但是，正如物理学家阿谢尔（Ascher）给我们研究中心的一篇文章里所说的那样，如果理论家在客体关系中以这种方式“推断”（或“确定”）必然性，那么他也有一种倾向去限制在其解释中考虑过的那部分内容——因此，对“实际存在的”必然性的错觉其实就是一个对客体内在本质的错觉。

尽管如此，如果物理必然性由此服从于物理学家的演绎方法，它也会表现出与那些逻辑数学必然性所不同的特征，即使是在它被极大空间化的情况下依然如此。让我们回顾一下加西亚（1971）写的关于米斯纳和惠勒的动态几何的文章。万有引力被转化为时空曲线，质量是某点上的一段曲线，电磁场表现了该点附近的曲线变化等等。尽管如此，我们仍然离“纯”几何很远。第一个原因是这些“形式”存在于我们之外，并构成了我们行动的宇宙。第二个原因是它们以独立于我们的方式彼此作用，同时在数学理论中它是我们确定要操作的成分。第三个原因是它们的活动是时空结合的，而一个数学理论是不受时间影响的。但最重要的是，我们保留后者的一切权利以便修正假设，在一个协调的假设-演绎体系中每一个都仍然是有效的。与此相反，在物理模型的情况下，有责任保存数据以及由此而得到的观察规律。但这种责任自然地只与假设内容的限制有关，因此同样地没有对客体赋予必然性，后者应归于模型的演绎结果，这种模型是由在实验所施加内容的限制下的假设建构起来的。换而言之，即使是在动态几何的情况下，理论家也无权修改事实所施加的“形式”，并且它们的客观变化只能被演绎出来直至完全进入可能性系统之中。然而，问题是要说明为什么某些可能性实现了，以及它们的必然性是如何作为该系统组成成分的结果的。

六、但是，如果可能性和物理必然性因此而与物理学家的结构和模型有关的话，可以认为这些认知创造物的来源最早可追溯到生物学水平，即使有机体的实体就是它自身也只能通过使用生物学家的模型才能被了解到。生物系统与物理系统之间的本质差

---

① 这里用的是“necessitable”，而不是 necessary，甚至也不是 necessitated。

异在于以下两个事实:[i] 生物繁殖并将遗传程序传递给后代,该遗传程序决定了它的后成论和一定数量的先天行为模式;[ii]生物系统构成了一个可分离的系统——与物理系统相反的是,这一系统总是被淹没于更广阔的系统之中——有能力改变其内部的设定并天生具有细胞膜,细胞膜构成了其结构的一部分,并通过它让改变得以发生。在这些条件下,分化(可能性的来源)和整合(必然性的来源)的过程需要新的观念来为它们的认知意义做准备,而与此同时新的"行为模式"的形成已经独立地初见端倪。

事实上,重要机体组织的定义性特征是包含了子系统或"器官",子系统或"器官"的相互作用确保了它们的相互维持以及一个封闭的整体。后者的可能性变异要么导致死亡,要么导致再平衡,并终成为一个新的具有类似形式的整体。于是,看上去好像如果每个有机过程都在运作,那么其细节上都具有物理化学的性质。事实是它们的总系统应该同时是可分离的,并针对性地繁殖传递种族和个体发育的遗传程序,这为系统赋予目的性和程序性,与整合和分化机制的因果意义相同。换而言之,相对于简单自动的维持而言,生存和程序性繁殖就是主动的、内在的组织问题。于是,该守恒组织包括了正常和异常(病理性)的具体生物状态,而缺乏物理意义和认知"规范性"的来源。总而言之,每一个凭借其行为("程序"模型)对环境起作用的有机体本身就是一个主体,而不只是一个客体。

从这个角度来看,一个生物学上的"必然性"和"可能性"可以被认为不只与观察者有关,甚至也与组织体本身有关。确保可分离和可繁殖的系统存活的那些解剖和生理关系是非常必要的,系统的生命体通过代谢和活动来得以维持。居维叶(1802,第47页)早前对"特征"与"形式"之间关系规律的发现正是得益于"功能之间的相互依赖",他说,在这种情况下"器官之间的关系"具有"一个可以与形而上学(理论力学等)和数学规律所具有的必然性相提并论的必然性"。

至于来源于表型或基因型变异的生物可能性可以分化程序——但仅在这些变异与整合匹配的范围内——因此,在基因型变异的情况下,在总的可分离系统存活或维持的同时,变异也随着已被修正过的程序遗传传递了下去。

这些客观生物学的必然性和可能性的内在特征——并且不只是与生物学家所使用的必然性和可能性模型有关——在我们看来已经得到了事实证明,即它们不止解释了每个有机体作为可分离的系统所具有的程序特征,还在本质上得到了事实的证明,即生命作为一个整体,其进化的过程特征从一开始就是连续不间断的序列。因此进化在其整个历史中构成了这些可能性和必然性的基地或来源,因为,与星系等的演变形成鲜明对比的是,它包含了所有层次的目的性程序,如果我们的理论(皮亚杰,1976a)是有根据的,它就服从于前认知或认知的"行为模式"。至于后者,我们已经在别处看到(皮亚杰,1976a,第7章),复杂的本能包括了可同化的关系,以预示它们的组合动作之间的蕴涵。

七、由被试操作的成分产生的所有水平的必然性都可以被接受,其他的也因而建

立在反省抽象之上。这是因为动作或合成运算都来自于先前的结构，也是因为像这样的新成分扩充了其他那些让它具有可能性的成分。现在我们已经（见第3节）将必然性的基本形式回溯到第一个“预示蕴涵”上，但在对抽象所作的研究（皮亚杰，1977a）中我们把这种类型的关系看作是似乎“在很大程度上受到经验抽象的控制”，而与此同时又回想起后者“毫无例外地假设了一个对它的发生而言必要的功能性框架”。因此，现在非常有必要对那部分介入必然性关系组成过程的反省抽象做详细的说明，在预示蕴涵中的这一必然性关系正是在被试寻求或发现关系原因时组成的。

因为预示蕴涵表达了一个事实，即一个格式的意义预先假定了其他格式的意义，很明显地这些意义最初都与经验提供的内容有关——因此是经验抽象的作用。但显然地内容之间的关系可能会导致在它们的概括性方面的错误。经典的例子就是白天鹅，白天鹅这一概念似乎暗示天鹅是白色的，直至在澳大利亚发现了黑天鹅。同样地，如果不等边三角形被认为是有缺陷的三角形，那么对年幼的被试而言每个三角形都必须意味着两边相等，甚至是三边相等。通过对内容和经验抽象的自我设限，可以看出它们不但带来了有效的必然性，还导致了伪必然性。

但我们在前面（第五点）指出即使是在伪必然性中也存在一个真必然性[1]的起点，在这个意义上被试以 $x \supset y$ 的方式将 y 绑定到 x 上就是大体上承认还必须增加一个“原因”到这种关系里，即使被试并不知道它是什么。这就是原因的确定，它在预示蕴涵的范围内，并将引向真正的必然性。现在，这一确定预先假设了反省抽象的介入，这种反省抽象是从被试借助以下理由的活动中得到的。

首先，要通过 x 发现 y 的蕴涵原因就是要让 y 作为 x 存在的一个条件。但因为自我限制使用这一条件，所以只能适当地将其定名为“必要条件”（即“当且仅当”）[2]，也就等于用必然性来解释必然性。因此，我们必须将它与不必要条件区别开来，而且其特性相当于说 y 构成了系统的一个内在变化，这引起或提出了 x 的可能性。现在内在变化通过事实而与外在变化区别开来，这个事实就是已知后者仅仅是通过观察得到的，而前者则是演绎而来的。也就是说，当 y 可以以不只是外延的方式从 x 中演绎而来时，必然性也就出现在预示蕴涵 $x \supset y$ 中了。

那么这一演绎的表现是什么呢？如果 x 是一个逻辑数学的对象，这当然是一个建构的问题，因此是一个转换组合的问题。另一方面，在物理对象的情况下有一个因果模型的介入，但在此情况下物理对象同样是模型的建构者，同时也要忠实于经验所提供的数据。于是，在这两种情况下主体的活动都建立在产生反射抽象特性的基础之上。

总之，主体可以通过对 x 的演绎建构来确定预示蕴涵 $x \supset y$ 的意义，就此而言预示蕴涵 $x \supset y$ 成了必然性，对 x 的演绎建构是在 y 起必要条件作用的情况下进行的，在组

---

① 然后可以被称为前-必然性。

② 在一个必要条件（只有）与一个充分必要条件（当且仅当）这里有一个明显的合并。

合系统的"整体性",即"结构"特性的考虑下,y凭借其作为系统的一个内在变化的身份才成为必要条件。现在这个演绎的必要条件包含了一个大相径庭的意义,它来自于经验性的同名异物。在后者的情况下,这将观察归纳为x从未遇到y,而这是一个可能被新事实证明无效的单纯的归纳所具有的特征而已。与此相反,在一个正确的演绎系统水平上,条件是必要的,或者是不必要的,即使它在组成另外一个"结构"的不同系统中引起了状态的改变。

但在通过提供原因,依靠主体基于反省抽象的建构,并由此依靠结构性整体内在的内源性组合来描述必然性特征的过程中,我们遇到了一个来自于阿波斯特尔(Apostel, 1973, p.210)的重要反对意见,该意见认为通过这样做只不过表示"现实的一个部分相似于另一个部分"。这么一来问题就出现了:为什么世界会更容易理解,因为我们发现世界类似于我们吗?对此有一个回答:必然性是主体所具有的特性,从而区别于通过客体获得的单纯的归纳——阿波斯特尔似乎从一开始就忽略了这一差别——因为必然性的规范性特征,即因为它依靠规范,规范与特定必然性的条件性特征完全无关,并以一种绝对的方式规定了确定必然性的必要性,没有规范,演绎活动也就变成了可能性。事实上该规范完全不同于物理决定论的原则,它仅仅表示了从主体的运算模型中得到的因果必然性所具有的一个现实属性。相比之下,正如矛盾律不允许我们自相矛盾,但并没有指出什么是矛盾的或什么不是矛盾的(因为如果我们被阻止同时断言p和not $-p$,矛盾律并不会说是$q \supset p$还是$q \supset$ not $-p$),以及正如充分合理原则不提供应用指导一样的,必然性的必然规范原则以同样的方式只进行调控,却绝不指定什么是必然的。尽管如此,因为思维被降低到既不是一堆无关联的现实化,也不是一切皆流(*panta rei*[①]),所以必然性的规范原则仍然还是表达了思维的一个基本要求,规范原则是封闭和最大的稳定性问题尚待解决的系统集成的需要,与此同时其内涵丰富性上的增加——多亏了可能性的增加——令其可以与这些系统的组成成分相兼容。现在必然性整合的规范性特征表明主体拥有不同于现实的力量,也表明必然性之间的连接可以让自身避免还原为单纯的"相似性",就像阿波斯特尔(1973)所说的那样,但还包括了由第一个赋予第二个的形式的丰富化(而第二个仅仅通过内容上的增加来丰富第一个)。当规范应用于下述情况时其特征确实带来了更高级的力量(pouvoir):在高度整合的理论或活的生物体已经(见第六点)处于其"正常"状态的情况下,通过蕴涵或相互保护规范被用于针对不矛盾而言的整合连贯性和针对充足理由而言的可理解性。但它的第二个特征明确性(和补偿性),却未能应用于不适用的情况:低度整合的理论(或生物体死亡)的排斥、矛盾等,然而物理现实既不知道失败,也没有死亡,也没有矛盾(领先于恩格斯!)等。

这标志的不是一个更高的状态,而是相反地,一个较低水平的创造性,在这个较低的创造性水平上仍然只是一些给定的事实,而不顾这些事实的转换有多丰富,是否可观

---

① "一切皆流"(赫拉克利特)。

察或尚未观察到。另一方面，主体凭借“规范的”活动变得有能力生成比那些由现实提供内容的形式更多的“形式”(同时也能建构内容，如果需要的是非预测性内容的话)。这本身就证明，即使物理现实常常是可数学化的，但也不是每一个数学实体都总是对应于一个客体或真实的事件——事实上远非如此。

八、但是，如果必然性的特征是引起整合，并因此通过作为组合的产物来具有综合性，那么解析性的必然性，如 $A = A$ 或是一般的“必然(apodictic)”判断是由什么造成的?

在第一个方面，基于弗雷格和他的形式化语法，分析性可以被认为是内容合成物的一种特殊的——最简单的——情况，理由首先就来自于它包括了断定(predicates)和关系的综合。首先，$A = A$ 这一判断并不是从现实中得出的，因为客体 a 在 t_2 这个时间已经不同于 t_1 时的它。如果该判断取决于 A 的定义，那么明显地后者包含了一定数量的关系排名，判断式本身就包括了等价关系(“红”=与其他红色相同，所以“共同红”)。由此，恒等式 $A = A$ 意味着 A 的属性整合系统的守恒，而如果在一个既定情境下只考虑其中的一部分，这些属性就意味着其他属性的存在，这源于一个事实，即(在必然性蕴涵逻辑的特殊情形下)恒定式 $A = A$ 是从蕴涵 $A \supset A$ 而不是相反的情况中得到的。因此，看上去必然性所谓的“分析性”已经构成了整合的一个基本形式。

至于逻辑上确实的(即“必然性本身的必然性”)判断，它们的存在将与我们关于所有必然性的条件性假设相矛盾：因为在一个上下文或解释性模型中的判断必然性可能不是在另一个中的判断必然性。

总之，必然性的不同形式总是与“成为必然性的建构(necessitating constructions)”有关，可以假定“成为必然性的建构”有三种形式：

[i] 从局部的必然性过渡为一个(更丰富的)转换“系统”；

[ii] 在系统闭合中的进展；

[iii] 后来在更广泛系统中的整合。

但在所有这些情况下，必然性都有它的“理由”(没有什么是无理由而存在的，莱布尼茨)，并且在它较高级的形式中，必然性在一个旨在从主题方面阐述成为必然性的建构具有清晰连贯性的“解释理论”中得到了详细的解释。“解释建构的进展是这样的，它在自身的水平上反而成为有必要的，从而产生一个与其所阐述的必然性不同的必然性”(亨里克斯，未发表)。所以，和可能性一样的，也存在一个属于必然性的内在动力机制，而我们的问题之一就是去确定它们的构成。[①]

① 对于这个在线版本，预印文本已更改如下：

1986年的预印文本	2011年在线文本
所有的必然性都依赖于“原因”	参见皮亚杰(2006)的附言
pertinence(相关性)	relevance(相关性)
indifferentiation(未分化)	non-differentiation(未分化的)
Reference(参考文献)	皮亚杰(1978 & 2001)

文献总汇

Apostel, L.(1973). *L'explication dans les sciences*. Paris: Flammarion.

Cuvier, G.(1802). *Leçons d'anatomie comparée*. Paris.

Garcia, R.(1971). "Les explications causales." Etudes d'Epistémologie Génétique, vol. 26. Paris: Presses Universitaires de France.

Henriques, G. Unpublished paper. International Centre for Genetic Epistemology, Geneva.

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking*. London: Routledge & Kegan Paul.

Ladrière, J.(1973). *L'explication dans les sciences*. Paris: Flammarion.

Piaget, J.(1974). *Prise de conscience*. Paris: Presses Universitaires de France. (*The grasp of consciousness*. London: Routledge & Kegan Paul, 1977).

Piaget, J. (1976a). *Le comportement, moteur de l' evolution*. Paris: Gallimard. (*Behavior and evolution. London: Routledge* & Kegan Paul, 1978)

Piaget, J.(1976b). "Le possible, l'impossible et le nécessaire." *Archives de Psychologie*, 44, 281–291.

Piaget, J.(1977a). "Recherches sur l'abstraction réfléchissante." Etudes d'Epistémologie Génétique, vol. 34, 35. Paris: Presses Universitaires de France. (*Studies in reflecting abstraction*. Hove, UK: Psychology Press, 2001)

Piaget, J.(1977b). "Essai sur la nécessité." *Archives de Psychologie*, 45, 235–251.

Piaget, J.(1978). *Recherches sur la généralisation*. Etudes d'Epistémologie Génétique, vol. 36. Paris: Presses Universitaires de France.

Piaget, J.(2006). "Reason." *New Ideas in Psychology*, 24, 1–29.

Piaget, J. & Voyat, G. (1979). "The possible, the impossible and the necessary." In F. Murray, *The impact of Piagetian theory*. Baltimore: University Park Press.

译者简介

蒋子修　南京大学新闻传播学院毕业生,现为自由翻译人
奚家文　深圳职业技术学院商务外语学院教授
谢英香　上海市松江区教育学院讲师
熊哲宏　华东师范大学心理与认知科学学院教授
衣新发　陕西师范大学现代教育技术教育部重点实验室教授
朱莉琪　中国科学院心理研究所研究员,中国科学院大学教授
查抒佚　西南民族大学教育学与心理学学院讲师